Transformaty Rozmyte (F-transforms)

Piotr Ładyżyński
Wydział Matematyki i Nauk Informacyjnych PW

Spis treści

1. Postawienie problemu
2. Znane rozwiązania problemu
3. Rozmyty podział przestrzeni
4. F-transformata
5. F-transformata odwrotna
6. Zastosowania F-transformat
7. Wnioski i pytania
8. Literatura

Postawienie problemu

$L([0,1])$ – pewna przestrzeń funkcyjna, $f \in L$

Szukamy takiego odwzorowania $F : L([0,1]) \longrightarrow \mathcal{R}^n$, które lokalnie wyciągnie pewnie własności funkcji f, a ponadto bedzie istaniało odwzorowanie odwrotne $F^{-1} : \mathcal{R}^n \longrightarrow L([0,1])$, które będzie potrafiło skonstruować funkcję podobną do wyjściowej funkcji w sensie owej ustalonej włsności.

W naszym przypadku: F – *transformata* zakoduje funkcję w postaci wektora liczb rzeczywistych a transformata odwrotna F^{-1} skonstruuje z tego wektora funkcję, która bedzie dobrym przybliżeniem funkcji wyjściowej.

Znane rozwiązania problemu

Twierdzenie

Jeśli (f_n) *jest przeliczalnym układem ortogonalnym w przestrzeni unitarnej* X *oraz* $f = \sum_{n=1}^{\infty} c_n f_n$, *to* $c_n = \frac{<f|f_n>}{||f_n||^2}$.

Przykład

Układ ortogonalny: $(f_n) = (1, \sin t, \cos t, \sin 2t, \cos 2t, \dots)$

Przestrzeń: $X = L^2([-\pi, \pi])$ $\qquad < f, g >= \int_{[-\pi,\pi]} f(x)g(x)dx$

$$f := x \to (2, -1, \frac{2}{3}, -\frac{1}{2}, ...)$$

$$(2, -1, \frac{2}{3}, -\frac{1}{2}, ...) \to f(\hat{x}) := 2 - \sin x + \frac{2}{3}\cos x - \frac{1}{2}\sin 2x + \dots$$

Znane rozwiązania problemu

Twierdzenie

Niech f pewna funkcja ciągła na $[a, b]$. Niech (f_n) jest przeliczalnym układem ortogonalnym w przestrzeni $L^2([a, b])$. Dla każdego $\varepsilon > 0$ istnieje takie n_ε, że

$$\forall_{n>n_\varepsilon}\forall_{x\in[a,b]}|f(x) - \hat{f}(x)| < \varepsilon,$$

gdzie $\hat{f}(x) = \sum_{n=1}^{n} c_n f_n$ *oraz* $c_n = \frac{<f|f_n>}{||f_n||^2}$.

Rozmyty podział przestrzeni

Definicja

Niech $x_1 < x_2 < \cdots < x_n$ *będą ustalonymi punktami wewnątrz odcinka* $[a, b]$*, takimi że* $x_1 = a$*,* $x_n = b$*. Mówimy, że zbiory rozmyte* $A_1, \ldots, A_n$ *zdefiniowane na* $[a, b]$ *tworzą* ***rozmyty podział*** *odcinka* $[a, b]$ *jeżeli dla* $k = 1, \ldots, n$ *spełniają warunki:*

1. $A_k : [a, b] \to [0, 1], A_k(x_k) = 1$,
2. $A_k(x) = 0$ *dla* $x \notin (x_{k-1}, x_{k+1})$*; przyjmujemy dodatkowo, że* $x_0 = a, x_{n+1} = b$,
3. $A_k(x)$ *jest ciągła,*
4. $A_k(x), k = 2, \ldots, n$ *jest ściśle rosnąca na* $[x_{k-1}, x_k]$ *oraz* $A_k(x), k = 1, \ldots, n-1$ *jest ściśle malejąca na* $[x_k, x_{k+1}]$,
5. *dla* $x \in [a, b]$ *spełnione jest* $\sum_{k=1}^{n} A_k(x) = 1$.

Jednostajny rozmyty podział przestrzeni

Definicja

Jeżeli węzły $x_1, \ldots, x_n$ są równomiernie rozłożone na odcinku $[a, b]$ tzn. $x_k = a + h(k-1), k = 1, \ldots, n,\ h = \frac{b-a}{n-1}$ oraz funkcje przynależności zbiorów rozmytych $A_1, \ldots, A_n$ są symetryczne i przystające do siebie (w sensie geometrii wykresu), to rozmyty podział nazywamy jednostajnym.

