Uniwersytet Warszawski
Wydział Fizyki

Mateusz Iskrzyński
nr albumu: 234478

Klasyfikacja operatorów wyższego rzędu w Modelu Standardowym

Praca magisterska
w zakresie **Fizyki Teoretycznej**
na kierunku **Fizyka**
w ramach **Kolegium Międzywydziałowych Indywidualnych Studiów Matematyczno-Przyrodniczych**

Praca wykonana pod kierunkiem
Dr hab. Janusza Rośka
Instytut Fizyki Teoretycznej

Warszawa, lipiec 2010 r.

Oświadczenie kierującego pracą

Oświadczam, że niniejsza praca została przygotowana pod moim kierunkiem i stwierdzam, że spełnia ona warunki do przedstawienia jej w postępowaniu o nadanie tytułu zawodowego.

Data   Podpis kierującego pracą

Oświadczenie autora pracy

Świadom odpowiedzialności prawnej oświadczam, że niniejsza praca dyplomowa została napisana przeze mnie samodzielnie i nie zawiera treści uzyskanych w sposób niezgodny z obowiązującymi przepisami.

Oświadczam również, że przedstawiona praca nie była wcześniej przedmiotem procedur związanych z uzyskaniem tytułu zawodowego w wyższej uczelni.

Oświadczam ponadto, że niniejsza wersja pracy jest identyczna z załączoną wersją elektroniczną.

Data   Podpis autora pracy

Streszczenie

W niniejszej pracy rozważane są operatory o wymiarze masowym 5 i 6 tzn. $\sim (GeV)^5$ i $\sim (GeV)^6$, mogące pojawić się w teoriach efektywnych oddziaływań pomiędzy polami Modelu Standardowego. Przy wykorzystaniu równań Eulera-Lagrange'a wynikających z klasycznego lagranżjanu Modelu Standardowego znajdowana jest baza 59 liniowo niezależnych operatorów zachowujących jego symetrie (cechowania i lorentzowską) oraz globalną liczbę barionową i leptonową.

Klasyfikacja ta prowadzi do korekty wyników pracy [1], istotnie redukując podaną w niej bazę niezależnych operatorów, która niepotrzebnie zawiera m.in. wyrażenia zawierające pochodną kowariantną działającą na pole fermionowe.

Słowa kluczowe

operatory wyższych wymiarów, Model Standardowy, teorie efektywne

Dziedzina pracy

13.2 fizyka

Tytuł pracy w języku angielskim

Classification of higher-dimensional operators in the Standard Model

Serdeczne podziękowania kieruję do

dr hab. Janusza Rośka za opiekę naukową, cenne uwagi, otwartość i życzliwość.

dr hab. Mikołaja Misiaka i prof. Bohdana Grządkowskiego za zaproponowanie tematu pracy, kluczowe wskazówki i komentarze merytoryczne.

dr hab. Pawła Nurowskiego za zasugerowanie strategii dowodzenia podstawowego narzędzia przedstawionej analizy oraz wszelkie inne wyjaśnienia.

prof. Jacka Tafla i dr Andrzeja Okołowa za pomoc w zrozumieniu struktur matematycznych wykorzystywanych w niniejszej pracy.

doktorantów IFT, w szczególności Wojciecha Kamińskiego, za pomocne dyskusje i wskazówki.

Spis treści

1 Wstęp

Model Standardowy (oznaczany dalej skrótem SM) jest teorią dobrze opisującą oddziaływania między znanymi cząstkami elementarnymi w całej przebadanej dotąd doświadczalnie skali energii, czego dowodzą wyniki wielkiej liczby doświadczeń, zebrane w zestawieniu [2]. Model ten nie proponuje jednak satysfakcjonujących rozwiązań dla istotnych problemów fizycznych, takich jak problem hierarchii czy mechanizm łamania symetrii CP, który w SM nie wystarcza do wyjaśnienia asymetrii między materią a antymaterią w obserwowanym Wszechświecie[1]. Zagadnienia te, wraz z dążeniem do pełniejszej unifikacji oddziaływań, dają podstawy przekonaniom o istnieniu szerszej teorii, której grupa cechowania zawierałaby jako podgrupę grupę cechowania SM.

Ponieważ w przebadanym jak dotąd zakresie energii przewidywania SM są doskonale zgodne z wynikami doświadczalnymi, poprawki związane z efektami "nowej fizyki”, obecnej w rozszerzeniach SM, muszą zatem być odpowiednio małe. Teorie takie muszą również zawierać wszystkie pola Modelu Standardowego oraz zachowywać jego symetrie. Bozon Higgsa, nie znaleziony dotąd w eksperymentach, *a priori* mógłby być w nich nieobecny, tu jednak ograniczymy się do teorii go zawierających. Zachowanie symetrii cechowania SM jest tu bezdyskusyjnym warunkiem, zaś zachowanie liczby barionowej i liczb leptonowych (tych ostatnich dla każdego zapachu z osobna) zostało potwierdzone jest przez doświadczenie na stosunkowo wysokim poziomie precyzji[2].

Implikacje modeli uogólniających SM byłyby w pełni widoczne w procesach osiągających wystarczająco wysokie energie oddziaływań. Przy niższych energiach manifestują się one w ramach teorii efektywnych, w których zjawiska związane z szerszymi teoriami przejawiają się w postaci poprawek do lagranżjanu Modelu Standardowego. Można je sformułować poprzez wycałkowanie (w formalizmie kwantyzacji za pomocą całek funkcjonalnych po konfiguracjach pól) pól odpowiadających cząstkom o dużych masach. W ten sposób w funkcji Lagrange'a SM pojawiają się nowe operatory[3], które w przypadku teorii, do których stosuje się postulat odprzęgania Appelquista-Carazzone [5], zapisać można jako szereg potęgowy o parametrze równym odwrotności typowej skali mas usuniętych z teorii pól. Znane są przy tym modele, np. opisany w pracy [6], w których tego rodzaju odprzęganie nie zachodzi. W bardziej typowych przypadkach otrzymujemy jednak następującą postać lagranżjanu:

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_{SM}^{(4)} + \frac{1}{\Lambda}\sum_i c_i^{(5)}\mathcal{O}_i^{(5)} + \frac{1}{\Lambda^2}\sum_i c_i^{(6)}\mathcal{O}_i^{(6)} + O(\tfrac{1}{\Lambda^3}) \tag{1.0.1}$$

Współczynniki występujące w takim rozwinięciu są wyrażeniami zbudowanymi z pól SM i ich pochodnych. Przy obecnej dokładności pomiarów i dla odpowiednio dużej skali mas

[1] To stwierdzenie zwykle opierane jest na pracach [3], jednak ostatnio ukazała się także publikacja [4], proponująca zgodne z wnioskami kosmologicznymi mechanizmy bariogenezy, oparte wyłącznie o łamanie symetrii CP w ramach SM.

[2] "Jeśli jedynym źródłem łamania zapachowych liczb leptonowych byłyby oscylacje lekkich neutrin, to procesy takie jak $\mu \to e\gamma$ miałyby nieobserwowalne prawdopodobieństwa." cytując publikację Particle Data Group [2].

[3] Nieco nieściśle, ale standardowo, stosować będziemy tu pojęcie "operatora" w stosunku do wielomianów pól modelu, po kwantyzacji stanowiących kombinacje operatorów działających na pewnej przestrzeni Hilberta.

usuniętych cząstek (małego parametru szeregu potęgowego), wyrazy $O\left(\frac{1}{\Lambda^3}\right)$ są na ogół zaniedbywalne.

Lagranżjan $\mathcal{L}_{SM}^{(4)}$ zawiera wszystkie dozwolone przez symetrię cechowania i Lorentza kombinacje pól wchodzących w jego skład o wymiarze masowym 4 ($\sim (GeV)^4$), które nie są pełną dywergencją, jak $\partial_\mu\left(\bar{\psi}\gamma^\mu\psi\right)$. Chcąc sklasyfikować możliwe operatory efektywne pojawiające się w równaniu (1.0.1), przeanalizować musimy wyrażenia o wymiarze masowym 5, jak i 6, gdyż dla większości pól niezmiennicze operatory pojawią się dopiero w drugim członie rozwinięcia. Interesująca jest lista operatorów, które nie są równoważne ze względu na klasyczne równania ruchu, wynikające z lagranżjanu Modelu Standardowego, w przeciwnym wypadku prowadziłyby bowiem do tych samych amplitud rozpraszania (odpowiednią argumentację znaleźć można w pracach [7] – [9]).

Taką klasyfikację zawiera praca W. Buchmüllera i D. Wylera "Effective lagrangian analysis of new interactions and flavour conservation" [1], jednak okazuje się, że podana tam lista operatorów jest zbyt obszerna - zawiera wyrażenia liniowo zależne (między innymi w świetle równań ruchu) od pozostałych. Co więcej, zależne operatory są wykorzystywane w wielu pracach zajmujących się efektywnymi teoriami pola, ostatnio np. w artykułach [10], [11], [12]. Uzyskanie minimalnej listy niezależnych operatorów jest więc bardzo ważne.

W niniejszej pracy wykażemy, że z listy niezależnych operatorów niezmienniczych usunąć można, między innymi, wszystkie wyrażenia zawierające pochodną kowariantną działającą na pole fermionowe. Dla kompletności klasyfikujemy wszystkie możliwe operatory, również te łamiące globalną liczbę barionową i/lub leptonową. Ostatecznie, jak wykażemy, po pełnej redukcji uzyskuje się 1 operator wymiaru 5, niezachowujący globalnej liczby leptonowej oraz 64 niezmiennicze wyrażenia wymiaru 6. Składa się na nie 15 niezależnych operatorów nie zawierających pól fermionowych, 19 niezależnych operatorów zawierających nie tylko pola fermionowe oraz 30 wyrażeń zbudowanych z czterech pól fermionowych, w tym 5 operatorów łamiących zasadę zachowania zapachowej liczby kwantowej barionów i/lub leptonów. Razem stanowi to bazę 59 operatorów zachowujących globalne liczby barionową i leptonową oraz 6 wyrażeń je zmieniających.

Praca ma następującą strukturę: w pierwszych rozdziałach opisane są podstawy analizy, czyli struktura Modelu Standardowego - obecne w nim pola i definiująca go gęstość funkcji Lagrange'a. W całej analizie korzystamy z udowonionego w Dodatku A faktu, iż dowolny niezmienniczy lagranżjan teorii pól z cechowaniem zapisany może być przy użyciu pól materii i tensorów pól cechowania oraz ich pochodnych kowariantnych - w kolejnym podrozdziale klasyfikujemy te obiekty ze względu na wymiar masowy. W następnym rozdziale przedstawiamy schemat wnioskowania, wedle którego postępujemy przy klasyfikacji wszystkich operatorów, kładąc nacisk na wykorzystanie ich algebraicznej klasyfikacji z punktu widzenia reprezentacji grup cechowania - tu podstawowym narzędziem jest rozkład iloczynów tensorowych tych reprezentacji na sumy proste reprezentacji nieprzywiedlnych.

Następnie przystąpimy do właściwej analizy, klasyfikując operatory niezmiennicze o wymiarach masowych 5 i 6, najpierw te złożone wyłącznie z pól bozonowych i ich pochodnych kowariantnych, dopełniając klasyfikację poprzez dodanie do rozważanych obiektów pól fermionowych i na zakończenie zajmując się operatorami zbudowanymi z czterech pól fermionowych. Kolejność analizy poszczególnych klas operatorów podyktowana jest przedstawionymi na Rys. 1 na s. 17 zależnościami pomiędzy operatorami, wynikającymi z równań ruchu SM. W ostatniej części pracy porównamy otrzymane wyniki z pracą [1] oraz podsumujemy przeprowadzone rozumowanie. W całości stosujemy konwencje, opisane w Dodatku B, wykorzystując też zebrane tam fakty. W Dodatku C zebrane zostały rachunki dowodzące niezmienniczości typowych wyrażeń wykorzystywanych w pracy ze względu na transformacje cechowania .

2 Struktura Modelu Standardowego

2.1 Pola Modelu Standardowego

W niniejszej pracy rozpatrujemy pola w sensie klasycznym, jako funkcje o wartościach zespolonych (pola spinorowe i skalarne pole Higgsa) i rzeczywistych (wektorowe pola cechowania), określone na czasoprzestrzeni Minkowskiego z metryką $\eta_{\mu\nu}$ o sygnaturze $(+---)$. Pola grupowane są w zestawy, w obrębie których mieszają je transformacje cechowania, zaś każde z osobna transformuje się wedle odpowiedniej reprezentacji grupy Poincaré. W niniejszej klasyfikacji oznaczenia oraz ogólny kierunek wnioskowania przejmujemy z pracy [1].

Model Standardowy zawiera następujące pola (indeksy i oraz a - słaby izospin i kolor - odpowiadają odpowiednio reprezentacjom fundamentalnym grup SU(2) i SU(3), I oraz A - reprezentacjom dołączonym tych grup, a p numeruje generacje fermionów nazywane zapachami):

Pola materii:

- lewoskrętne leptony: l^{ip}, $i = 1, 2$ (odpowiednio neutrino, naładowany lepton) $p = 1, 2, 3$
- prawoskrętne naładowane leptony: $e^p, p = 1, 2, 3$
- lewoskrętne kwarki: $q^{iap}, i = 1, 2$ (odpowiednio "górny","dolny"), $a = 1, 2, 3$ $p = 1, 2, 3$
- prawoskrętne kwarki: u^{ap}, d^{ap} (odpowiednio "górny","dolny"), $a = 1, 2, 3$ $p = 1, 2, 3$
- pola Higgsa: $\varphi^i, i = 1, 2$, ozn. $\tilde{\varphi} = \varepsilon\varphi^*$, skąd: $\tilde{\varphi}^\dagger = -\varphi^T\varepsilon$

  gdzie
  $$\varepsilon = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

Pola cechowania:

- gluony: G^A_μ $\quad A = 1..8$
- bozony W: W^I_μ $\quad I = 1..3$
- bozon B: B_μ

2.1.1 Transformacje cechowania

Na zdefiniowane powyżej pola działają transformacje cechowania, zdefiniowane jako reprezentacje grupy generowanej przez $\{T^A\}$ w następujący sposób:

$$\Phi \to \Phi' = e^{-ig\omega^A T^A}\Phi \tag{2.1.1}$$

gdzie g to odpowiednia stała sprzężenia, zaś ω^A to parametry transformacji.

Grupa cechowania Modelu Standardowego jest iloczynem prostym grup Liego $SU(3)\times SU(2)\times U(1)$, zaś jej reprezentacje są zewnętrznymi iloczynami tensorowymi reprezentacji tych grup. Działają one oddzielnie w odpowiadających im przestrzeniach multipletów pól, zatem w niniejszej analizie niezmienniczość ze względu na działanie poszczególnych grup rozważać będziemy jako zestaw niezależnych warunków.

Tabela 1 przedstawia strukturę cechowania pól Modelu Standardowego. Dla grup nieabelowych zaznaczono w niej wymiary reprezentacji wedle których transformują się pola, będące również ich konwencjonalnym oznaczeniem, zaś dla grupy U(1) - hiperładunki (dalej oznaczać będziemy ją jako $U(1)_Y$). Pola zespolenie sprzężone do danych transformują się według reprezentacji sprzężonych. Pola q, u, d, l, e występują w trzech generacjach (odpowiadający im indeks nie jest tu jawnie podany):

Pole	wymiar reprezentacji		hiperładunek
	$SU(3)$	$SU(2)$	$U(1)_Y$
G_μ	8	1	0
W_μ	1	3	0
B_μ	1	1	0
q	3	2	$\frac{1}{6}$
u	3	1	$\frac{2}{3}$
d	3	1	$-\frac{1}{3}$
l	1	2	$-\frac{1}{2}$
e	1	1	-1
φ	1	2	$\frac{1}{2}$

Tabela 1: Struktura reprezentacji grup cechowania Modelu Standardowego.

Niezmienniczy względem cechowania lagranżjan $\mathcal{L}_{SM}^{(4)}$ w równaniu (1.0.1) jest automatycznie niezmienniczy względem globalnych transformacji $U(1)_B$ i $U(1)_L$, których ładunki nazywamy odpowiednio liczbą barionową i leptonową. Liczby te przyporządkowane są następująco (pola zespolenie sprzężone mają przeciwne liczby kwantowe):

Liczba barionowa:

$$q, u, d : +\frac{1}{3}$$

$$q^*, u^*, d^* : -\tfrac{1}{3}$$

$$\text{pozostałe} : 0$$

Liczba leptonowa:

$$l, e : +1$$

$$l^*, e^* : -1$$

$$\text{pozostałe} : 0$$

W niniejszej pracy klasyfikujemy osobno operatory zachowujące bądź łamiące te liczby. Wyrażeniami zachowującymi tylko liczbę barionową i leptonową lecz łamiącymi zapach mogą być w ogólności wszystkie operatory zawierające pola fermionowe - na ich niezmienniczość względem transformacji cechowania i Lorentza nie ma wpływu wybór zapachu poszczególnych pól. Obiekty te są łatwe do zidentyfikowania bez dodatkowych oznaczeń. Niektóre z nich są jednak różne od zera lub niezależne od innych tylko, gdy składające się na nie pola należą do różnych generacji, jak np. $(\bar{q}^i_{p_1} u_{p2})\varepsilon^{ij}(\bar{q}^j_{p_3} d_{p_4})$. W takim wypadku jawnie wypiszemy indeksy generacji wszystkich fermionów w danym wyrażeniu, które mogą przyjąć w ogólności dowolne wartości, choć do nieznikania wyrażenia potrzeba zwykle, by odpowiednie dwa pola należały co najmniej do dwóch różnych generacji. Operatory łamiące globalne liczby barionową i/lub leptonową opiszemy wyraźnie zaznaczając to w tekście.

Pochodna kowariantna w działaniu na pole materii ma ogólną postać

$$D_\mu = \partial_\mu + i g_s T^A G^A_\mu + i g S^I W^I_\mu + i g' Y \tag{2.1.2}$$

gdzie $T^A \equiv \frac{\lambda^A}{2}$ to generator reprezentacji grupy SU(3), $S^I \equiv \frac{\tau^I}{2}$ to generator reprezentacji grupy SU(2), a Y oznacza hiperładunek pola, na które działa pochodna.

Tensory pól cechowania Modelu Standardowego w stosowanej przez nas konwencji (por. Dodatek B) dane są przez komutator pochodnych kowariantnych i przyjmują następującą postać:

- dla $SU(3)$

$$G^A_{\mu\nu} = \partial_\mu G^A_\nu - \partial_\nu G^A_\mu - g_s f^{ABC} G^B_\mu G^C_\nu \tag{2.1.3}$$

- dla $SU(2)$

$$W^I_{\mu\nu} = \partial_\mu W^I_\nu - \partial_\nu W^I_\mu - g \varepsilon^{IJK} W^J_\mu W^K_\nu \tag{2.1.4}$$

- dla $U(1)_Y$

$$B_{\mu\nu} = \partial_\mu B_\nu - \partial_\nu B_\mu \tag{2.1.5}$$

2.1.2 Transformacje Lorentza

Lagranżjan Modelu Standardowego jest niezmienniczy względem transformacji grupy $SL(2,\mathbb{C})$ będącej podwójnym nakryciem grupy właściwych i ortochronicznych transformacji Lorentza $L_{\uparrow}^{+}$. Odpowiednie transformacje pól mają schematycznie postać

$$\Phi(x) \to O(g)\Phi\left(\Lambda(g)^{-1}x\right),$$

gdzie $g \in SL(2,\mathbb{C})$, $\Lambda(g) \in L_{\uparrow}^{+}$, a $O(g)$ dane jest przez pewną nieprzywiedlną reprezentację $SL(2,\mathbb{C})$. Można zatem sklasyfikować pola i inne tensory lorentzowskie ze względu na przynależność do odpowiedniej reprezentacji tej ostatniej grupy, generowanej przez reprezentacje algebry Liego $sl(2,\mathbb{C})$. Każda z tych reprezentacji może zostać jednoznacznie zidentyfikowana przez podanie dwóch liczb (P,Q), będących wielokrotnościami $\frac{1}{2}$.

Poniższa tabela klasyfikuje pola, pochodne kowariantne i tensory pól cechowania w Modelu Standardowym ze względu na przynależność do odpowiednich reprezentacji $sl(2,\mathbb{C})$.

Tabela 2: Struktura lorentzowska Modelu Standardowego

Wyrażenie	wektor	tensor	spinor Weyla	
	V_μ	$X_{\mu\nu}$	lewoskrętny Ψ_L^W	prawoskrętny Ψ_R^W
Reprezentacja	$(\frac{1}{2},\frac{1}{2})$	$(1,0)\oplus(0,1)$	$(\frac{1}{2},0)$	$(0,\frac{1}{2})$
Obiekt	$G_\mu^A, W_\mu^I, B_\mu, D_\mu$	$W_{\mu\nu}, G_{\mu\nu}, B_{\mu\nu}$	q, l	u, d, e

Pola sprzężone do pól o danej skrętności transformują się równoważnie względem pól o przeciwnej skrętności, co wykorzystamy w analizie operatorów z uwagi na reprezentacje grupy Lorentza, zakładając, że ψ_R^* transformuje się wedle $(\frac{1}{2},0)$, zaś ψ_L^* według $(0,\frac{1}{2})$

O ile wnioskowanie przy klasyfikacji niezmienników grupowych przeprowadzimy dla spinorów Weyla ψ^W, to (z racji zwykle przyjmowanych konwencji) do samego ich zapisu stosować będziemy czterowymiarowe bispinory Diraca ψ. W reprezentacji chiralnej wzajemnie tłumaczy się je w tych językach następująco:

$$\psi_{L\alpha} := \begin{pmatrix} \psi_{L\alpha}^W \\ 0 \end{pmatrix} \tag{2.1.1}$$

$$\psi_{R\alpha} := \begin{pmatrix} 0 \\ \epsilon\psi_R^W \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \psi_R^{W\dot{\alpha}} \end{pmatrix} \tag{2.1.2}$$

$$\text{gdzie} \quad \epsilon = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \tag{2.1.3}$$

zaś macierze Diraca γ^μ wyrażają się poprzez macierze Pauliego σ^k, $k = 1..3$, uzupełnione macierzą jednostkową $\sigma^0 = I_2$:

$$\gamma^0 = \begin{pmatrix} 0 & I_2 \\ I_2 & 0 \end{pmatrix} \qquad \gamma^k = \begin{pmatrix} 0 & \sigma^k \\ -\sigma^k & 0 \end{pmatrix} \tag{2.1.4}$$

W tej reprezentacji macierz γ_5 ma następującą postać:

$$\gamma_5 = \begin{pmatrix} -I_2 & 0 \\ 0 & I_2 \end{pmatrix} \tag{2.1.5}$$

By nie wypisywać jawnie indeksów spinorowych, przyjrzyjmy się dokładniej niezmiennikom działania grupy $SL(2,\mathbb{C})$ (wyprowadzonym np. w książce [14], do której dopasowujemy również notację, w której $\epsilon_{\alpha\beta} = \epsilon^{\alpha\beta} = \epsilon^{\dot{\alpha}\dot{\beta}} = \epsilon_{\dot{\alpha}\dot{\beta}}$). Poniższe oznaczenia niezmienników i wektorów zaczerpnięte zostały z książki [15] i są zgodne z tymi wykorzystanymi w pracy [1] (stosuje się w niej co prawda inne definicje wspomnianych macierzy ϵ dla spinorów lewo- i prawoskrętnych, ale ostateczną symbolikę można uzgodnić, jak poniżej). Zwróćmy uwagę, że oznaczenia te są nietrywialne, to znaczy nie są konsystentne z zapisem macierzowym, co widoczne jest w porównaniu zapisu singletów i wektorów lorentzowskich. Powinny być raczej interpretowane jako zapis takiego zwężenia indeksów występujących obiektów, że cały iloczyn transformuje się wedle odpowiedniej reprezentacji grupy Lorentza. Pierwsze wyrażenia w wierszach poniżej zapisane są w intuicyjnej konwencji macierzowej $u^T M v = u_\alpha M_{\alpha\beta} v_\beta$.

Singlety:

$$(\psi^W_{L/R})^T \epsilon \psi'^W_{L/R} = (\psi^W_{L/R})_\alpha (\psi'^W_{L/R})^\alpha =: \psi^T_{L/R}\psi'_{L/R} \tag{2.1.6}$$

$$\psi^{W\dagger}_{L/R} \epsilon \psi'^W_{R/L} =: \bar{\psi}_{L/R}\psi'_{R/L} \tag{2.1.7}$$

Wektory:

$$(\psi^W_{R/L})^T \epsilon^T \sigma^\mu \epsilon \psi'^W_{L/R} = (\psi^W_{R/L})^\alpha \sigma^\mu_{\alpha\dot{\beta}} (\psi'^W_{L/R})^{\dot{\beta}} =: \psi^T_{R/L}\gamma^\mu \psi_{L/R} \tag{2.1.8}$$

$$\psi^{W\dagger}_{L/R} \epsilon^T \sigma^\mu \epsilon \psi'^W_{L/R} = (\psi^{W\dagger}_{L/R})^\alpha \sigma^\mu_{\alpha\dot{\beta}} (\psi'^W_{L/R})^{\dot{\beta}} =: \bar{\psi}_{L/R}\gamma^\mu \psi'_{L/R} \tag{2.1.9}$$

Tensory 2-go rzędu:

$$(\psi^W_{L/R})^T \epsilon^T \sigma^{\mu\nu} \epsilon \psi'^W_{L/R} = (\psi^W_{L/R})^\alpha \sigma^{\mu\nu}_{\alpha\beta} (\psi'^W_{L/R})^\beta =: \psi^T_{L/R}\psi'_{L/R} \tag{2.1.10}$$

$$\psi^{W\dagger}_{R/L} \epsilon^T \sigma^{\mu\nu} \epsilon \psi'^W_{L/R} = (\psi^{W\dagger}_{R/L})^\alpha \sigma^{\mu\nu}_{\alpha\beta} (\psi'^W_{L/R})^\beta =: \bar{\psi}_{R/L}\psi'_{L/R} \tag{2.1.11}$$

2.2 Gęstość funkcji Lagrange'a i równania ruchu

Gęstość lagranżjanu Modelu Standardowego w funkcji uprzednio zdefiniowanych pól ma postać (przed spontanicznym złamaniem symetrii elektrosłabej):

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_0 = &-\tfrac{1}{4} G^A_{\mu\nu} G^{A\mu\nu} - \tfrac{1}{4} W^I_{\mu\nu} W^{I\mu\nu} - \tfrac{1}{4} B_{\mu\nu} B^{\mu\nu} \\ &+ (D_\mu \varphi)^\dagger (D^\mu \varphi) + m^2 \varphi^\dagger \varphi - \tfrac{1}{2}\lambda (\varphi^\dagger \varphi)^2 \\ &+ i\bar{l}\, \not{D} l + i\bar{e}\, \not{D} e + i\bar{q}\, \not{D} q + i\bar{u}\, \not{D} u + i\bar{d}\, \not{D} d + \\ &- [(\bar{l}\Gamma_e e)\varphi + (\bar{q}\Gamma_u u)\tilde{\varphi} + (\bar{q}\Gamma_d d)\varphi + h.c.] \end{aligned} \tag{2.2.1}$$

gdzie Γ to macierze stałych Yukawy w przestrzeni zapachu. Wyrażenia $i\bar{\psi}\, \not{D}\psi$ są w niej proporcjonalne do macierzy jednostkowej, co osiągamy poprzez redefinicję pól rząd po rzędzie w rachunku zaburzeń. W równaniu (2.2.1) pominęlismy wyraz $\theta_{\mathrm{QCD}} G^A_{\mu\nu} \widetilde{G}^{A\mu\nu}$

będacy pełną dywergencją obiektu zależnego od cechowania. Wyraz ten może mieć znaczenie fizyczne w zależności od topologii czasoprzestrzeni.

Klasyczne równania Eulera - Lagrange'a mają postać:

$$\bar{l}_i: \quad i\not{D}l_i - \Gamma_e e\varphi_i = 0 \tag{2.2.2}$$

$$\bar{e}: \quad i\not{D}e - \Gamma_e^\dagger \varphi^\dagger l = 0 \tag{2.2.3}$$

$$\bar{q}_i^\alpha: \quad i\not{D}q_i^\alpha - \Gamma_u u^\alpha(\tilde{\varphi}) - \Gamma_d d^\alpha \varphi_i = 0 \tag{2.2.4}$$

$$\bar{u}^\alpha: \quad i\not{D}u^\alpha - \Gamma_u^\dagger q^\alpha \tilde{\varphi} = 0 \tag{2.2.5}$$

$$\bar{d}^\alpha: \quad i\not{D}d^\alpha - \Gamma_d^\dagger \varphi^\dagger q^\alpha = 0 \tag{2.2.6}$$

$$\varphi_i^*: \quad -(D_\mu D^\mu \varphi)_i + m^2\varphi_i - \lambda\varphi_i(\varphi^\dagger\varphi) - \Gamma_e^\dagger l_i\bar{e} - \Gamma_u \bar{q}_j u\varepsilon_{ji} - \Gamma_d^\dagger q_i\bar{d} = 0 \tag{2.2.7}$$

$$B_\mu: \partial_\mu B^{\mu\nu} + g'(\tfrac{1}{2}\bar{l}\gamma^\mu l + \bar{e}\gamma^\mu e - \tfrac{1}{6}\bar{q}\gamma^\mu q - \tfrac{2}{3}\bar{u}\gamma^\mu u + \tfrac{1}{3}\bar{d}\gamma^\mu d - \tfrac{i}{2}\varphi^\dagger \overleftrightarrow{D}^\mu \varphi) = 0 \tag{2.2.8}$$

$$W_\mu^I: (D_\nu W^{\nu\mu})^I - \tfrac{1}{2}g(i\varphi^\dagger \overleftrightarrow{D} \tau^I\varphi + \bar{l}\gamma^\mu\tau^I l + \bar{q}\gamma^\mu\tau^I q) = 0 \tag{2.2.9}$$

$$G_\mu^A: (D_\nu G^{\nu\mu})^A - \tfrac{1}{2}g_s(\bar{q}\gamma^\mu\lambda^A q + \bar{u}\gamma^\mu\lambda^A u + \bar{d}\gamma^\mu\lambda^A d) = 0 \tag{2.2.10}$$

2.3 Fundamentalne obiekty używane do konstrukcji operatorów wyższych rzędów

W niniejszej pracy rozważane są wyrażenia o wymiarze masowym 5 i 6 tzn. $\sim (GeV)^5$ i $\sim (GeV)^6$, mogące pojawić się w teoriach efektywnych oddziaływań pomiędzy polami Modelu Standardowego. Muszą one zachowywać jego symetrie (cechowania i lorentzowską), a zatem są wielomianami jednorodnymi pól materii Modelu Standardowego, tensorów pól cechowania i ich pochodnych kowariantnych. Wybór takiej postaci dopuszczalnych wyrażeń uzasadniony został w Dodatku A. Wyrażenia te nazywać będziemy operatorami, gdyż po kwantyzacji teorii są one kombinacjami liniowymi operatorów działających na przestrzeni Hilberta stanów kwantowych układu. Tabela 1 zawiera listę obiektów z których budować będziemy niezmiennicze wielomiany jednorodne, zestawiając ich wymiary.

Rodzaj	wektor V_μ	tensor $X_{\mu\nu}$	spinor Ψ	skalar φ
Wymiar	$(GeV)^1$	$(GeV)^2$	$(GeV)^{\frac{3}{2}}$	$(GeV)^1$
Obiekt	D_μ	$F_{\mu\nu}, G_{\mu\nu}, B_{\mu\nu}$	q, l, u, d, e	φ

Tabela 3: Wymiary pól w jednostkach $\hbar$=c=1.

W zapisie wszystkich równości staramy się nie wypisywać jawnie możliwie wielu indeksów po których ma miejsce sumowanie, w szczególności nigdy nie podajemy sumowania po indeksach spinorowych (s i s' w poniższym przykładzie):

$$(\varphi^\dagger l)\gamma^\mu(\bar{l}D_\mu\varphi) \equiv \varphi^{*I} l_s^i \gamma_{ss'}^\mu \bar{l}_{s'}^j (D_\mu\varphi)^j$$

Podobnie nie umieszczamy indeksów odpowiadających kolorowi i izospinowi w reprezentacji fundamentalnej, gdyż sumowanie jest zwykle naturalne:

$$\bar{u}\sigma^{\mu\nu}(\tilde{\varphi}^\dagger\tau^I q)W^I_{\mu\nu} \equiv \bar{u}^\alpha_s\sigma^{\mu\nu}_{ss'}(\varphi^T_i\varepsilon_{ji}\tau^I_{jk}q^\alpha_{s'k})W^I_{\mu\nu}$$

Tylko tam gdzie nie da się ująć wszystkich iloczynów w postaci iloczynów wektorów i macierzy, odpowiednie indeksy wypiszemy jawnie.

Wyrażenia zespolenie sprzężone do rozważanych operatorów również spełniają wymagane symetrie, gdyż reprezentacja jednowymiarowa zawsze jest rzeczywista. Wypisywać będziemy tylko jeden spośród wzajemnie sprzężonej pary dopuszczalnych operatorów.

3 Schemat wnioskowania

Transformacje cechowania i Lorentza nie mieszają pól materii z tensorami pól cechowania i nie zmieniają rzędu i położenia pochodnych kowariantnych, więc zachowują rząd wielomianu jednorodnego w każdym z wymienionych obiektów. Możemy zatem rozpatrywać niezmienniczość każdego operatora względem tych przekształceń niezależnie.

Wszystkie klasyfikacje prezentowane w dalszej części pracy przebiegają według schematu:

1. Analiza wymiarowa prowadząca do określenia, jakie obiekty mogą składać się na operator o danym wymiarze.

2. Narzucenie symetrii ze względu na transformacje cechowania.

   Rozkłady iloczynów tensorowych reprezentacji określają, ile niezmienniczych i nierównoważnych kombinacji elementów multipletów pól można stworzyć (szczegółowa analiza zawarta jest w podrozdziale 3.1). Zwróćmy uwagę, iż na tym etapie liczba singletów w rozkładzie iloczynu tensorowego reprezentacji jest liczbą liniowo niezależnych kombinacji składowych pól w przypadku, gdy pola występujące w iloczynie (już albo sprzężone albo nie) są różne. W przypadku niektórych operatorów efektywnych może tak nie być i okaże się, że niezależnych wyrażeń jest mniej. Przez liniową niezależność rozumiemy przy tym niezależność w sensie funkcji:
   operatory $A_i : \mathbb{M} \to \mathbb{C}, i \in I$ ($\mathbb{M}$-przestrzeń Minkowskiego) są liniowo niezależne
   $\Leftrightarrow \left[(\forall_{x\in V} \sum_{i\in I}\zeta_i A_i(x) = 0, \zeta_i \in \mathbb{C}) \Rightarrow (\forall_{i\in I}\zeta_i = 0)\right]$.

3. Podanie bazy kombinacji pól rozpinającej przestrzeń wyrażeń niezmienniczych względem transformacji cechowania, odpowiadającą singletom w rozkładach odpowiednich iloczynów tensorowych. Zaznaczona w rozkładach liczba singletów określa wymiar tej przestrzeni.

4. Narzucenie niezmienniczości względem działania grupy Lorentza.

   Przeprowadzimy je na dwa sposoby. W przypadku konstruowania wyrażeń zawierających wyłącznie skalary i wektory lorentzowskie oprzemy się na twierdzeniu, iż jedynymi niezmienniczymi tensorami lorentzowskimi są tensor metryczny $\eta_{\mu\nu}$ oraz całkowicie antysymetryczny symbol Levi-Civity w 4 wymiarach $\epsilon_{\mu\nu\rho\sigma}$. Wszystkie składowe lorentzowskie pól muszą być zatem zwężone poprzez η bądź ϵ.

W przypadku operatorów zawierających pola fermionowe, dla których wspomniany fakt nie ma zastosowania, dokonamy analizy w pełni analogicznej do kroku przeprowadzonego dla grup cechowania, to znaczy przeanalizujemy iloczyny tensorowe odpowiednich reprezentacji właściwej grupy Lorentza.

5. Redukcja zbioru operatorów w oparciu o ich własności algebraiczne.

   Dokonamy go z uwagi na samą strukturę obiektów, taką jak antysymetria tensorów pól cechowania: $X_{\mu\nu} = -X_{\nu\mu}$ czy inne własności, jak tożsamość Bianchi.