Jednostajny rozmyty podział przestrzeni

Przykład

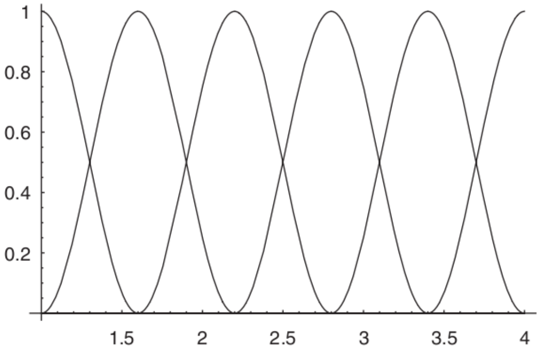
$$A_1(x) = \begin{cases} 0.5\left(\cos\frac{\pi}{h}(x - x_1) + 1\right), & x \in [x_1, x_2] \\ 0 & w\ p.\ p. \end{cases}$$

$$A_k(x) = \begin{cases} 0.5\left(\cos\frac{\pi}{h}(x - x_k) + 1\right), & x \in [x_{k-1}, x_{k+1}] \\ 0 & w\ p.\ p. \end{cases}$$

gdzie $k = 2, \ldots, n-1$ *oraz*

$$A_n(x) = \begin{cases} 0.5\left(\cos\frac{\pi}{h}(x - x_n) + 1\right), & x \in [x_{n-1}, x_n] \\ 0 & w\ p.\ p. \end{cases}$$

Jednostajny rozmyty podział przestrzeni



Rysunek: Przykład jednostajnego podziału odcinka $[1, 4]$.

F-transformata

Definicja

Niech zbiory rozmyte $A_1, \ldots, A_n$ *będą podziałem rozmytym odcinaka* $[a, b]$*. Niech* $f \in C([a, b])$*. Wektor liczb rzeczywistych* $[F_1, F_2, \ldots, F_n]$ *zdefiniowany przez*

$$F_k = \frac{\int_a^b f(x)A_k(x)dx}{\int_a^b A_k(x)dx}, k = 1, \ldots, n,$$

nazywamy ***F-transformatą*** *funkcji* f *względem* $A_1, \ldots, A_n$*.*

Wprowadźmy oznaczenie: $F_n[f] = [F_1, F_2, \ldots, F_n]$.

F-transformata

Jeśli podział $[a, b]$ jest jednostajny to wzór na składniki F-transformaty przyjmuje postać:

$$F_1 = \frac{2}{h}\int_{x_1}^{x_2} f(x)A_1(x)dx,$$

$$F_n = \frac{2}{h}\int_{x_{n-1}}^{x_n} f(x)A_n(x)dx,$$

$$F_k = \frac{1}{h}\int_{x_{k-1}}^{x_{k+1}} f(x)A_k(x)dx,$$

F-transformata odwrotna

Definicja

Niech zbiory rozmyte $A_1, \dots, A_n$ będą podziałem rozmytym odcinaka $[a, b]$. Niech $f \in C([a, b])$. Niech $F_n[f] = [F_1, F_2, \dots, F_n]$ bedzie F-transformatą funkcji f. Wtedy funkcję

$$f_{F,n}(x) = \sum_{k=1}^{n} F_k A_k(x),$$

nazywamy ***odwrotną F-transformatą****.*

F-transformata odwrotna

Twierdzenie

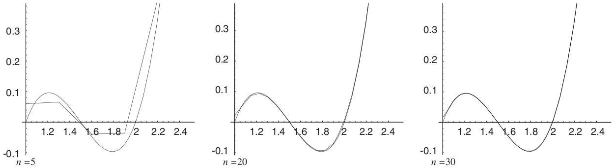
Niech f będzie funkcja ciągła na $[a,b]$. Wtedy dla każdego $\varepsilon > 0$ istnieje n_ε i podział rozmyty $A_1, \ldots, A_{n_\varepsilon}$ odcinka $[a,b]$ taki, że dla każdego $x \in [a,b]$

$$|f(x) - f_{F,n_\varepsilon}(x)| \leq \varepsilon,$$

gdzie $f_{F,n_\varepsilon}(x)$ jest F-transformatą odwrotną funkcji f.

Dowód:

F-transformata odwrotna



Rysunek: Funkcja $f(x) = (x-1)(x-2)(2x-3)+6$ i jej F-transformata odwrotna oparta na układzie n zbiorów rozmytych trójkątnych.

F-transformata funkcji wielu zmiennych

Definicja

Niech zbiory rozmyte $A_1, \ldots, A_n$ będą podziałem rozmytym odcinaka $[a, b]$, a zbiory rozmyte $B_1, \ldots, B_m$ podziałem rozmytym odcinaka $[c, d]$. Niech $f(x, y)$ będzie dowolną funkcją z $C([a, b] \times [c, d])$. Mówimy, że $n \times m$ - macierz liczb rzeczywistych $F_{nm}[f] = (F_{kl})$ jest F-transformatą funkcji f jeśli dla $k = 1, \ldots, n$, $l = 1, \ldots, m$ zachodzi

$$F_{kl} = \frac{\int_c^d \int_a^b f(x, y) A_k(x) B_l(y) dxdy}{\int_c^d \int_a^b A_k(x) B_l(y) dxdy}.$$