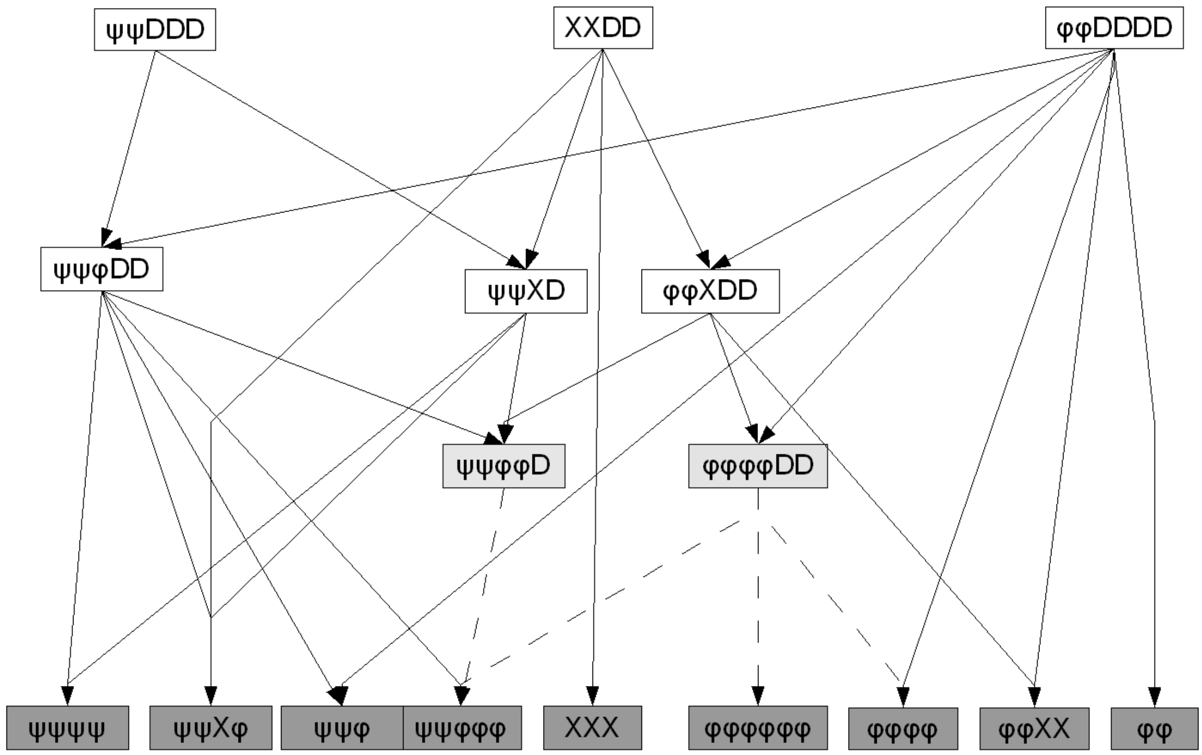
6. Wyodrębnienie minimalnego zbioru liniowo niezależnych operatorów przy pomocy równań ruchu Modelu Standardowego.

Klasyfikację przeprowadzimy po kolei dla każdej klasy operatorów zbudowanych z zestawu obiektów określonego rodzaju. W tekście klasy operatorów oznaczać będziemy za pomocą wziętych w ramki zestawów symboli φ, ψ, X, D, reprezentujących fundamentalne obiekty zebrane w Tabeli 3. Wraz z kolejnymi szczeblami analizy do zapisu poszczególnych operatorów niezmienniczych dodawać będziemy kolejne elementy ich struktury. I tak np. na etapie klasyfikacji niezmienników transformacji cechowania często nieistotna będzie struktura lorentzowska, tzn. taką analizę przeprowadzić możemy dla każdej składowej lorentzowskiej z osobna. Nieistotnej w danym momencie struktury nie będziemy odwzorowywać - np. przez $(q^\dagger q)e^* e$ oznaczymy niezmienniczy ze względu na transformacje cechowania operator o tym składzie pól.

W redukcji operatorów za pomocą równań ruchu i pomijania pełnej dywergencji pól będziemy starać się usunąć operatory zawierające pochodne, wykazując zależność kolejnych klas wyrażeń od innych wedle schematu na Rys.1. Nie scharakteryzujemy zależności konkretnych operatorów od pozostałych, pozostając na poziomie ogólności klas.

3.1 Rozkład iloczynów tensorowych reprezentacji grup Liego

Klasyfikacja wielomianów jednorodnych niezmienniczych ze względu na transformacje cechowania oparta zostanie o rozkład iloczynów tensorowych reprezentacji grup cechowania na sumę prosta reprezentacji nieprzywiedlnych. Odwoływać będziemy się do rozkładów algebr Liego grup cechowania, generujących reprezentacje grup. Określają one analogiczny rozkład indukowanych przez nie reprezentacji grup Liego. Poniżej podane są występujące w analizie iloczyny tensorowe (w większości zaczerpnięte z pracy [13])- reprezentacje identyfikujemy wyłącznie poprzez ich wymiar $\hat{D}$ oraz ewentualnie sprzężenie zespolone reprezentacji o identycznych wymiarach. Interesować będzie nas jedynie czy rozkład zawiera reprezentację trywialną (jednowymiarową). Poprzez $\hat{\bar{D}}$ oznaczono reprezentację sprzężoną a zapis $n \cdot \hat{D}$ oznacza n-krotne wystąpienie reprezentacji $\hat{D}$ w sumie prostej.



Rysunek 1: Schemat redukcji operatorów. Szarym tłem wyróżniono klasy zawierające niezależne operatory. Przerywane linie to ślady po usunięciu tylko części spośród operatorów danej klasy.

- Reprezentacje su(2):

$$\hat{2} \otimes \hat{2} = \hat{1} \oplus \hat{3} \tag{3.1.1}$$
$$\hat{2} \otimes \hat{3} = \hat{2} \oplus \hat{4} \tag{3.1.2}$$
$$\hat{2} \otimes \hat{4} = \hat{3} \oplus \hat{5} \tag{3.1.3}$$
$$\hat{3} \otimes \hat{3} = \hat{1} \oplus \hat{3} \oplus \hat{5} \tag{3.1.4}$$
$$\hat{2} \otimes \hat{2} \otimes \hat{2} = 2 \cdot \hat{2} \oplus \hat{4} \tag{3.1.5}$$
$$\hat{2} \otimes \hat{2} \otimes \hat{3} = \hat{1} \oplus 2 \cdot \hat{3} \oplus 5 \tag{3.1.6}$$
$$\hat{2} \otimes \hat{2} \otimes \hat{2} \otimes \hat{2} = 2 \cdot \hat{1} \oplus 3 \cdot \hat{3} \oplus \hat{5} \tag{3.1.7}$$
$$\hat{2} \otimes \hat{2} \otimes \hat{2} \otimes \hat{3} = 3 \cdot \hat{2} \oplus 3 \cdot \hat{4} \oplus 6 \tag{3.1.8}$$
$$\hat{2} \otimes \hat{2} \otimes \hat{3} \otimes \hat{3} = 2 \cdot \hat{1} \oplus 3 \cdot \hat{3} \oplus 3 \cdot \hat{5} \oplus \hat{7} \tag{3.1.9}$$
$$\hat{2} \otimes \hat{2} \otimes \hat{2} \otimes \hat{2} \otimes \hat{2} = 5 \cdot \hat{2} \oplus 4 \cdot \hat{4} \oplus \hat{6} \tag{3.1.10}$$
$$\hat{3} \otimes \hat{3} \otimes \hat{3} = \hat{1} \oplus 3 \cdot \hat{3} \oplus 2 \cdot \hat{5} \oplus \hat{7} \tag{3.1.11}$$
$$\hat{2} \otimes \hat{2} \otimes \hat{2} \otimes \hat{2} \otimes \hat{2} \otimes \hat{2} = 5 \cdot \hat{1} \oplus 9 \cdot \hat{3} \oplus 5 \cdot \hat{5} \oplus \hat{7} \tag{3.1.12}$$

- Reprezentacje su(3):

$$\hat{3} \otimes \hat{3} = \hat{\bar{3}} \oplus \hat{6} \tag{3.1.13}$$

$$\hat{3} \otimes \hat{\bar{3}} = \hat{1} \oplus \hat{8} \tag{3.1.14}$$

$$\hat{3} \otimes \hat{6} = \hat{8} \oplus \hat{10} \tag{3.1.15}$$

$$\hat{\bar{3}} \otimes \hat{6} = \hat{3} \oplus \hat{15} \tag{3.1.16}$$

$$\hat{3} \otimes \hat{8} = \hat{3} \oplus \hat{\bar{6}} \oplus \hat{15} \tag{3.1.17}$$

$$\hat{6} \otimes \hat{6} = \hat{\bar{6}} \oplus 2 \cdot \hat{15} \tag{3.1.18}$$

$$\hat{6} \otimes \hat{\bar{6}} = \hat{1} \oplus \hat{8} \oplus \hat{27} \tag{3.1.19}$$

$$\hat{8} \otimes \hat{8} = \hat{1} \oplus 2 \cdot \hat{8} \oplus \hat{10} \oplus \hat{\bar{10}} \oplus \hat{27} \tag{3.1.20}$$

$$\hat{8} \otimes \hat{8} \otimes \hat{8} = 2 \cdot \hat{1} \oplus 8 \cdot \hat{8} \oplus 4 \cdot 10 \oplus 4 \cdot \hat{\bar{10}} \oplus 4 \cdot 27 \oplus \hat{\bar{27}} \oplus 3 \cdot \hat{35} \oplus \hat{64} \tag{3.1.21}$$

$$\hat{3} \otimes \hat{3} \otimes \hat{3} = \hat{1} \oplus 2 \cdot \hat{8} \oplus \hat{10} \tag{3.1.22}$$

$$\hat{3} \otimes \hat{3} \otimes \bar{3} = 2 \cdot \hat{3} \oplus \hat{\bar{6}} \oplus \hat{15} \tag{3.1.23}$$

$$\hat{3} \otimes \hat{3} \otimes 8 = 2 \cdot \hat{\bar{3}} \oplus 2 \cdot 6 \oplus 2 \cdot \hat{\bar{15}} \oplus \hat{\bar{24}} \tag{3.1.24}$$

$$\hat{3} \otimes \hat{\bar{3}} \otimes \hat{8} = \hat{1} \oplus 3 \cdot \hat{8} \oplus \hat{10} \oplus \hat{\bar{10}} \oplus \hat{27} \tag{3.1.25}$$

$$\hat{3} \otimes \hat{3} \otimes \hat{3} \otimes \hat{3} = 2 \cdot \hat{3} \oplus 2 \cdot \hat{\bar{6}} \oplus 3 \cdot \hat{15} \tag{3.1.26}$$

$$\hat{3} \otimes \hat{3} \otimes \hat{3} \otimes \hat{\bar{3}} = 3 \cdot \hat{\bar{3}} \oplus 3 \cdot \hat{6} \oplus \hat{15} \oplus \hat{\bar{15}} \oplus \hat{24} \tag{3.1.27}$$

$$\hat{3} \otimes \hat{3} \otimes \hat{\bar{3}} \otimes \hat{\bar{3}} = 2 \cdot \hat{1} \oplus 4 \cdot \hat{8} \oplus \hat{10} \oplus \hat{\bar{10}} \oplus \hat{27} \tag{3.1.28}$$

$$\tag{3.1.29}$$

- Reprezentacje U(1)
  Grupa jest abelowa, więc wszystkie reprezentacje nieprzywiedlne są jednowymiarowe (lemat Schura). W istocie ich działanie polega na mnożeniu przez $e^{-ig'Y}$, więc niezmiennikami tej transformacji są jedynie kombinacje pól, których hiperładunki sumują się do 0 (hiperładunki pól sprzężonych wchodzą do sumy ze znakiem minus, gdyż transformacja cechowania przeprowadza Φ^* na $\Phi'^* = e^{+ig'Y}$).

- Reprezentacje grupy Lorentza
  Jak zostało to streszczone w rozdziale 2.1.2, każda z tych reprezentacji może zostać jednoznacznie zidentyfikowana przez podanie dwóch liczb (P, Q), zaś iloczyn tensorowy dwóch reprezentacji rozkłada się wedle wzoru:

$$(P, Q) \otimes (P', Q') = \sum_{\substack{|P-P'| \leqslant p \leqslant P+P' \\ |Q-Q'| \leqslant q \leqslant Q+Q'}} (p, q) \tag{3.1.30}$$

  Wyrażenia niezmiennicze transformują się wedle reprezentacji $(0, 0)$.

4 Niezmiennicze operatory zawierające wyłącznie pola bozonowe

W niniejszym rozdziale przeanalizujemy wielomiany jednorodne nie zawierające pól spinorowych, tj. zbudowane z pól skalarnych, tensorów pól cechowania oraz pochodnych kowariantnych. Wnioskowanie zostanie przeprowadzone po kolei dla każdego wymiaru jednomianów.

4.1 Operatory nie zawierające pochodnych kowariantnych.

Do osiągnięcia wymiaru 5 konieczna byłaby nieparzysta liczba skalarów Higgsa ($[X_{\mu\nu}] = (GeV)^2$), czego jednak wzbrania symetria $U(1)_Y$: $\sum_{i=1..2n+1}(\pm\frac{1}{2}) \neq 0$
Z analizy wymiarowej wynika, że wśród operatorów wymiaru 6, nie zawierających pochodnych kowariantnych ani pól fermionowych, dopuszczalne są tylko wyrażenia postaci φ^6, $\varphi^4 X$, $\varphi^2 X^2$ lub X^3, gdzie X=G, W, B.

4.1.1 Operatory postaci $\boxed{\varphi^6}$

W tej klasie występuje jeden niezależny niezmienniczy operator.

Z zachowania symetrii $U(1)_Y$ wynika, iż szukane wyrażenie musi być kombinacją 3 pól φ i trzech pól zespolenie do nich sprzężonych. Warunek zachowania symetrii lorentzowskiej spełniony jest trywialnie, jako że wszystkie występujące obiekty są relatywistycznymi skalarami. Mamy tu do czynienia z iloczynem reprezentacji równoważnych (skończenie wymiarowe reprezentacje SU(2) są rzeczywiste) z równania (3.1.12). W jego rozkładzie na sumę prostą reprezentacji nieprzywiedlnych występuje 5 reprezentacji trywialnych, czyli istnieje 5-cio wymiarowa podprzestrzen niezmiennicza kombinacji skladowych sześciu pól φ. Jeśli rozważymy wyrażenia postaci (na razie zakładając, że mamy do dyspozycji sześć różnych pól φ)

$$(\varphi^\dagger_{(i)}\varphi_1)(\varphi^\dagger_{(ii)}\varphi_2)(\varphi^\dagger_{(iii)}\varphi_3) \tag{4.1.1}$$

to okaże się, że dokładnie 5 powyższych iloczynów (spośród 6 różniących się przyporządkowaniem pól do mnożonych przez siebie par, w których zawsze mnożymy pole sprzężone z niesprzężonym) jest liniowo niezależnych.[4] Ponieważ są one niezmiennikami transformacji cechowania (co analizujemy w Dodatku C), muszą jednocześnie stanowić bazę wszystkich wyrażeń o tej własności.

W Modelu Standardowym występuje jednak jeden dublet pól Higgsa φ, wszystkie operatory postaci (4.1.1) są zatem równe

$$(\varphi^\dagger\varphi)^3 \tag{4.1.2}$$

[4]Stanowi o tym tożsamość

$$\delta_{aA}\delta_{bB}\delta_{cC} + \delta_{aB}\delta_{bC}\delta_{cA} + \delta_{aC}\delta_{bA}\delta_{cB} - \delta_{aA}\delta_{bC}\delta_{cB} - \delta_{aB}\delta_{bA}\delta_{cC} - \delta_{aC}\delta_{bB}\delta_{cA} = 0$$

Niezależność dowolnych 5 wyrażeń omawianej postaci widać po zapisaniu wszystkich iloczynów za pomocą zwężeń niezależnych składowych multipletów.

4.1.2 Operatory postaci $\boxed{\varphi^4 X}$

Wyrażenia te nie mogą być niezmiennicze ze względu na transformacje Lorentza, gdyż pola φ są singletami tych transformacji, zaś pola X nie.

4.1.3 Operatory postaci $\boxed{\varphi\varphi XX}$

Wśród operatorów tej klasy występować będą po dwa niezależne wyrażenia.

Warunek zachowania symetrii Lorentza dopuszcza zwężenie czterech występujących indeksów za pomocą dwóch tensorów metrycznych lub $\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma}$, zatem operatory tej klasy będą miały postać:

$$\varphi\varphi X_{\mu\nu}X^{\mu\nu} \tag{4.1.3}$$

$$\varphi\varphi X_{\mu\nu}\widetilde{X}^{\mu\nu} \tag{4.1.4}$$

1. $\boxed{\varphi\varphi GG}$

   Analiza symetrii SU(3) (3.1.20) pozostawia 1 liniowo niezależny singlet. Podobnie, w iloczynie $\hat{2}\otimes\hat{2}$ reprezentacji grupy SU(2) występuje jedna niezmiennicza kombinacja składowych multipletów pól. Symetria $U(1)_Y$ wymaga, by pola φ były wzajemnie sprzężone, zatem szukany operator będzie miał w tej klasie postać $(\varphi^\dagger\varphi)GG$.

   Znajdźmy niezmiennik zbudowany z dowolnych dwóch tensorów tego samego pola cechowania - transformujących się według reprezentacji dołączonej odpowiedniej grupy. Jawna postać transformacji cechowania obiektu $\mathcal{X}_{\mu\nu} = X^A_{\mu\nu}T^A$ jest następująca

$$\mathcal{X}_{\mu\nu} \overset{\Phi\to U\Phi}{\to} U\mathcal{X}_{\mu\nu}U^{-1} \tag{4.1.5}$$

   czyli

$$Tr[\mathcal{X}_{\mu\nu}\mathcal{X}'_{\rho\sigma}] \to Tr[U\mathcal{X}_{\mu\nu}U^{-1}U\mathcal{X}'_{\rho\sigma}U^{-1}] = Tr[\mathcal{X}_{\mu\nu}\mathcal{X}'_{\rho\sigma}] \tag{4.1.6}$$

   Zatem jedyne singlety muszą być postaci (pomijając indeksy lorentzowskie):

$$Tr[X^AT^AX^{A'}T^{A'}] = X^AX^A \tag{4.1.7}$$

   Niezmienniczość takich wyrażeń alternatywnie wykazać można też bezpośrednim rachunkiem, analogicznie jak w przypadku operatorów sklasyfikowanych w Dodatku C.

   Ostatecznie występują w tej klasie dwa następujące singlety:

$$(\varphi^\dagger\varphi)G^A_{\mu\nu}G^{A\mu\nu} \tag{4.1.8}$$

$$(\varphi^\dagger\varphi)G^A_{\mu\nu}\widetilde{G}^{A\mu\nu} \tag{4.1.9}$$

2. $\boxed{\varphi\varphi BB}$

Jak wynika z poprzedzającej analizy, występują tu dwa niezależne operatory niezmiennicze:

$$(\varphi^\dagger\varphi)B_{\mu\nu}B^{\mu\nu} \tag{4.1.10}$$
$$(\varphi^\dagger\varphi)B_{\mu\nu}\widetilde{B}^{\mu\nu} \tag{4.1.11}$$

3. $\boxed{\varphi\varphi WB}$

Symetria SU(2) (3.1.6) pozwala na istnienie 1 liniowo niezależnego singletu, np. postaci: $(\varphi^\dagger\mathcal{W}\varphi)B$. Jego niezmienniczość sprawdzić można wprost w transformacji cechowania:

$$\varphi^\dagger\mathcal{W}\varphi \to \varphi^\dagger U^{-1}U\mathcal{W}U^{-1}U\varphi = \varphi^\dagger\mathcal{W}\varphi \tag{4.1.12}$$

W rozważanej tu klasie dopuszczone są zatem następujące singlety:

$$(\varphi^\dagger\tau^I\varphi)W^I_{\mu\nu}B^{\mu\nu} \tag{4.1.13}$$
$$(\varphi^\dagger\tau^I\varphi)W^I_{\mu\nu}\widetilde{B}^{\mu\nu} \tag{4.1.14}$$

4. $\boxed{\varphi\varphi WW}$

Zachowanie symetrii SU(2) (3.1.9) pozwala zbudować 2 liniowo niezależne singlety:

$$(\varphi^\dagger\varphi)W^IW^I \qquad \varphi^\dagger\mathcal{W}\mathcal{W}\varphi$$

Pierwsze wyrażenie jest iloczynem wcześniej omówionych singletów, drugie również jest niezmiennikiem:

$$\varphi^\dagger\mathcal{W}\mathcal{W}\varphi \to \varphi^\dagger U^{-1}U\mathcal{W}U^{-1}U\mathcal{W}U^{-1}U\varphi = \varphi^\dagger\mathcal{W}\mathcal{W}\varphi \tag{4.1.15}$$

Po uwzględnieniu struktury lorentzowskiej niezmienniki te przyjmują postać:

$$(\varphi^\dagger\varphi)W^I_{\mu\nu}W^{I\mu\nu} \tag{4.1.16}$$
$$(\varphi^\dagger\varphi)W^I_{\mu\nu}\widetilde{W}^{I\mu\nu} \tag{4.1.17}$$
$$\varphi^\dagger\mathcal{W}_{\mu\nu}\mathcal{W}^{\mu\nu}\varphi \tag{4.1.18}$$
$$\varphi^\dagger\mathcal{W}_{\mu\nu}\widetilde{\mathcal{W}}^{\mu\nu}\varphi \tag{4.1.19}$$

Oba tensory $W_{\mu\nu}$ mają identyczne indeksy izospinowe, a zatem operatory (4.1.18) i (4.1.19) sprowadzają się do (4.1.16) i (4.1.17):

$$\begin{aligned}\varphi^\dagger\mathcal{W}_{\mu\nu}\widetilde{\mathcal{W}}^{\mu\nu}\varphi &= (\varphi^\dagger\tau^I\tau^J\varphi)W^I_{\mu\nu}\widetilde{W}^{J\mu\nu}\\ &= \tfrac{1}{2}(\varphi^\dagger\{\tau^I,\tau^J\}\varphi)W^I_{\mu\nu}\widetilde{W}^{J\mu\nu} \overset{(B.2)}{\sim} (\varphi^\dagger\varphi)W^I_{\mu\nu}\widetilde{W}^{I\mu\nu},\end{aligned} \tag{4.1.20}$$

gdzie skorzystaliśmy z faktu, że $W^I_{\mu\nu}\widetilde{W}^{J\mu\nu} = W^J_{\mu\nu}\widetilde{W}^{I\mu\nu}$. Podsumowując, niezależne singlety w tej klasie są następujące:

$$(\varphi^\dagger\varphi)W^I_{\mu\nu}W^{I\mu\nu} \tag{4.1.21}$$

$$(\varphi^\dagger\varphi)W^I_{\mu\nu}\widetilde{W}^{I\mu\nu} \tag{4.1.22}$$

4.1.4 Operatory postaci $\boxed{XXX}$

Struktura lorentzowska Niezmienniczy tensor lorentzowski 6-go rzędu można uzyskać na dwa sposoby - zwężając indeksy wektorowe za pomocą $\eta_{\mu\nu}\eta_{\rho\sigma}\eta_{\gamma\delta}$ lub wykorzystując $\varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma}\eta_{\delta\gamma}$. W pierwszym wypadku, mając do dyspozycji trzy pary zwężanych indeksów (wiedząc że każdy tensor antysymetryczny musi nosić różne indeksy) wyjść musimy od wyrażenia postaci

$$X_\mu{}^\nu Y_\nu{}^\rho Z_\rho{}^\mu \tag{4.1.23}$$

Kombinacje uzyskana przez permutację indeksów μ, ν, ρ równe są podanemu operatorowi bądź wyrażeniu doń przeciwnemu dzięki antysymetrii X.

Ważny dla nas okaże się fakt, że powyższa kombinacja jest różna od zera tylko gdy wszystkie trzy występujące w niej tensory są *różne*. Wynika on z następującej tożsamości:

$$X'_\mu{}^\nu X_\nu{}^\rho Z_\rho{}^\mu = X^{\rho\nu}X'_{\nu\mu}Z_\rho{}^\mu = \{\mu \to \nu \to \rho \to \mu\} = -X_\mu{}^\nu X'_\nu{}^\rho Z_\rho{}^\mu \tag{4.1.24}$$

a zatem

$$X_\mu{}^\nu X_\nu{}^\rho Z_\rho{}^\mu = 0 \tag{4.1.25}$$

Drugą możliwością zwężenia pól jest wykorzystanie $\varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma}\eta^{\gamma\delta}$. Antysymetria X, Y i Z wymusza przyporządkowanie γ i δ różnym tensorom - pozostałe indeksy muszą być zwężone z ε, zaś ich kolejność nie ma znaczenia, ze względu na całkowitą antysymetrię ε. Zatem niezmienniki rozróżnia tylko wybór tensora, w którym oba indeksy zwężane są z ε.

$$\varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma}X_{\rho\sigma}Y_{\rho\delta}Z^\delta{}_\sigma = \widetilde{X}^{\mu\nu}Y_{\nu\delta}Z^\delta{}_\mu \tag{4.1.26}$$

$$X_{\rho\delta}\widetilde{Y}^{\rho\sigma}Z^\delta{}_\sigma \tag{4.1.27}$$

$$X^\delta{}_\sigma Y_{\rho\delta}\widetilde{Z}^{\rho\sigma} \tag{4.1.28}$$

Dla antysymetrycznego tensora 2-go rzędu $X_{\mu\nu}$ prawdziwy jest fakt (B.13):

$$X_{\mu\nu}\widetilde{X}^{\nu\rho} = -\tfrac{1}{4}\delta_\mu{}^\rho X_{\zeta\xi}\widetilde{X}^{\zeta\xi} \tag{4.1.29}$$

Jego konsekwencją jest zerowanie się powyższych niezmienników gdy dwa tensory spośród X, Y, Z są jednakowe, np.:

$$\widetilde{X}^{\mu\nu}X_{\nu\delta}Z^\delta{}_\mu = -\tfrac{1}{4}\delta^\mu{}_\delta X_{\zeta\xi}\widetilde{X}^{\zeta\xi}Z^\delta{}_\mu = 0 \tag{4.1.30}$$

gdyż antysymetryczny tensor Z zwężany jest z symetrycznym symbolem Kroneckera. Podsumowując, zarówno w przypadkach (4.1.23) jak i (4.1.26) wszystkie trzy tensory X, Y, Z muszą być *różne* (zauważmy, że wystarczy, by rozróżniał je indeks reprezentacji grupy cechowania).

Struktura grupowa Tylko $B_{\mu\nu}$ może wystąpić samotnie jako singlet wszystkich grup, pozostałe tensory muszą wystąpić przynajmniej jako para. Operatory złożone z trzech tensorów cechowania w Modelu Standardowym mogą być następujących rodzajów:

1. $\boxed{XXB}$ X=W, G, B

   W tym wypadku nie otrzymamy żadnego liniowo niezależnego operatora.

   Zarówno dla X=G jak i dla X=W: odpowiednio analiza symetrii SU(3) (3.1.20) i SU(2) (3.1.4) pozostawia 1 liniowo niezależny singlet. Pozostałe symetrie w przypadku obu operatorów spełnione są z definicji. W wypadku X=B operator jest niezmienniczy wprost z definicji tego tensora.

   Na mocy ogólnej analizy przeprowadzonej w punkcie poświęconym operatorowi $\boxed{\varphi\varphi GG}$, jedyne singlety muszą być postaci (pomijając indeksy lorentzowskie):

$$Tr[X^A T^A X^{A'} T^{A'}]B = X^A X^A B \tag{4.1.31}$$

   W wyrażeniu (4.1.31) występuje para identycznych tensorów X^A, a zatem rozważane wyrażenia są równe zeru na mocy (4.1.25) i (4.1.30).

2. $\boxed{WWW}$

   Wśród operatorów tej klasy występują dwa niezależne operatory.

   Poprzez rozkład (3.1.11) symetria SU(2) pozwala zbudować 1 liniowo niezależny operator niezmienniczy, np.

$$\varepsilon^{IJK} W^I W^J W^K \tag{4.1.32}$$

   Niezmienniczość powyższego wyrażenia oparta jest o niezmienniczość śladu – podobnie jak w przypadku (4.1.6), niezmiennikiem jest $Tr\left(\mathcal{W}^I \mathcal{W}^J \mathcal{W}^K\right)$. Z kolei

$$\begin{aligned} Tr\left(\tau^I\tau^J\tau^K\right) &= \tfrac{1}{2}Tr\left(\tau^I[\tau^J,\tau^K]\right) + \tfrac{1}{2}Tr\left(\tau^I \underbrace{\{\tau^J,\tau^K\}}_{\sim I_2}\right) \\ &\overset{Tr(\tau^I)=0}{=} i\varepsilon^{I'JK} Tr\left(\tau^I\tau^{I'}\right) = 2i\varepsilon^{IJK}, \end{aligned} \tag{4.1.33}$$

   a zatem

$$Tr\left(\mathcal{W}^I \mathcal{W}^J \mathcal{W}^K\right) \sim \varepsilon^{IJK} W^I W^J W^K \tag{4.1.34}$$

   Niezależne operatory to:

$$\varepsilon^{IJK} W_\mu^{I\ \nu} W_\nu^{J\ \rho} W_\rho^{K\ \mu} \tag{4.1.35}$$

$$\varepsilon^{IJK} \widetilde{W}^{I\mu\nu} W^J_{\nu\delta} W^{K\delta}_{\mu} \tag{4.1.36}$$

   Pozostałe wyrażenia zwężane przez $\varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma}$ wyrażają się przez (4.1.36) dzięki całkowitej antysymetrii ε^{IJK}, gdyż rozróżniał je wybór tensora w którym oba indeksy zwężane są z $\varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma}$. Przypomnijmy tu fakt (4.1.24), z którego wynika również znikanie symetrycznych kombinacji składowych trzech identycznych multipletów tensorowych.

3. $\boxed{GGG}$
W tym wypadku otrzymamy dwa liniowo niezależne operatory.

Symetria SU(3) (3.1.21) ogranicza liczbę kombinacji liniowo niezależnych z punktu widzenia struktury grupowej do 2. Można zapisać je w postaci: $f^{ABC}G^AG^BG^C$, $d^{ABC}G^AG^BG^C$.

Jak poprzednio, zauważmy że

$$f^{ABC}G^AG^BG^C \sim Tr\left(\mathcal{G}^A[\mathcal{G}^B,\mathcal{G}^C]\right) = Tr\left(\mathcal{G}^A\mathcal{G}^B\mathcal{G}^C\right) - Tr\left(\mathcal{G}^A\mathcal{G}^C\mathcal{G}^B\right) \tag{4.1.37}$$

zaś każde z tych wyrażeń jest niezmiennikiem, jak wykazano w (4.1.6). Podobnie niezmiennikiem jest również

$$d^{ABC}G^AG^BG^C \sim Tr\left(\mathcal{G}^A\{\mathcal{G}^B,\mathcal{G}^C\}\right) \tag{4.1.38}$$

jednak ten singlet jest równy zeru po uwzględnieniu struktury relatywistycznej – dzięki tożsamości (4.1.24) oraz zupełnej symetrii d^{ABC}. Mamy zatem wyłącznie:

$$f^{ABC}G^A{}_\mu{}^\nu G^B{}_\nu{}^\rho G^C_\rho{}^\mu, \qquad f^{ABC}\widetilde{G}^A{}_\mu{}^\nu G^B{}_\nu{}^\delta G^C{}_\delta{}^\mu \tag{4.1.39}$$

4.2 Operatory zawierające wyłącznie tensory pól cechowania i ich pochodne kowariantne

Niezmienniczość ze względu na transformacje cechowania wymaga, by wystąpiły co najmniej dwa tensory pól cechowania albo jeden $B_{\mu\nu}$, który jest niezmiennikiem tych przekształceń. Analiza wymiarowa pozostawia w tym wypadku operatory XXD, $BDDD$ wymiaru 5 oraz $XXDD$, $BDDDD$ wymiaru 6. W miejscach, w których opisujemy ogólne operatory złożone z pewnych pól i pochodnych kowariantnych bez precyzowania, na które obiekty działają pochodne, będziemy umieszczać je na końcu wyrażenia. Faktyczne działanie pochodnych kowariantnych przeanalizowane zostanie w kolejnym kroku klasyfikacji.

Wśród nietrywialnych iloczynów tensorowych reprezentacji wektorowych $(\frac{1}{2},\frac{1}{2})$ grupy $SL(2,\mathbb{C})$ singlety występują tylko w iloczynach parzystego rzędu. Argument ten stosuje się również do iloczynów tensorów antysymetrycznych, transformujących się wedle reprezentacji $(1,0)\oplus(0,1)$, gdyż zawiera się ona w $(\frac{1}{2},\frac{1}{2})$. Pozostaje zatem rozważyć tylko wyrażenia, w których występuje parzyście wiele pochodnych kowariantnych: $XXDD$ oraz $BDDDD$.

Każdy operator zawierający pochodne kowariantne jest singletem grup cechowania również gdyby je z niego usunąć, co wynika wprost z definicji pochodnej kowariantnej. Stąd analizę struktury reprezentacji grup cechowania przeprowadzimy dla samych pól. W wyborze liniowo niezależnych wyrażeń istotne będzie pomijanie pełnych dywergencji operatorów zawierających pola materii bądź tensory pól cechowania:

$$D_\mu H^\mu(\Phi(x)) = \partial_\mu H^\mu(\Phi(x)), \tag{4.2.1}$$

gdzie H^μ jest wyrazeniem niezmienniczym względem cechowania. Jak wiadomo, wkłady do lagranżjanu postaci $\partial_\mu H^\mu(\Phi(x))$ nie mają wpływu ani na klasyczne równania ruchu, ani na amplitudy fizyczne w przypadku kwantowym. Wykorzystanie reguły Leibniza dla pochodnych kowariantych pozwala wyrazić te operatory spośród wszystkich możliwych jednomianów zbudowanych z pochodnych kowariantnych $D_{\mu_1}...D_{\mu_m}$ i pól $\phi_1...\phi_n$ jako kombinacje liniowe wyrażeń nie zawierających pochodnych ϕ_1, o ile rozważany jednomian jest liniowy w tym polu.

4.2.1 Operatory postaci $\boxed{BDDDD}$

Operatory tej postaci stanowią jedynie pełne dywergencje pól, a więc je pomijamy.

4.2.2 Operatory postaci $\boxed{XXDD}$

Wszystkie operatory tej klasy okażą się liniowo zależne od operatorów innych klas.

Z tych samych przyczyn co w przypadku operatorów postaci XXB singletami grupowymi są:

$$W^I W^I DD, \quad G^A G^A DD, \quad BBDD$$

Struktura lorentzowska Indeksy rozważanego tensor lorentzowskiego 6-go rzędu zwęzić można za pomocą trzech tensorów metrycznych, albo tensora metrycznego i $\varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma}$. W pierwszym wypadku antysymetria X pociąga za sobą konieczność zwężenia co najmniej pary indeksów pomiędzy tensorami X, co pozostawia następujące niezmienniki:

$$X^A_{\mu\nu} X^{A\mu\nu} D_\rho D^\rho \tag{4.2.2}$$
$$X^A_{\mu\nu} X^{A\mu\rho} D_\rho D^\nu \tag{4.2.3}$$

W drugim przypadku są to:

$$\widetilde{X}^A_{\mu\nu} X^{A\mu\nu} D_\rho D^\rho \tag{4.2.4}$$
$$\widetilde{X}^A_{\mu\nu} X^{A\mu\rho} D_\rho D^\nu \tag{4.2.5}$$
$$\varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma} X^A_{\mu\delta} X_\rho{}^\delta D_\nu D_\sigma \tag{4.2.6}$$

Rozważając położenie pochodnej i pomijając pełne dywergencje pól usuwamy pochodną działającą na skrajnie lewy tensor, otrzymując z powyższych niezmienników:

$$X^A_{\mu\nu} D_\rho D^\rho X^{A\mu\nu} \quad \widetilde{X}^A_{\mu\nu} D_\rho D^\rho X^{A\mu\nu} \tag{4.2.7}$$
$$X^A_{\mu\nu} D_\rho D^\nu X^{A\mu\rho} \quad \widetilde{X}^A_{\mu\nu} D_\rho D^\nu X^{A\mu\rho} \tag{4.2.8}$$
$$X^A_{\mu\nu} D^\nu D_\rho X^{A\mu\rho} \quad \widetilde{X}^A_{\mu\nu} D^\nu D_\rho X^{A\mu\rho} \tag{4.2.9}$$
$$\varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma} X^A_{\mu\delta} D_\nu D_\sigma X^{A\delta}_\rho \tag{4.2.10}$$

Operatory (4.2.7) redukują się następująco (rozumowanie jest poprawne również, gdy pierwszy z występujących poniżej tensorów jest tensorem dualnym):

$$\begin{aligned} X^{A\mu\nu}(D^\rho D_\rho X_{\mu\nu})^A &\overset{(B.12)}{=} -X^{A\mu\nu}[D^\rho(D_\mu X_{\nu\rho} + D_\nu X_{\rho\mu})]^A \\ &\overset{(B.7)}{=} -X^{A\mu\nu}\{D_\mu \underline{D^\rho X_{\nu\rho}} + D_\nu \underline{D^\rho X_{\rho\mu}} + g f^{abc}(X^{B\rho}{}_\mu X^C_{\nu\rho} + X^{B\rho}{}_\nu X^C_{\rho\mu}) \end{aligned} \tag{4.2.11}$$

gdzie podkreślone wyrażenia wyrazić możemy za pomocą równań ruchu.