F-transformata dyskretna

Jeśli pewien układ punktów $(p_i, q_j) \in [a, b] \times [c, d]$ jest wystarczająco gęsty, to F-transformatę funkcji f możemy zdefiniować poniższym wzorem zachowując własność jednostajnej zbieżności do funkcji f:

$$F_{kl} = \frac{\sum_{j=1}^{M} \sum_{i=1}^{N} f(p_i, q_j) A_k(p_i) B_l(q_j)}{\sum_{j=1}^{M} \sum_{i=1}^{N} A_k(p_i) B_l(q_j)}.$$

F-transformata odwrotna funkcji wielu zmiennych

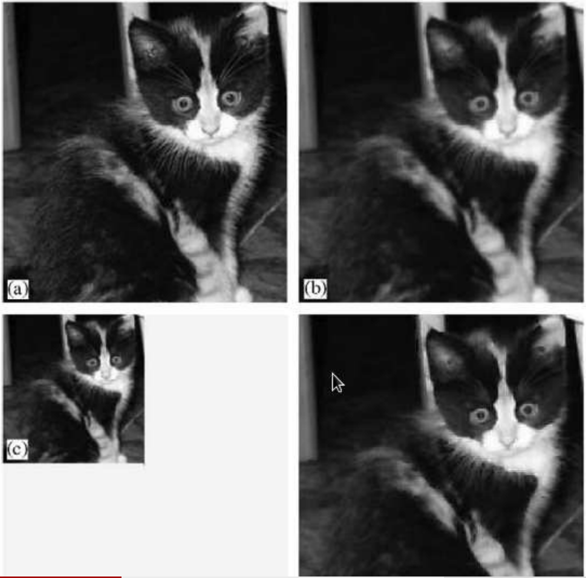
Definicja

Niech zbiory rozmyte $A_1, \ldots, A_n$ *będą podziałem rozmytym odcinaka* $[a, b]$, *a zbiory rozmyte* $B_1, \ldots, B_m$ *podziałem rozmytym odcinaka* $[c, d]$. *Niech* $f(x, y)$ *będzie dowolną funkcją z* $C([a, b] \times [c, d])$. *Niech* $F_{nm}[f] = (F_{kl})$ *będzie F-transformatą funkcji* f. *Wtedy funkcję*

$$f^F_{nm}(x, y) = \sum_{k=1}^{n} \sum_{l=1}^{m} F_{kl} A_k(x) B_l(y),$$

nazywamy ***F-transformatą odwrotną*** *funkcji* f.

Zastosowanie F-transformaty do kompresji obrazów



Wnioski i pytania

1. Czy F-transformaty stanowią nowatorskie narzędzie z punktu widzenia aproksymacji funkcji, kompresji obrazów, prognozowania szeregów czasowych?

Wnioski i pytania

1. Czy F-transformaty stanowią nowatorskie narzędzie z punktu widzenia aproksymacji funkcj, kompresji obrazów, prognozowania szeregów czasowych? Moim zdaniem nie:(Są równoważne rozkładom funkcji względem znanych i dobrze zbadanych baz funkcyjnych przestrzeni Hilberta.

Wnioski i pytania

1. Czy F-transformaty stanowią nowatorskie narzędzie z punktu widzenia aproksymacji funkcji, kompresji obrazów, prognozowania szeregów czasowych? Moim zdaniem nie:(Są równoważne rozkładom funkcji względem znanych i dobrze zbadanych baz funkcyjnych przestrzeni Hilberta.
2. Po co nam F-transformaty?

Wnioski i pytania

1. Czy F-transformaty stanowią nowatorskie narzędzie z punktu widzenia aproksymacji funkcji, kompresji obrazów, prognozowania szeregów czasowych? Moim zdaniem nie:(Są równoważne rozkładom funkcji względem znanych i dobrze zbadanych baz funkcyjnych przestrzeni Hilberta.
2. Po co nam F-transformaty?
   Za pomocą F-transformat i metod algebry abstrakcyjnej można formalnie udowodnić, że rozmyte systemy wnioskujące składające się z reguł typu:
   $$\textbf{IF } x_1 \text{ jest } A_1 \textbf{ AND } \ldots \textbf{ AND } x_n \text{ jest } A_n \textbf{ THEN } y \text{ jest } B,$$
   są niczym innym jak aproksymacją funkcji n-wymiarowych zdefiniowanych za pomocą węzłów: $(x_1, \ldots, x_n; y)$.

Literatura

1. J. Musielak - *Wstęp do analizy funkcjonalnej*, PWN 1989
2. I. Perfilieva - *Fuzzy transforms: Theory and applications*, Fuzzy Sets and Systems 157 (2006) 993 – 1023.
3. I. Perfilieva, M. Stepnicka, V. Pavliska, V. Novak, L. Vavrickova, I. Tomanova - *Time Series Analysis and Prediction Based on Fuzzy Rules and the Fuzzy Transform*, IFSA-EUSFLAT 2009.
4. I. Perfilieva, M. Dankova - *Towards F-transform of a Higher Degree*, IFSA-EUSFLAT 2009.