Analogicznie, również operatory (4.2.8) nie są niezależne:

$$X^{A\mu\nu} D_\rho D_\mu X^{A\rho}_\nu = X^{A\mu\nu} (g f^{ABC} X^B_{\rho\mu} X^{C\rho}_\nu + D^\mu \underline{D_\rho X^\rho_\nu}) \tag{4.2.12}$$

Operatory (4.2.9) zawierają wyłącznie człony redukowalne przy pomocy równań ruchu.

Operator (4.2.10) nie jest niezależny, bo w świetle wzoru na komutator pochodnych kowariantnych działających na tensor pola cechowania (B.7) otrzymujemy

$$\begin{aligned} \varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma} X^A_{\mu\delta} D_\nu D_\sigma X^{A\ \ \delta}_{\rho} &= \tfrac{1}{2} \varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma} X^A_{\mu\delta} ([D_\nu, D_\sigma] X_\rho{}^\delta)^A \\ &= -\tfrac{1}{2} g f^{ABC} X^A_{\mu\delta} \widetilde{X}^B_{\mu\rho} X_{C\rho}^{\ \ \delta} \end{aligned} \tag{4.2.13}$$

Dla konkretnych tensorów prowadzi to do:

$$GGDD \sim \boxed{GGG} + \boxed{\psi\psi GD} \tag{4.2.14}$$

$$WWDD \sim \boxed{WWW} + \boxed{\psi\psi WD} + \boxed{\varphi\varphi WDD} \tag{4.2.15}$$

$$BBDD \sim \boxed{BBB} + \boxed{\psi\psi BD} + \boxed{\varphi\varphi BDD} \tag{4.2.16}$$

4.3 Pozostałe operatory bozonowe.

W wielomianach jednorodnych, złożonych z pól φ, tensorów pól cechowania i pochodnych kowariantnych tych ostatnich musi być parzyście wiele ze względu na symetrię lorentzowską. Dopuszczone są zatem kombinacje: $\varphi DDDD$, $\varphi^3 DD$ wymiaru 5 oraz $\varphi^4 DD$, $\varphi^2 DDDD$, $\varphi^2 XDD$ wymiaru 6.

Operatory postaci $\varphi DDDD$ oraz $\varphi^3 DD$ nie mogą być singletami $SU(2)$ (patrz równanie (3.1.5)). Pozostaje zatem rozważyć wyłącznie operatory wymiaru masowego 6.

4.3.1 Operatory postaci $\boxed{\varphi^4 DD}$

W tym wypadku otrzymamy dwa niezależne operatory.

Analogicznie do przypadku 6 pól φ, występuje tu jeden liniowo niezależny singlet grupowy i lorentzowski postaci

$$(\varphi^\dagger \varphi)^2 D_\mu D^\mu$$

Redukcja Ze względu na identyczność pól φ i symetrię zamiany pochodnych kowariantnych jest 6 możliwości ich przyporządkowania:

$$(\varphi^\dagger D_\mu D^\mu \varphi)(\varphi^\dagger \varphi) \quad [(D_\mu D^\mu \varphi)^\dagger \varphi](\varphi^\dagger \varphi) \tag{4.3.1}$$

$$[(D_\mu \varphi)^\dagger (D^\mu \varphi)](\varphi^\dagger \varphi) \tag{4.3.2}$$

$$[\varphi^\dagger (D^\mu \varphi)][(D_\mu \varphi)^\dagger \varphi] \tag{4.3.3}$$

$$[(D_\mu \varphi)^\dagger \varphi][(D^\mu \varphi)^\dagger \varphi] \tag{4.3.4}$$

$$(\varphi^\dagger D_\mu \varphi)(\varphi^\dagger D^\mu \varphi) \tag{4.3.5}$$

Pomijamy dwa niezależne wyrażenia będące pełną dywergencją:

$$D_\mu[(\varphi^\dagger\varphi)(\varphi^\dagger D^\mu\varphi)] \tag{4.3.6}$$

$$D_\mu\{(\varphi^\dagger\varphi)[(D^\mu\varphi)^\dagger\varphi]\} \tag{4.3.7}$$

co, przy użyciu reguły Leibniza, pozwala wyrazić operatory (4.3.4) i (4.3.5)przez pozostałe. Z kolei na mocy równań ruchu:

$$(4.3.1) \overset{(2.2.7)}{=} \boxed{\varphi^4} + \boxed{\varphi^6} + \boxed{\psi\psi\varphi^3} \tag{4.3.8}$$

czyli wśród niezmienniczych operatorów tej klasy pozostają tylko dwa niezależne wyrażenia:

$$[(D_\mu\varphi)^\dagger(D^\mu\varphi)](\varphi^\dagger\varphi) \qquad [\varphi^\dagger(D^\mu\varphi)][(D_\mu\varphi)^\dagger\varphi]$$

4.3.2 Operatory postaci $\boxed{\varphi\varphi DDDD}$

Wszystkie operatory tej klasy okażą się liniowo zależne od operatorów innych klas.

Symetria grupowa określa jeden singlet (3.1.1) : $\varphi^\dagger\varphi$, lorentzowska wymusza zwężenie pochodnych poprzez dwa tensory metryczne lub $\varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma}$.

Korzystając z reguły Leibniza dla pochodnych kowariantnych i pomijając pełne dywergencje zapiszemy wszystkie jednomiany tego rodzaju różniące się położeniem pochodnych poprzez wyrażenia, w których pochodne nie działają na pole φ^*:

$$\varphi^\dagger DDDD\varphi$$

Możliwe są następujące kombinacje:

$$\varphi^\dagger D_\mu D^\nu D_\mu D^\nu\varphi \tag{4.3.9}$$

$$\varphi^\dagger D_\mu D^\nu D_\nu D^\mu\varphi \tag{4.3.10}$$

$$\varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma}\varphi^\dagger D_\mu D_\nu D_\rho D_\sigma\varphi \tag{4.3.11}$$

$$\varphi^\dagger D_\mu D^\mu D_\nu D^\nu\varphi \tag{4.3.12}$$

jednak operator (4.3.9) daje się wyrazić przez (4.3.12) i operator klasy $\boxed{\varphi\varphi WDD}$:

$$\begin{aligned}\varphi^\dagger D_\mu D^\nu D_\mu D^\nu\varphi &= \varphi^\dagger D_\mu D^\mu D_\nu D^\nu\varphi + \varphi^\dagger D_\mu[D^\nu, D_\mu]D^\nu\varphi \\ &= \varphi^\dagger D_\mu D^\mu D_\nu D^\nu\varphi + ig\varphi^\dagger D_\mu \mathcal{W}^\nu{}_\mu D^\nu\varphi\end{aligned} \tag{4.3.13}$$

Wyrażenie (4.3.10) można podobnie rozłożyć:

$$\begin{aligned}\varphi^\dagger D_\mu D^\nu D_\nu D^\mu\varphi &= \varphi^\dagger D_\mu D^\nu D_\mu D^\nu\varphi + ig\varphi^\dagger \mathcal{W}_\mu{}^\nu D_\nu D^\mu\varphi \\ &= \varphi^\dagger D_\mu D^\mu D_\nu D^\nu\varphi + ig\varphi^\dagger D_\mu \mathcal{W}^\nu{}_\mu D^\nu\varphi + ig\varphi^\dagger \mathcal{W}_\mu{}^\nu D_\nu D^\mu\varphi \\ &= \varphi^\dagger D_\mu D^\mu D_\nu D^\nu\varphi + \boxed{\varphi\varphi WDD}\end{aligned} \tag{4.3.14}$$

z kolei operator (4.3.11) wprost sprowadza się do elementu klasy $\boxed{\varphi\varphi WDD}$:

$$\begin{aligned}\varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma}\varphi^\dagger D_\mu D_\nu D_\rho D_\sigma\varphi &= \tfrac{1}{4}\varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma}\varphi^\dagger[D_\mu, D_\nu][D_\rho, D_\sigma]\varphi \\ &= \tfrac{1}{4}\varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma}\varphi^\dagger \mathcal{W}_{\mu\nu}\mathcal{W}_{\rho\sigma}\varphi = \tfrac{1}{4}\varphi^\dagger \widetilde{\mathcal{W}}_{\mu\nu}\mathcal{W}_{\rho\sigma}\varphi\end{aligned} \tag{4.3.15}$$

Ostatnie pozostałe wyrażenie – (4.3.9) – ma najbogatszy rozkład:

$$\begin{aligned}\varphi^\dagger D_\mu D^\mu D_\nu D^\nu \varphi &\overset{(2.2.7)}{=} \varphi^\dagger D_\mu D^\mu [\boxed{\varphi} + \boxed{\varphi^3} + \boxed{\psi\psi}] \\ &\overset{(2.2.7)}{=} \boxed{\varphi^2} + \boxed{\varphi^4} + \boxed{\psi\psi\varphi} + \boxed{\varphi^4 DD} + \boxed{\psi\psi\varphi DD}\end{aligned} \tag{4.3.16}$$

4.3.3 Operatory postaci $\boxed{\varphi\varphi XDD}$

Wszystkie operatory tej klasy okażą się liniowo zależne od operatorów innych klas.

Z zachowania symetrii SU(3) wynika, iż X nie może być tensorem pól cechowania tej grupy.

1. $\boxed{\varphi\varphi WDD}$

   Rozkład iloczynu reprezentacji grupy SU(2) (3.1.6) pozwala na zbudowanie jednego liniowo niezależnego singletu. Zapiszmy go w postaci analogicznej do poprzedniej (4.1.12): $\varphi^\dagger \mathcal{W}\varphi$. Pochodne mogą zostać zwężone poprzez dwa tensory metryczne lub $\varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma}$, co pozwala na utworzenie następujących singletów po usunięciu wszystkich pochodnych działających na $\varphi^\dagger$:

$$\varphi^\dagger \mathcal{W}^{\mu\nu} D_\mu D_\nu \phi \tag{4.3.17}$$
$$\varphi^\dagger \widetilde{\mathcal{W}}^{\mu\nu} D_\mu D_\nu \phi \tag{4.3.18}$$
$$\varphi^\dagger (D_\mu D_\nu \mathcal{W}^{\mu\nu})\varphi \tag{4.3.19}$$
$$\varphi^\dagger (D_\mu \mathcal{W}^{\mu\nu}) D_\nu \varphi \tag{4.3.20}$$
$$\varphi^\dagger (D_\mu D_\nu \widetilde{\mathcal{W}}^{\mu\nu})\varphi \tag{4.3.21}$$
$$\varphi^\dagger (D_\mu \widetilde{\mathcal{W}}^{\mu\nu}) D_\nu \varphi \tag{4.3.22}$$

   Z antysymetrii tensora $W^{\mu\nu}$ wynika jednak, że (4.3.17) i (4.3.18) wyrażają się poprzez operatory postaci $\varphi^\dagger \mathcal{W}\mathcal{W}\varphi$:

$$\varphi^\dagger \mathcal{W}^{\mu\nu} D_\mu D_\nu \varphi = \tfrac{1}{2}\varphi^\dagger \mathcal{W}^{\mu\nu}[D_\mu, D_\nu]\varphi = ig\tfrac{1}{2}\varphi^\dagger \mathcal{W}^{\mu\nu}\mathcal{W}_{\mu\nu}\varphi \sim \boxed{\varphi\varphi WW} \tag{4.3.23}$$

   Operator (4.3.19) dzięki tej samej własności sprowadza się do operatora klasy $\boxed{\varphi\varphi WW}$:

$$\begin{aligned}\varphi^\dagger (D_\mu D_\nu \mathcal{W}^{\mu\nu})\varphi &= \tfrac{1}{2}\varphi^\dagger ([D_\mu, D_\nu]\mathcal{W}^{\mu\nu})\varphi \\ &\overset{(B.7)}{\sim} \varepsilon^{ABC}(\varphi^\dagger \lambda^A \varphi) W^B_{\mu\nu} W^{C\mu\nu} \sim \boxed{\varphi\varphi WW}\end{aligned} \tag{4.3.24}$$

   zaś wyrażenie (4.3.20)

$$\varphi^\dagger (D_\mu \mathcal{W}^{\mu\nu}) D_\nu \varphi \overset{(2.2.9)}{\sim} \boxed{\varphi^4 DD} + \boxed{\psi\psi\varphi\varphi D} \tag{4.3.25}$$

   Operatory (4.3.21) i (4.3.22) znikają na mocy tożsamości Bianchi (B.12).

2. $\boxed{\varphi\varphi BDD}$

W tym wypadku niezmiennicze operatory to:

$$\varphi^\dagger B^{\mu\nu} D_\mu D_\nu \phi \tag{4.3.26}$$

$$\varphi^\dagger \widetilde{B}^{\mu\nu} D_\mu D_\nu \phi \tag{4.3.27}$$

$$\varphi^\dagger (D_\mu D_\nu B^{\mu\nu})\varphi \tag{4.3.28}$$

$$\varphi^\dagger (D_\mu B^{\mu\nu}) D_\nu \varphi \tag{4.3.29}$$

$$\varphi^\dagger (D_\mu D_\nu \widetilde{B}^{\mu\nu})\varphi \tag{4.3.30}$$

$$\varphi^\dagger (D_\mu \widetilde{B}^{\mu\nu}) D_\nu \varphi \tag{4.3.31}$$

Analogicznie jak dla X=W, zastosowanie tożsamości dla komutatora pochodnych kowariantnych w działaniu na tensor pola cechowania, a następnie odpowiedniego równania ruchu, sprowadza powyższe wyrażenia do kombinacji liniowych operatorów klas $\boxed{\varphi^4 DD}$, $\boxed{\psi\psi\varphi\varphi D}$ i $\boxed{\varphi\varphi XX}$

4.4 Podsumowanie klasyfikacji operatorów bozonowych

Po redukcji otrzymaliśmy 15 następujących niezależnych operatorów złożonych z pól bozonowych i pochodnych kowariantnych, ujętych w tabeli 4. W większości wypadków ich niezależność wynika wprost z różnego składu poniższych iloczynów pól, np. wyrażenie $[\varphi^\dagger(D^\mu\varphi)][(D_\mu\varphi)^\dagger\varphi]$ zawiera iloczyn $\varphi_2^*\varphi_1(D_\mu\varphi_2)(D^\mu\varphi_1)$, nieobecny w operatorze $(\varphi^\dagger\varphi)(D_\mu\varphi)^\dagger(D^\mu\varphi)$. Równania ruchu, ze względu na rząd w pochodnych kowariantnych, nie doprowadzą do zależności pomiędzy poniżej sklasyfikowanymi operatorami.

Klasa	$\boxed{\varphi^6}$	$\boxed{XXX}$	$\boxed{\varphi\varphi XX}$	$\boxed{\varphi^4 DD}$
Operatory	$(\varphi^\dagger\varphi)^3$	$\varepsilon^{IJK} W_\mu^{I\ \nu} W_\nu^{J\ \rho} W_\rho^{K\ \mu}$	$\varphi^\dagger\tau^I\varphi W^I_{\mu\nu} B^{\mu\nu}$	$(\varphi^\dagger\varphi)(D_\mu\varphi)^\dagger(D^\mu\varphi)$
		$\varepsilon^{IJK}\widetilde{W}^{I\mu\nu} W^J_{\nu\delta} W^{K\delta}_{\ \ \mu}$	$\varphi^\dagger\tau^I\varphi W^I_{\mu\nu}\widetilde{B}^{\mu\nu}$	$[\varphi^\dagger(D^\mu\varphi)][(D_\mu\varphi)^\dagger\varphi]$
		$f^{ABC} G^{A\ \nu}_{\ \mu} G^{B\ \rho}_{\ \nu} G^{C\ \mu}_{\rho}$	$\varphi^\dagger\varphi W^I_{\mu\nu} W^{I\mu\nu}$	
		$f^{ABC}\widetilde{G}^{A\ \nu}_{\ \mu} G^{B\ \delta}_{\ \nu} G^{C\ \mu}_{\ \delta}$	$\varphi^\dagger\varphi W^I_{\mu\nu}\widetilde{W}^{I\mu\nu}$	
			$\varphi^\dagger\varphi G^A_{\mu\nu} G^{A\mu\nu}$	
			$\varphi^\dagger\varphi G^A_{\mu\nu}\widetilde{G}^{A\mu\nu}$	
			$\varphi^\dagger\varphi B_{\mu\nu} B^{\mu\nu}$	
			$\varphi^\dagger\varphi B_{\mu\nu}\widetilde{B}^{\mu\nu}$	

Tabela 4: Niezależne operatory złożone z pól bozonowych i pochodnych kowariantnych.

5 Niezmiennicze operatory zawierające pola bozonowe i fermionowe

Jak zapowiedzieliśmy, dla operatorów zawierających pola fermionowe niezmienniczość lorentzowską analizować będziemy za pomocą rozkładania iloczynów tensorowych reprezentacji właściwych transformacji Lorentza na sumy proste reprezentacji nieprzywiedlnych.

5.1 Operatory zawierające wyłącznie pola fermionowe i pochodne kowariantne

Ze względu na niezmienniczość lorentzowską wykluczyć musimy operatory zawierające nieparzystą liczbę pól fermionowych. Analiza wymiarowa operatorów złożonych z pól fermionowych i pochodnych kowariantnych pozostawia wyrażenia: $\psi\psi DD$ o wymiarze masowym 5 i $\psi\psi DDD$ wymiaru 6.

5.1.1 Operatory postaci $\boxed{\psi\psi DD}$

Wśród operatorów tej klasy nie występują wyrażenia niezmiennicze ze względu na transformacje cechowania i Lorentza.

Z zachowania hiperładunku wynika, że pola fermionów muszą być wzajemnie sprzężone, co ogranicza nas do wyrażeń postaci $\psi^*\psi DD$. Zarówno $\psi_L^*\psi_L DD$ [5] jak i $\psi_R^*\psi_R DD$ transformuje się wedle:

$$(\tfrac{1}{2},0)\otimes(0,\tfrac{1}{2})\otimes(\tfrac{1}{2},\tfrac{1}{2})\otimes(\tfrac{1}{2},\tfrac{1}{2}) = (\tfrac{1}{2},\tfrac{1}{2})\otimes[(0,0)\oplus(0,1)\oplus(1,0)\oplus(1,1)]$$

jednak w tym rozkładzie nie występuje żaden singlet lorentzowski $(0,0)$.

5.1.2 Operatory postaci $\boxed{\psi\psi DDD}$

Wszystkie operatory tej klasy okażą się liniowo zależne od operatorów innych klas.

Struktura grupowa jest identyczna jak w klasie $\boxed{\psi\psi DD}$ powyżej - do dalszego wnioskowania wystarczy przy tym (jak poprzednio), że pola fermionów są wzajemnie sprzężone. Struktura lorentzowska przedstawia się następująco:

$$\begin{aligned}
&(\tfrac{1}{2},0)\otimes(0,\tfrac{1}{2})\otimes(\tfrac{1}{2},\tfrac{1}{2})\otimes(\tfrac{1}{2},\tfrac{1}{2})\otimes(\tfrac{1}{2},\tfrac{1}{2})\\
&\qquad=[(0,0)\oplus(0,1)\oplus(1,0)\oplus(1,1)]\otimes[(0,0)\oplus(0,1)\oplus(1,0)\oplus(1,1)]\\
&\qquad=(0,0)+\underbrace{(0,0)}_{(1,0)\otimes(1,0)}+\underbrace{(0,0)}_{(0,1)\otimes(0,1)}+\underbrace{(0,0)}_{(1,1)\otimes(1,1)}+\text{ pozostałe}
\end{aligned}\tag{5.1.1}$$

i określa występowanie 4 niezależnych singletów (w istocie jest ich mniej, gdyż pochodne nie są rozróżnialnymi wektorami lorentzowskimi).

[5] Używamy symbolu sprzężenia zespolonego, a nie hermitowskiego, gdyż rozważamy nieustalone jeszcze kombinacje dwóch *konkretnych* pól fermionowych – składowych multipletów grup cechowania.

Kandydatami na takie singlety są kombinacje pól postaci:

$$(\bar{\psi}_L\gamma_\mu\psi_L)D^\mu D_\nu D^\nu, \qquad (\bar{\psi}_R\gamma_\mu\psi_R)D^\mu D_\nu D^\nu$$

Gdyby pochodne były rozróżnialne same z siebie, a nie poprzez pole, na które działają (taką klasyfikację uwzględnimy za chwilę), to pochodną zwężaną z macierzami Diraca można wybrać na 3 sposoby, a zatem powyższe wyrażenie reprezentuje 3 niezależne singlety. Czwarty wybierzmy w postaci:

$$(\bar{\psi}_L\gamma_{[\mu}\gamma_\nu\gamma_{\rho]}\psi_L)D^\mu D^\nu D^\rho, \qquad (\bar{\psi}_R\gamma_{[\mu}\gamma_\nu\gamma_{\rho]}\psi_R)D^\mu D^\nu D^\rho$$

Uzasadnienie niezmienniczości lorentzowskiej powyższych wyrażeń znaleźć można w klasycznych podręcznikach.

Redukcja Stosując jak zwykle regułę Leibniza i pomijając pełne dywergencje wybieramy tylko operatory w których pochodne nie działają na pole $\bar{\psi}$, otrzymując:

$$\bar{\psi}\gamma^\mu D_\mu D_\nu D^\nu\psi \tag{5.1.2}$$

$$\bar{\psi}\gamma^\mu D_\nu D_\mu D^\nu\psi \tag{5.1.3}$$

$$\bar{\psi}\gamma^\mu D^\nu D_\nu D_\mu\psi \tag{5.1.4}$$

$$\bar{\psi}\gamma_{[\mu}\gamma_\nu\gamma_{\rho]}D_\mu D_\nu D_\rho\psi \tag{5.1.5}$$

Jednak na mocy równania ruchu dla odpowiedniego pola fermionowego ($i\not{D}\psi \sim \psi\varphi$) (5.1.2) sprowadza się do:

$$\bar{\psi}\gamma^\mu D_\mu D_\nu D^\nu\psi = -\overline{\not{D}\psi}D_\nu D^\nu\psi + \ (\mathrm{div}) \overset{\text{r.ruchu}}{=} \boxed{\psi\psi\varphi DD}, \tag{5.1.6}$$

gdzie (div) oznacza pełną dywergencję. Z kolei (5.1.3) rozkłada się na

$$\bar{\psi}\gamma^\mu D_\nu D_\mu D^\nu\psi = -\bar{\psi}D_\nu D^\nu\not{D}\psi + \bar{\psi}\gamma^\mu D_\nu[D_\mu, D^\nu]\psi \overset{\text{r.ruchu}}{=} \boxed{\psi\psi\varphi DD} + \boxed{\psi\psi XD} \tag{5.1.7}$$

Kombinacja (5.1.4) wyraża się jako:

$$\bar{\psi}D^\nu D_\nu\not{D}\psi = \boxed{\psi\psi\varphi DD} \tag{5.1.8}$$

Operator (5.1.5) również nie jest niezależny:

$$\bar{\psi}\gamma_{[\mu}\gamma_\nu\gamma_{\rho]}D_\mu D_\nu D_\rho\psi = \tfrac{1}{2}\bar{\psi}\gamma_{[\mu}\gamma_\nu\gamma_{\rho]}D_\mu[D_\nu, D_\rho]\psi = \boxed{\psi\psi XD} \tag{5.1.9}$$

Reasumując, wszystkie operatory tej klasy wyrażają się poprzez kombinacje liniowe operatorów klas $\boxed{\psi\psi XD}$ i $\boxed{\psi\psi\varphi DD}$.

5.2 Pozostałe operatory

Z analizy wymiarowej wynika, iż, dopuszczając wyrażenia zawierające pola φ oraz tensory X, otrzymujemy dodatkowo następujące klasy operatorów wymiaru 5: $\psi\psi X$, $\psi\psi\varphi\varphi$ oraz $\psi\psi\varphi D$. Wyrażenia wymiaru 6 to: $\psi\psi XD$, $\psi\psi X\varphi$, $\psi\psi\varphi\varphi\varphi$, $\psi\psi\varphi\varphi D$, $\psi\psi\varphi DD$. Analizować będziemy je w kolejności podyktowanej redukcją kolejnych klas, sprowadzając kolejne kategorie wyrażeń do klasyfikowanych dalej.

5.2.1 Operatory postaci $\boxed{\psi\psi X}$

Symetria $U(1)_Y$ wymusza, by pola fermionowe w operatorze były wzajemnie sprzężone, stąd operatory te są następującym iloczynem reprezentacji gr. Lorentza:

$$(\tfrac{1}{2},0)\otimes(0,\tfrac{1}{2})\otimes[(1,0)\oplus(0,1)]=(\tfrac{1}{2},\tfrac{1}{2})\oplus(\tfrac{3}{2},\tfrac{1}{2})\oplus(\tfrac{1}{2},\tfrac{1}{2})\oplus(\tfrac{1}{2},\tfrac{3}{2})$$

który nie zawiera singletu.

5.2.2 Operatory postaci $\boxed{\psi\psi XD}$

I tym razem rozważana klasa operatorów nie zawiera niezależnych niezmienników.

Symetria $U(1)_Y$ wymaga, by pola fermionowe były wzajemnie sprzężone. Struktura lorentzowska tej klasy opisana jest następującym rozkładem:

$$\begin{aligned}(\tfrac{1}{2},0)\otimes(0,\tfrac{1}{2})\otimes[(1,0)\oplus(0,1)]\otimes(\tfrac{1}{2},\tfrac{1}{2}) &= [(0,0)\oplus(1,0)\oplus(0,1)\oplus(1,1)]\otimes[(1,0)\oplus(0,1)]\\ &= \underbrace{(0,0)}_{(1,0)\otimes(1,0)}+\underbrace{(0,0)}_{(0,1)\otimes(0,1)}+\text{ pozostałe}\end{aligned} \tag{5.2.1}$$

Wśród operatorów rozważanego rodzaju występują zatem 2 singlety lorentzowskie – wyraźmy je w postaci:

$$(\bar{\psi}\gamma_\mu\psi)X^{\mu\nu}D_\nu \tag{5.2.2}$$

$$(\bar{\psi}\gamma_\mu\psi)\widetilde{X}_{\nu\rho}D_\nu \tag{5.2.3}$$

1. $\boxed{\psi\psi GD}$

   Wśród możliwych dla tej klasy iloczynów reprezentacji grupy SU(3) pojedynczy singlet występuje wyłącznie w $\hat{\bar{3}}\otimes\hat{3}\otimes\hat{8}$. Odpowiadają mu następujące kombinacje składowych grupowych:

   $$(\bar{q}\mathcal{G}q)D, \quad (\bar{u}\mathcal{G}u)D, \quad (\bar{d}\mathcal{G}d)D$$

2. $\boxed{\psi\psi WD}$

   Zachowanie symetrii SU(2) powoduje, iż operatory muszą transformować się według iloczynu $\hat{2}\otimes\hat{2}\otimes\hat{3}$, w którym występuje jeden singlet. Przedstawmy go na następujące sposoby:

   $$(\bar{q}\mathcal{W}q)D, \quad (\bar{l}\mathcal{W}l)D$$

3. $\boxed{\psi\psi BD}$

Podobnie jak w przypadku klasy $\boxed{\psi\psi DD}$, dla zachowania hiperładunku koniecznym jest, by pola fermionowe były wzajemnie sprzężone. Singlety iloczynów dwóch wzajemnie sprzężonych reprezentacji fundamentalnych grup SU(2) i SU(3) mają postać $(\Phi_1^\dagger\Phi_2)$, uzasadnioną rachunkiem (C.1). Otrzymujemy zatem następujące wyrażenia:

$$q^\dagger q\mathcal{B}D \tag{5.2.4}$$
$$u^\dagger u\mathcal{B}D \tag{5.2.5}$$
$$d^\dagger d\mathcal{B}D \tag{5.2.6}$$
$$l^\dagger l\mathcal{B}D \tag{5.2.7}$$
$$e^\dagger e\mathcal{B}D \tag{5.2.8}$$

Redukcja Pomijając pełne dywergencje wybieramy tylko operatory, w których pochodne nie działają na pole ψ^*, otrzymując w ogólnym wypadku następujące wyrażenia:

$$(\bar{\psi}\gamma_\mu\psi)D_\nu\widetilde{X}^{\mu\nu} \tag{5.2.9}$$
$$(\bar{\psi}\gamma_\mu\psi)D_\nu X^{\mu\nu} \tag{5.2.10}$$
$$(\bar{\psi}\gamma_\mu D_\nu\psi)\widetilde{X}^{\mu\nu} \tag{5.2.11}$$
$$(\bar{\psi}\gamma_\mu D_\nu\psi)X^{\mu\nu} \tag{5.2.12}$$

Operator (5.2.9) jest równy zeru na mocy tożsamości Bianchi (B.12).

Jak wynika z równań ruchu dla bozonów cechowania, operatory (5.2.10) wyrażają się poprzez wyrażenia innych klas:

$$(\bar{\psi}\gamma_\mu\lambda^A\psi)D_\nu G^{A\mu\nu} \sim \boxed{\psi\psi\psi\psi} \tag{5.2.13}$$
$$(\bar{\psi}\gamma_\mu\tau^I\psi)D_\nu W^{I\mu\nu} \sim \boxed{\psi\psi\psi\psi} + \boxed{\psi\psi\varphi\varphi D} \tag{5.2.14}$$
$$(\bar{\psi}\gamma_\mu\psi)D_\nu B^{\mu\nu} \sim \boxed{\psi\psi\psi\psi} + \boxed{\psi\psi\varphi\varphi D} \tag{5.2.15}$$

W celu znalezienia zależności wiążących pozostałe operatory, przeanalizujmy tożsamości opisujące iloczyny trzech macierzy Diraca. Dzięki rozkładowi

$$\gamma_\mu\gamma_\rho\gamma_\nu = \eta_{\mu\rho}\gamma_\nu + \eta_{\rho\nu}\gamma_\mu - \eta_{\mu\nu}\gamma_\rho - i\epsilon_{\sigma\mu\rho\nu}\gamma^\sigma\gamma^5 \tag{5.2.16}$$

w jego części antysymetrycznej ze względu na zamianę $\mu \leftrightarrow \rho$

$$\sigma_{\mu\rho}\gamma_\nu = i(\eta_{\rho\nu}\gamma_\mu - \eta_{\mu\nu}\gamma_\rho) + \epsilon_{\sigma\mu\rho\nu}\gamma^\sigma\gamma^5 \tag{5.2.17}$$

otrzymujemy wzór

$$\begin{aligned} 2\widetilde{X}^{\mu\nu}\gamma_\mu D_\nu\psi_{L/R} &= \mp X_{\rho\delta}\epsilon^{\mu\nu\rho\delta}\gamma_\mu\gamma^5 D_\nu\psi_{L/R} = \mp X_{\rho\delta}\underline{\epsilon^{\mu\rho\delta\nu}\gamma_\mu\gamma^5} D_\nu\psi_{L/R} \\ &\overset{(5.2.17)}{=} \mp X_{\rho\delta}[\sigma^{\rho\delta}\gamma^\nu - i(\eta^{\delta\nu}\gamma^\rho - \eta^{\rho\nu}\gamma^\delta)]D_\nu\psi_{L/R} \\ &= \mp(2iX^{\nu\rho}\gamma_\rho D_\nu + X^{\rho\delta}\sigma_{\rho\delta}\not{D})\psi_{L/R} \end{aligned} \tag{5.2.18}$$

Na mocy powyższej tożsamości oraz równań ruchu ($\not{D}\psi \sim \psi\varphi$) operatory postaci (5.2.11) sprowadzają się do (5.2.12) i operatorów klasy $\boxed{\psi\psi X\varphi}$:

$$(\bar{\psi}\gamma_\mu D_\nu \psi_{L/R})\widetilde{X}^{\mu\nu} = \mp 2i(\bar{\psi}\gamma_\rho D_\nu \psi_{L/R})X^{\nu\rho} \mp (\bar{\psi}\sigma_{\rho\delta}\underbrace{\not{D}\psi_{L/R}}_{\boxed{\psi\varphi}})X^{\rho\delta} \tag{5.2.19}$$

Ostatnie pozostałe operatory (5.2.12) postaci $(\bar{\psi}\gamma_\mu D_\nu\psi)X^{\mu\nu}$ również da się wyeliminować po nieco dłuższym rachunku:

$$\begin{aligned}(\bar{\psi}\gamma_\mu D_\nu \psi)X^{\mu\nu} &= (\bar{\psi}\gamma_\mu \eta_{\nu\rho} D^\rho \psi)X^{\mu\nu} = \tfrac{1}{2}(\bar{\psi}\gamma_\mu\{\gamma_\nu,\gamma_\rho\}D^\rho\psi)X^{\mu\nu} \\ &= \tfrac{1}{2}(\bar{\psi}\gamma_\mu\gamma_\nu \underbrace{\not{D}\psi}_{\boxed{\psi\varphi}})X^{\mu\nu} + \tfrac{1}{2}(\bar{\psi}\gamma_\mu\gamma_\rho\gamma_\nu D^\rho\psi)X^{\mu\nu} \\ &= \boxed{\psi\psi X\varphi} + \tfrac{1}{2}[D^\rho(\bar{\psi}\gamma_\mu\gamma_\rho\gamma_\nu\psi)]X^{\mu\nu} - \tfrac{1}{2}(\bar{\psi}\overleftarrow{D}^\rho\gamma_\mu\gamma_\rho\gamma_\nu\psi)X^{\mu\nu} \\ &= \boxed{\psi\psi X\varphi} - \tfrac{1}{2}(\bar{\psi}\gamma_\mu\gamma_\rho\gamma_\nu\psi)D^\rho X^{\mu\nu} + \tfrac{1}{2}(\underbrace{\bar{\psi}\overleftarrow{\not{D}}}_{\boxed{\psi\varphi}}\gamma_\mu\gamma_\nu\psi)X^{\mu\nu} - (\bar{\psi}\overleftarrow{D}_\mu\gamma_\nu\psi)X^{\mu\nu}+ \\ &\quad + (div) \\ &= \boxed{\psi\psi X\varphi} - \tfrac{1}{2}(\bar{\psi}\gamma_\mu\gamma_\rho\gamma_\nu\psi)D^\rho X^{\mu\nu} - (\bar{\psi}\overleftarrow{D}_\mu\gamma_\nu\psi)X^{\mu\nu} + (\text{div}).\end{aligned} \tag{5.2.20}$$

Przy pomocy wzoru (5.2.16) możemy wykazać znikanie drugiego wyrażenia:

$$\begin{aligned}(\bar{\psi}\gamma_\mu\gamma_\rho\gamma_\nu\psi)D^\rho X^{\mu\nu} &= (\bar{\psi}\gamma_\nu\psi)D_\mu X^{\mu\nu} + (\bar{\psi}\gamma_\mu\psi)D_\nu X^{\mu\nu} - (\bar{\psi}\gamma_\rho\psi)D_\rho \underbrace{\eta_{\mu\nu}X^{\mu\nu}}_{=0} \\ &\quad + i(\bar{\psi}\gamma_\sigma\gamma^5\psi)\underbrace{\epsilon_{\sigma\rho\mu\nu}D^\rho X^{\mu\nu}}_{\stackrel{(B.12)}{=}0} = 0,\end{aligned} \tag{5.2.21}$$

gdyż pierwsze dwa wyrazy sumują się do zera dzięki antysymetrii tensora $X^{\mu\nu}$. Zatem:

$$(\bar{\psi}\gamma_\mu D_\nu\psi)X^{\mu\nu} = \boxed{\psi\psi X\varphi} - (\bar{\psi}\overleftarrow{D}_\mu\gamma_\nu\psi)X^{\mu\nu} \tag{5.2.22}$$

Ostatnie wyrażenie możemy zapisać w następujący sposób (zbierając pochodne do pełnej dywergencji i korzystając z antysymetrii $X^{\mu\nu}$):

$$\begin{aligned}(\bar{\psi}\overleftarrow{D}_\mu\gamma_\nu\psi)X^{\mu\nu} &= [D_\mu(\bar{\psi}\gamma_\nu\psi)]X^{\mu\nu} - (\bar{\psi}\gamma_\nu D_\mu\psi)X^{\mu\nu} \\ &= -(\bar{\psi}\gamma_\nu\psi)]D_\mu X^{\mu\nu} + (\bar{\psi}\gamma_\mu D_\nu\psi)X^{\mu\nu} + (\text{div}) \\ &= \boxed{\psi\psi\varphi\varphi D} + \boxed{\psi\psi\psi\psi} + (\bar{\psi}\gamma_\mu D_\nu\psi)X^{\mu\nu} + (\text{div}).\end{aligned} \tag{5.2.23}$$

Podstawiając powyższy wynik do równania (5.2.20), przenosząc wyrażenia $(\bar{\psi}\gamma_\mu D_\nu\psi)X^{\mu\nu}$ na jedną stronę i pomijając pełne dywergencje otrzymujemy:

$$(\bar{\psi}\gamma_\mu D_\nu\psi)X^{\mu\nu} \sim \boxed{\psi\psi X\varphi} + \boxed{\psi\psi\psi\psi} + \boxed{\psi\psi\varphi\varphi D} \tag{5.2.24}$$

Reasumując, wszystkie operatory tej klasy są zależne od wyrażeń należących do klas: $\boxed{\psi\psi X\varphi}$, $\boxed{\psi\psi\psi\psi}$, $\boxed{\psi\psi\varphi\varphi D}$

5.2.3 Operatory postaci $\boxed{\psi\psi\varphi D}$

W tej klasie nie występują wyrażenia niezmiennicze względem transformacji cechowania i Lorentza.

W rozkładzie iloczynów tensorowych reprezentacji grupy SU(2) pojedynczy singlet występuje wyłącznie w $\hat{2} \otimes \hat{2}$, czyli w poszukiwanym operatorze wystąpić muszą pola $\psi_L \psi_R \varphi$. Z zachowania hiperładunku wynika, iż jedyne dopuszczone operatory (por. z Tabelą 1) to:

$$(\tilde{\varphi}^\dagger q)u^*, \quad (\varphi^\dagger q)d^*, \quad (\varphi^\dagger l)e^*, \quad + h.c.$$

lub ich sprzężenia hermitowskie. Rozważamy zatem wyrażenia postaci

$$\psi_R^* (\varphi^\dagger \psi_L) D \tag{5.2.25}$$

lub

$$\psi_R^* (\tilde{\varphi}^\dagger \psi_L) D \tag{5.2.26}$$

Niezmienniczość tych kombinacji wynika w przypadku (5.2.25) wprost z prawa transformacyjnego:

$$\varphi^\dagger \psi_L \to \varphi^\dagger U^\dagger U \psi_L = \varphi^\dagger \psi_L$$

zaś w przypadku (5.2.26) ze wzoru (B.16). Wynika zeń, iż dla dowolnych macierzy o wyznaczniku równym 1, a zatem i dla reprezentacji fundamentalnej SU(2), iż $(U^T \varepsilon U)_{il} = \varepsilon^{jk} U_{ji} U_{kl} = \varepsilon^{il}$, czyli

$$\tilde{\varphi}^\dagger \psi_L = -\varphi^T \varepsilon \psi_L \to -\varphi U^T \varepsilon U \psi_L = \tilde{\varphi}^\dagger \psi_L$$

Struktura lorentzowska W obu wypadkach struktura lorentzowska analizowanych wyrażeń jest następująca:

$$(\tfrac{1}{2}, 0) \otimes (\tfrac{1}{2}, 0) \otimes (\tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{2}) = \oplus(., \tfrac{1}{2})$$

Powyższy rozkład nie zawiera singletu, czyli nie istnieją niezmienniki transformacji Lorentza i cechowania o żądanym składzie.

5.2.4 Operatory postaci $\boxed{\psi\psi\varphi DD}$

Wszystkie operatory tej klasy okażą się liniowo zależne od operatorów innych klas.

Struktura grup cechowania jest taka sama jak w klasie $\boxed{\psi\psi\varphi D}$ powyżej. Struktura lorentzowska przedstawia się następująco:

$$\begin{aligned}(\tfrac{1}{2}, 0) \otimes (\tfrac{1}{2}, 0) \otimes (\tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{2}) \otimes (\tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{2}) &= [(0,0) \oplus (1,0)] \otimes [(0,0) \oplus (1,0) \oplus (0,1) \oplus (1,1)] \\ &= (0,0) \oplus (0,0) \oplus (1,0) \oplus (2,0) \oplus (1,1) \oplus (0,1) \oplus (1,1) \\ &\quad \oplus (2,1)\end{aligned} \tag{5.2.27}$$

Dopuszcza ona istnienie 2 niezależnych singletów. Są to

$$\bar{\psi}_L \psi_R \varphi D_\mu D^\mu \qquad \bar{\psi}_L \sigma_{\mu\nu} \psi_R \varphi D^\mu D^\nu$$

i analogicznie dla $\tilde{\varphi}$.

Redukcja Korzystając z reguły Leibniza i pomijając pełne dywergencje, wybieramy tylko operatory, w których pochodne nie działają na pole $\bar{\psi}$, otrzymując w ogólnym wypadku (pamiętając o antysymetrii $\sigma_{\mu\nu}$, która czyni zależnymi operatory z pochodnymi zamienionymi miejscami):

$$(\bar{\psi}_L \sigma_{\mu\nu} \psi_R)(D^\mu D^\nu \varphi) \tag{5.2.28}$$
$$(\bar{\psi}_L \sigma_{\mu\nu} D^\mu D^\nu \psi_R)\varphi \tag{5.2.29}$$
$$(\bar{\psi}_L \sigma_{\mu\nu} D^\mu \psi_R)(D^\nu \varphi) \tag{5.2.30}$$
$$(\bar{\psi}_L D_\mu D^\mu \psi_R)\varphi \tag{5.2.31}$$
$$(\bar{\psi}_L D_\mu \psi_R)(D^\mu \varphi) \tag{5.2.32}$$
$$(\bar{\psi}_L \psi_R)(D_\mu D^\mu \varphi) \tag{5.2.33}$$

W operatorach (5.2.28) i (5.2.29) pochodne wyrazić można poprzez tensory pól cechowania (zależne od reprezentacji do której należą pola fermionowe), co prowadzi do następujących tożsamości dla pierwszego z nich:

$$\begin{aligned}(\bar{\psi}_L \sigma_{\mu\nu} \psi_R)(D^\mu D^\nu \varphi) &= \tfrac{1}{2}(\bar{\psi}_L \sigma_{\mu\nu} \psi_R)([D^\mu, D^\nu]\varphi) = \tfrac{1}{2}(\bar{\psi}_L \sigma_{\mu\nu} \psi_R)(ig\mathcal{W}^{\mu\nu} + ig'\mathcal{B}^{\mu\nu})\varphi \\ &\sim \boxed{\psi\psi X\varphi}\end{aligned} \tag{5.2.34}$$

Dla drugiego operatora otrzymujemy:

$$(\bar{\psi}_L \sigma_{\mu\nu} D^\mu D^\nu \psi_R)\varphi = \sum_k (\bar{\psi}_L \sigma_{\mu\nu} X_k^{\mu\nu} \psi_R)\varphi \sim \boxed{\psi\psi X\varphi} \tag{5.2.35}$$

Problem operatora (5.2.30) sprowadzić można do redukcji wyrażenia (5.2.32) przy wykorzystaniu wzoru

$$\gamma_\mu \gamma_\nu = -\gamma_\nu \gamma_\mu + 2\eta_{\mu\nu} I_4 \Rightarrow \sigma_{\mu\nu} = i\eta_{\mu\nu} I_4 - i\gamma_\nu \gamma_\mu \tag{5.2.36}$$

czyli (w ostatnim kroku korzystamy z równań ruchu):

$$\begin{aligned}(\bar{\psi}_L \sigma_{\mu\nu} D^\mu \psi_R)(D^\nu \varphi) &= i(\bar{\psi}_L D_\mu \psi_R)(D^\mu \varphi) - i(\bar{\psi}_L \gamma_\nu \not{D} \psi_R)(D_\nu \varphi) \\ &= i(\bar{\psi}_L D_\mu \psi_R)(D^\mu \varphi) + \boxed{\psi\psi\varphi\varphi D}\end{aligned} \tag{5.2.37}$$

Podobnie postąpimy z operatorem (5.2.31) - wykorzystując powyższy trick oraz równania ruchu i komutator pochodnych kowariantnych:

$$\begin{aligned}D_\mu D^\mu \psi = D_\nu \eta^{\nu\mu} D_\mu \psi &\overset{(5.2.36)}{=} \not{D} \underbrace{\not{D}\psi}_{\sum \psi\varphi} + \tfrac{i}{2}\sigma^{\nu\mu} \underbrace{[D_\nu, D_\mu]\psi}_{X_{\mu\nu}\psi} \\ &= \sum \underbrace{\not{D}\psi}_{\sum \psi\varphi} \varphi + \sum \gamma^\nu \psi D_\nu \varphi + \tfrac{i}{2}\sigma^{\nu\mu} X_{\nu\mu}\psi\end{aligned} \tag{5.2.38}$$

czyli

$$\bar{\psi}_L D_\mu D^\mu \psi_R \varphi = \boxed{\psi\psi\varphi\varphi\varphi} + \boxed{\psi\psi\varphi\varphi D} + \boxed{\psi\psi X\varphi} \tag{5.2.39}$$

Eliminacja wyrażenia (5.2.32) wymaga nieco dłuższego rachunku:

$$\begin{aligned}(\bar{\psi}D_\mu\psi)(D^\mu\varphi) &= (\bar{\psi}D_\nu\eta^{\nu\mu}\psi)(D_\mu\varphi) = (\bar{\psi}D_\nu\tfrac{1}{2}\{\gamma^\nu,\gamma^\mu\}\psi)(D_\mu\varphi)\\ &= \tfrac{1}{2}(\bar{\psi}\not{D}\gamma^\mu\psi)(D_\mu\varphi) + \tfrac{1}{2}(\bar{\psi}\gamma^\mu\not{D}\psi)(D_\mu\varphi) =\\ &= \boxed{\psi\psi\varphi\varphi D} + \tfrac{1}{2}D_\nu[(\bar{\psi}\gamma^\nu\gamma^\mu\psi)(D_\mu\varphi)] - \tfrac{1}{2}(\bar{\psi}\overleftarrow{\not{D}}\gamma^\mu\psi)(D_\mu\varphi)+\\ &\quad - \tfrac{1}{2}(\bar{\psi}\gamma^\nu\gamma^\mu\psi)(D_\nu D_\mu\varphi)\end{aligned} \tag{5.2.40}$$

zaś

$$(\bar{\psi}\gamma^\nu\gamma^\mu\psi)(D_\nu D_\mu\varphi) = (\bar{\psi}(-i)\sigma^{\nu\mu}\psi)(\sum_k X^k_{\nu\mu}\varphi) + \underbrace{(\bar{\psi}\psi)(D^\mu D_\mu\varphi)}_{(5.2.33)} \tag{5.2.41}$$

czyli

$$(\bar{\psi}_L D_\mu\psi_R)(D^\mu\varphi) = \boxed{\psi\psi\varphi\varphi D} + \boxed{\psi\psi X\varphi} + \boxed{\psi\psi\varphi} + \boxed{\psi\psi\varphi\varphi\varphi} + \boxed{\psi\psi\psi\psi}, \tag{5.2.42}$$

gdyż operator (5.2.33) redukuje się na mocy równania ruchu dla pola φ:

$$(\bar{\psi}_L\psi_R)(D_\mu D^\mu\varphi) = \boxed{\psi\psi\varphi} + \boxed{\psi\psi\varphi\varphi\varphi} + \boxed{\psi\psi\psi\psi} \tag{5.2.43}$$

Podsumowuje to redukcję operatorów klasy $\boxed{\psi\psi\varphi DD}$, które są zależne od operatorów klas $\boxed{\psi\psi\varphi\varphi D}$, $\boxed{\psi\psi X\varphi}$, $\boxed{\psi\psi\varphi}$, $\boxed{\psi\psi\varphi\varphi\varphi}$, $\boxed{\psi\psi\psi\psi}$.

5.2.5 Operatory postaci $\boxed{\psi\psi\varphi\varphi}$

W tej klasie występuje tylko jeden niezmienniczy ze względu na transformacje cechowania i Lorentza operator, łamiący zasadę zachowania liczby leptonowej. Przeanalizujemy tu niezmienniczość typowych wyrażeń, które będziemy wykorzystywać w dalszej części pracy, bez powtarzania użytych tu argumentów. Ich podstawą będzie wnioskowanie zawarte w Dodatku C, w którym opisujemy zachowywanie pewnych ogólnych rodzajów operatorów przez unitarne transformacje cechowania dowolnej grupy Liego.

Wśród iloczynów tensorowych reprezentacji grupy SU(2) pojedynczy singlet występuje w $\hat{2}\otimes\hat{2}$ (3.1.1), zaś 2 singlety w $\hat{2}\otimes\hat{2}\otimes\hat{2}\otimes\hat{2}$ (3.1.7), a zatem dopuszczone są wyrażenia postaci:

$$\psi_L\psi_L\varphi\varphi, \quad \psi_R\psi_R\varphi\varphi$$

Z symetrii ze względu na działanie grupy SU(3) wynika, iż pola fermionowe to albo dwa wzajemnie sprzężone pola kwarków albo dwa dowolne leptony.

- Dwa kwarki
  - Dwa kwarki lewoskrętne
    Zachowanie hiperładunku wymaga, by operator był postaci $q^*q\varphi^*\varphi$ co prowadzi

do następujących niezmienników[6]

$$(q^\dagger q)(\varphi^\dagger\varphi), \quad (q^\dagger\tau^I q)(\varphi^\dagger\tau^I\varphi)$$

- Dwa kwarki prawoskrętne
  Symetria $U(1)_Y$ dopuszcza następujące operatory (ich niezmienniczość ze względu na transformacje cechowania grupy SU(2) została już uzasadniona poniżej równania (5.2.26)):

  $$(d^\dagger u)(\varphi^\dagger\tilde{\varphi}), \quad (u^\dagger u)(\varphi^\dagger\varphi), \quad (d^\dagger d)(\varphi^\dagger\varphi)$$

  Pierwszy z nich jest jednak równy zeru gdyż identyczne pola φ zwężone są za pomocą antysymetrycznej macierzy.

- Dwa leptony
  Zachowanie hiperładunku ogranicza nas do następujących wyrażeń:

  - dla prawoskrętnych leptonów w rozkładzie rozważanego iloczynu tensorowego reprezentacji SU(2) występuje 1 singlet

    $$e^*e(\varphi^\dagger\varphi) \tag{5.2.45}$$

  - z kolei dla lewoskrętnych leptonów otrzymujemy po 2 niezmienniki działania grupy SU(2)

    $$(l^\dagger l)(\varphi^\dagger\varphi), \quad (l^\dagger\varphi)(\varphi^\dagger l) \tag{5.2.46}$$

    oraz łamiące liczbę leptonową wyrażenia[7]

    $$(l_{p_1}^T\varepsilon l_{p_2})(\tilde{\varphi}^\dagger\varphi), \quad (l_{p_1}^T\tilde{\varphi}^*)(\tilde{\varphi}^\dagger l_{p_2}) \tag{5.2.47}$$

    z których pierwsze jest równe zeru, gdyż identyczne pola φ zwężone są w nim za pomocą antysymetrycznej macierzy.

---

[6] Analizując operatory (4.1.1) wybieraliśmy bazę w podprzestrzeni iloczynu tych samych reprezentacji co powyżej spośród wyrażeń innej postaci, co podyktowane było łatwością uzasadnienia faktu rozpinania przez nie całej podprzestrzeni niezmienniczej. Zastosowanie generatorów reprezentacji pozwala na zapis niezmienników bez jawnego wypisywania indeksów składowych grupowych i jest konwencją stosowaną od dziesięcioleci. Moglibyśmy również zdecydować się na bazę opartą o wyrażenia sklasyfikowane w Dodatku C:

$$(q^\dagger\tau^I\varphi)(\varphi^\dagger\tau^I q), \quad (q^\dagger\tau^I q)(\varphi^\dagger\tau^I\varphi) \tag{5.2.44}$$

O równoważności wszystkich tych wyborów stanowi tożsamość (B.11).

[7] W ogólności spośród 3 niezmienników postaci $(\Phi_1^T\varepsilon\Phi_2)(\Phi_3^T\varepsilon\Phi_4)$, dla danych czterech pól Φ_i będących dubletami $SU(2)$, tylko 2 są niezależne, o czym stanowi następująca tożsamość:

$$\varepsilon_{ij}\varepsilon_{kl} = \varepsilon_{ik}\varepsilon_{jl} + \varepsilon_{il}\varepsilon_{jk}$$

Struktura lorentzowska Mamy do czynienia z mnożonymi przez skalary obiektami dwóch rodzajów:

- iloczynem $\psi^*_{L/R}\psi_{L/R}$ - nie niosącym singletu lorentzowskiego iloczynie
$$(\tfrac{1}{2},0)\otimes(0,\tfrac{1}{2})=(\tfrac{1}{2},\tfrac{1}{2})$$
- iloczynem pól leptonów lewoskrętnych ll, zawierającym 1 singlet:
$$(\tfrac{1}{2},0)\otimes(\tfrac{1}{2},0)=(0,0)\oplus(1,0)$$
postaci l^Tl (przypomnijmy tu, że objaśnienia stosowanych oznaczeń zebrane są na s.13).

Pozostawia to jedyny niezmienniczy operator tej klasy (łamiący zasadę zachowania liczby leptonowej):

$$(l^T_{p_1}\tilde{\varphi}^*)(\tilde{\varphi}^\dagger l_{p_2}) \tag{5.2.48}$$

5.2.6 Operatory postaci $\boxed{\psi\psi\varphi\varphi D}$

Część operatorów tej klasy okaże się liniowo zależna od operatorów innych klas, pozostawiając 8 niezależnych wyrażeń.

Struktura reprezentacji grup cechowania jest identyczna jak dla klasy $\boxed{\psi\psi\varphi\varphi}$. Struktura lorentzowska ma następujący charakter:

- wyrażenia $\psi^*_{L/R}\psi_{L/R}D$:
$$(\tfrac{1}{2},0)\otimes(0,\tfrac{1}{2})\otimes(\tfrac{1}{2},\tfrac{1}{2})=(0,0)\oplus(0,1)\oplus(0,1)\oplus(1,1)$$
zawierają 1 singlet postaci $\bar{\psi}_{L/R}\gamma^\mu\psi_{L/R}D_\mu$
- wyrażenie llD:
$$(\tfrac{1}{2},0)\otimes(\tfrac{1}{2},0)\otimes(\tfrac{1}{2},\tfrac{1}{2})=\bigoplus(\cdot,\tfrac{1}{2})$$
nie zawiera singletu lorentzowskiego.

Redukcja Stosując regułę Leibniza i pomijając pełne dywergencje wybieramy tylko operatory w których pochodne nie działają na pole φ^*, otrzymując w ogólnym wypadku wyrażenia postaci:

$$(\bar{\psi}\overleftarrow{\not{D}}\psi)(\varphi^\dagger\varphi) \tag{5.2.49}$$
$$(\bar{\psi}\not{D}\psi)(\varphi^\dagger\varphi) \tag{5.2.50}$$
$$(\bar{\psi}\gamma^\mu\psi)(\varphi^\dagger D_\mu\varphi) \tag{5.2.51}$$

Na mocy równań ruchu dla odpowiedniego pola fermionowego (lub równania sprzężonego) (5.2.49) i (5.2.50) wyrażają się poprzez operatory klasy $\boxed{\psi\psi\varphi\varphi\varphi}$.

Operatory (5.2.51), do których równania ruchu sprowadziły już inne wyrażenia i które traktujemy jako część bazy liniowo niezależnych operatorów są następujące:

$$(\bar{q}\gamma^{\mu}q)(\varphi^{\dagger}D_{\mu}\varphi) \tag{5.2.52}$$

$$(\bar{q}\gamma^{\mu}\tau^{I}q)(\varphi^{\dagger}\tau^{I}D_{\mu}\varphi) \tag{5.2.53}$$

$$(\bar{d}\gamma^{\mu}u)(\varphi^{\dagger}D_{\mu}\tilde{\varphi}) \tag{5.2.54}$$

$$(\bar{u}\gamma^{\mu}u)(\varphi^{\dagger}D_{\mu}\varphi) \tag{5.2.55}$$

$$(\bar{d}\gamma^{\mu}d)(\varphi^{\dagger}D_{\mu}\varphi) \tag{5.2.56}$$

$$(\bar{e}\gamma^{\mu}e)(\varphi^{\dagger}D_{\mu}\varphi) \tag{5.2.57}$$

$$(\bar{l}\gamma^{\mu}l)(\varphi^{\dagger}D_{\mu}\varphi) \tag{5.2.58}$$

$$(\bar{l}\gamma^{\mu}\tau^{I}l)(\varphi^{\dagger}\tau^{I}D_{\mu}\varphi) \tag{5.2.59}$$

5.2.7 Operatory postaci $\boxed{\psi\psi\varphi\varphi\varphi}$

W tej klasie występują 3 niezależne operatory niezmiennicze względem transformacji cechowania i Lorentza.

Analizując rozkłady iloczynów tensorowych reprezentacji SU(2), zauważamy, że 2 singlety wystepują w iloczynie $\hat{2} \otimes \hat{2} \otimes \hat{2} \otimes \hat{2}$ ((3.1.7)), co w tej klasie dopuszcza tylko operatory postaci $\psi_R\psi_L\varphi\varphi\varphi$. Z warunku zachowania symetrii SU(3) wynika, iż fermiony to albo dwa wzajemnie sprzężone pola kwarków albo dwa dowolne leptony.

- Dwa kwarki
  Symetria $U(1)_Y$ dopuszcza następujące wyrażenia (po 2 singlety działania grupy $SU(2)$ dla każdej kombinacji pól - ich postać już uzasadnialiśmy):

  $$[u^{\dagger}(\tilde{\varphi}^{\dagger}q)](\varphi^{\dagger}\varphi), \quad [u^{\dagger}(\varphi^{\dagger}q)](\tilde{\varphi}^{\dagger}\varphi) \tag{5.2.60}$$

  $$[d^{\dagger}(\varphi^{\dagger}q)](\varphi^{\dagger}\varphi), \quad [d^{\dagger}(\tilde{\varphi}^{\dagger}q)](\varphi^{\dagger}\tilde{\varphi}) \tag{5.2.61}$$

  Wyrażenia należące do drugiej pary są równe 0, gdyż identyczne pola φ lub φ^* zwężone są za pomocą antysymetrycznej macierzy.

- Dwa leptony
  Zachowanie hiperładunku wymaga by niezmiennicze operatory tej klasy miały następujący skład (dla każdej kombinacji pól występują po dwa wyrażenia niezmiennicze względem działania grupy $SU(2)$):

  $$e^{*}(\varphi^{\dagger}l)(\varphi^{\dagger}\varphi), \quad e^{*}(\tilde{\varphi}^{\dagger}l)(\varphi^{\dagger}\tilde{\varphi}) \tag{5.2.62}$$

  Podobnie jak poprzednio, drugi operator jest równy 0. Poza nimi pozostaje operator zbudowany z trzech niesprzężonych pól φ - w jego wypadku dwa singlety SU(2), analogiczne do powyższych, są identyczne

  $$e(\tilde{\varphi}^{\dagger}l)(\tilde{\varphi}^{\dagger}\varphi) \tag{5.2.63}$$

  Jest on jednak równy 0, gdyż identyczne pola φ zwężone są za pomocą antysymetrycznej macierzy.

Struktura lorentzowska Mamy do czynienia z mnożonym przez skalary obiektem $\psi^*_R\psi_L$ - zawierającym jeden singlet iloczynem

$$(\tfrac{1}{2},0)\otimes(\tfrac{1}{2},0)=(0,0)\oplus(1,0)$$

Odpowiadają mu ostatecznie następujące operatory niezmiennicze:

$$[\bar{u}(\tilde{\varphi}^\dagger q)](\varphi^\dagger\varphi) \tag{5.2.64}$$

$$[\bar{d}(\varphi^\dagger q)](\varphi^\dagger\varphi) \tag{5.2.65}$$

$$[\bar{e}(\varphi^\dagger l)](\varphi^\dagger\varphi) \tag{5.2.66}$$

5.2.8 Operatory postaci $\boxed{\psi\psi X\varphi}$

Do tej klasy należy 8 niezależnych operatorów niezmienniczych względem transformacji cechowania i Lorentza.

1. $\boxed{\psi\psi G\varphi}$

   Spośród kombinacji pól Modelu Standardowego prowadzących do różnych iloczynów reprezentacji grupy SU(2) (np. $\psi_L\psi_L\varphi\sim\hat{2}\otimes\hat{2}\otimes\hat{2}$) narzucenie niezmienniczości względem jej działania pozostawia nam 1 singlet pochodzący z iloczynu $\hat{2}\otimes\hat{2}$ (3.1.1), a zatem operatory tej klasy zawierają pola $\psi_L\psi_R\varphi$.

   Wśród rozważanych tu iloczynów tensorowych reprezentacji grupy SU(3) jedyny, pojedynczy singlet występuje wyłącznie w iloczynie $\hat{\hat{3}}\otimes\hat{3}\otimes\hat{8}$ (3.1.25), czyli pola fermionowe to wzajemnie sprzężone pola kwarków (niekoniecznie identycznych).

   Z zachowania hiperładunku (por. Tab.1) wynika, iż jedyne pozostające operatory to:

$$d^\dagger\mathcal{G}(\varphi^\dagger q) \tag{5.2.67}$$

$$u^\dagger\mathcal{G}(\tilde{\varphi}^\dagger q) \tag{5.2.68}$$

2. $\boxed{\psi\psi W\varphi}$

   Analizując niezmienniczość względem działania grupy SU(2) zauważamy, że singlet pojawia się wyłącznie w $\hat{2}\otimes\hat{2}\otimes\hat{3}$ ((3.1.6)), zatem operatory zawierają pola $\psi_R\psi_L$.

   Z zachowania symetrii SU(3) wynika, że pola fermionowe to albo dwa wzajemnie sprzężone pola kwarków albo dwa dowolne leptony, gdyż pojedynczy nietrywialny singlet występuje wyłącznie w iloczynie reprezentacji $\hat{\hat{3}}\otimes\hat{3}$ (3.1.14).

   Narzucenie symetrii $U(1)_Y$ pozostawia operatory:

$$d^\dagger\mathcal{W}(\varphi^\dagger q) \tag{5.2.69}$$

$$u^\dagger\mathcal{W}(\tilde{\varphi}^\dagger q) \tag{5.2.70}$$

$$e^*\mathcal{W}(\varphi^\dagger l) \tag{5.2.71}$$

3. $\boxed{\psi\psi B\varphi}$

Ze względu na niezmienniczość tensora $B_{\mu\nu}$ pod działaniem reprezentacji wszystkich grup operatory te mają tę samą strukturę grupową co klasa $\boxed{\psi\psi\varphi D}$. Jedyne dopuszczone wyrażenia to:

$$u^\dagger \mathcal{B}(\tilde{\varphi}^\dagger q) \tag{5.2.72}$$

$$d^\dagger \mathcal{B}(\varphi^\dagger q) \tag{5.2.73}$$

$$e^* \mathcal{B}(\varphi^\dagger l) \tag{5.2.74}$$

Struktura lorentzowska Wszystkie wyrażenia niezmiennicze ze względu na działanie reprezentacji grup cechowania mają postać $\bar{\psi}_R \psi_L X \varphi$. Odpowiada to zawierającemu jeden singlet iloczynowi:

$$\begin{aligned}(\tfrac{1}{2},0)\otimes(\tfrac{1}{2},0)\otimes[(0,1)\oplus(1,0)] &= [(0,0)\oplus(1,0)]\otimes[(0,1)\oplus(1,0)] \\ &= (0,0)\oplus(1,0)\oplus(2,0)\oplus(0,1)\oplus(1,0)\oplus(1,1)\end{aligned} \tag{5.2.75}$$

Niezmiennikiem jest tu $\psi_R \sigma^{\mu\nu} \psi_L X_{\mu\nu} \varphi$. Prowadzi to do następujących operatorów:

$$\bar{d}\sigma^{\mu\nu}\lambda^A(\varphi^\dagger q)G^A_{\mu\nu} \tag{5.2.76}$$

$$\bar{u}\sigma^{\mu\nu}\lambda^A(\varphi^T \varepsilon q)G^A_{\mu\nu} \tag{5.2.77}$$

$$\bar{d}\sigma^{\mu\nu}(\varphi^\dagger \tau^I q)W^I_{\mu\nu} \tag{5.2.78}$$

$$\bar{u}\sigma^{\mu\nu}(\tilde{\varphi}^\dagger \tau^I q)W^I_{\mu\nu} \tag{5.2.79}$$

$$\bar{e}\sigma^{\mu\nu}(\varphi^\dagger \tau^I l)W^I_{\mu\nu} \tag{5.2.80}$$

$$\bar{u}\sigma^{\mu\nu}(\tilde{\varphi}^\dagger q)B_{\mu\nu} \tag{5.2.81}$$

$$\bar{d}\sigma^{\mu\nu}(\varphi^\dagger q)B_{\mu\nu} \tag{5.2.82}$$

$$\bar{e}\sigma^{\mu\nu}(\varphi^\dagger l)B_{\mu\nu} \tag{5.2.83}$$

Nie występują w nich pochodne, więc za pomocą równań ruchu nie można sprowadzić ich do innych klas.

5.3 Podsumowanie klasyfikacji operatorów zawierających pola fermionowe i bozonowe

Otrzymaliśmy ujętą w Tabeli 5 bazę 19 liniowo niezależnych operatorów, zawierających pola bozonowe i fermionowe oraz zachowujących liczbę leptonową. Ich niezależność łatwo stwierdzić, zauważając, że składają się z różnych pól. Również pary typu $(\bar{q}\gamma^\mu q)(\varphi^\dagger D_\mu \varphi)$ - $(\bar{q}\gamma^\mu \tau^I q)(\varphi^\dagger \tau^I D_\mu \varphi)$ odpowiadają w świetle tożsamości (B.11) bazom dwóch operatorów $(\bar{q}\gamma^\mu q)(\varphi^\dagger D_\mu \varphi)$ i $(\bar{q}_i \gamma^\mu q_j)(\varphi^\dagger_j D_\mu \varphi_i)$ (gdzie jawnie zaznaczyliśmy zwężenie indeksów izospinu). Drugie wyrażenie jest jawnie niezależne od pierwszego, chociażby ze względu na to, iż występuje w niej iloczyn $\bar{q}_1 \gamma^\mu q_2$, nieobecny w $(\bar{q}\gamma^\mu q)(\varphi^\dagger D_\mu \varphi)$. Również i w tym wypadku rząd równań ruchu (w pochodnych kowariantnych) uniemożliwia związanie nimi wypisanych tu operatorów. W Tabeli 5 wypisujemy jawnie dowolne w ogólności indeksy generacji poszczególnych pól fermionowych.

$\boxed{\psi\psi\varphi\varphi D}$	$\boxed{\psi\psi\varphi\varphi\varphi}$	$\boxed{\psi\psi X\varphi}$
$(\bar{q}_{p_1}\gamma^\mu q_{p_2})(\varphi^\dagger D_\mu\varphi)$	$[\bar{u}_{p_1}(\tilde{\varphi}^\dagger q_{p_2})](\varphi^\dagger\varphi)$	$\bar{d}_{p_1}\sigma^{\mu\nu}\lambda^A(\varphi^\dagger q_{p_2})G^A_{\mu\nu}$
$(\bar{q}_{p_1}\gamma^\mu\tau^I q_{p_2})(\varphi^\dagger\tau^I D_\mu\varphi)$	$[\bar{d}_{p_1}(\varphi^\dagger q_{p_2})](\varphi^\dagger\varphi)$	$\bar{u}_{p_1}\sigma^{\mu\nu}\lambda^A(\tilde{\varphi}^\dagger q_{p_2})G^A_{\mu\nu}$
$(\bar{d}_{p_1}\gamma^\mu u_{p_2})(\varphi^\dagger D_\mu\tilde{\varphi})$	$[\bar{e}_{p_1}(\varphi^\dagger l_{p_2})](\varphi^\dagger\varphi)$	$\bar{d}_{p_1}\sigma^{\mu\nu}(\varphi^\dagger\tau^I q_{p_2})W^I_{\mu\nu}$
$(\bar{u}_{p_1}\gamma^\mu u_{p_2})(\varphi^\dagger D_\mu\varphi)$		$\bar{u}_{p_1}\sigma^{\mu\nu}(\tilde{\varphi}^\dagger\tau^I q_{p_2})W^I_{\mu\nu}$
$(\bar{d}_{p_1}\gamma^\mu d_{p_2})(\varphi^\dagger D_\mu\varphi)$		$\bar{e}_{p_1}\sigma^{\mu\nu}(\varphi^\dagger\tau^I l_{p_2})W^I_{\mu\nu}$
$(\bar{e}_{p_1}\gamma^\mu e_{p_2})(\varphi^\dagger D_\mu\varphi)$		$\bar{u}_{p_1}\sigma^{\mu\nu}(\tilde{\varphi}^\dagger q_{p_2})B_{\mu\nu}$
$(\bar{l}_{p_1}\gamma^\mu l_{p_2})(\varphi^\dagger D_\mu\varphi)$		$\bar{d}_{p_1}\sigma^{\mu\nu}(\varphi^\dagger q_{p_2})B_{\mu\nu}$
$(\varphi^\dagger l_{p_1})\gamma^\mu(\bar{l}_{p_2}D_\mu\varphi)$		$\bar{e}_{p_1}\sigma^{\mu\nu}(\varphi^\dagger l_{p_2})B_{\mu\nu}$

Tabela 5: Niezależne operatory wymiaru 6, zawierające pola bozonowe i fermionowe.

Poza tym wyznaczyliśmy jeden niezmienniczy ze względu na transformacje Lorentza i cechowania operator wymiaru 5:

$$(l^T\tilde{\varphi}^*)(\tilde{\varphi}^\dagger l) \tag{5.3.1}$$

który nie zachowuje liczby leptonowej.

6 Operatory złożone z pól fermionowych

W przypadku samych pól fermionowych niemożliwe jest zbudowanie operatora $\sim (GeV)^5$, natomiast wyrażenia postaci $\boxed{\psi\psi\psi\psi}$ mają wymiar $(GeV)^6$ - tylko te będziemy rozważać. Zajmując się najpierw strukturą grup cechowania, wstępnie podzielimy je ze względu na działanie reprezentacji grupy SU(3) - na operatory tej klasy mogą składać się następujące wyrażenia (przez Q oznaczymy pola kwarków, zaś przez L - leptonów):

6.1 Cztery pola kwarków $\boxed{QQQQ}$

W przypadku operatorów tej postaci konieczne jest algebraiczne rozwiązanie sprzężonych zależności między reprezentacjami grupy SU(3) i hiperładunkami. Oznaczmy przez n_Q liczbę pól $Q = q, u, d$ występujących w iloczynie, zaś przez $\bar{n}_Q$ liczbę pól $Q^* = q^*, u^*, d^*$. Reprezentacje grupy SU(2) jako rzeczywiste narzucają jedynie warunek, iż

$$(n_q + \bar{n}_q) \text{ jest parzyste} \tag{6.1.2}$$

Analizując możliwe reprezentacje grupy SU(3) zauważamy (s. 18), że podwójny singlet występuje tylko w rozkładzie iloczynu $\hat{3} \otimes \hat{3} \otimes \hat{\bar{3}} \otimes \hat{\bar{3}}$ (tożsamość (3.1.28)), a zatem

$$\sum_{q'=q,u,d} n_{q'} = 2 = \sum_{q'=q,u,d} \bar{n}_{q'} \tag{6.1.3}$$

Niezmienniczość ze względu na transformację cechowania grupy $U(1)_Y$ wiąże liczby pól następująco:

$$\tfrac{1}{6}(n_q - \bar{n}_q) + \tfrac{2}{3}(n_u - \bar{n}_u) - \tfrac{1}{3}(n_d - \bar{n}_d) = 0 \tag{6.1.4}$$

Podstawiając do drugiego równania otrzymane z (6.1.3) związki

$$n_d = 2 - n_q - n_u$$

i

$$\bar{n}_d = 2 - \bar{n}_q - \bar{n}_u$$

otrzymujemy warunek w postaci:

$$(n_q - \bar{n}_q) + 2(n_u - \bar{n}_u) = 0 \tag{6.1.5}$$

Ponieważ $\forall_i n_i \geqslant 0$, możliwe są następujące przypadki:

- $n_q = \bar{n}_q$, zatem $n_u = \bar{n}_u$ oraz $n_d = \bar{n}_d$, zaś ogólne liczby kwarków i antykwarków sumują się do 2. W przypadku operatorów czterofermionowych istotna jest potencjalna przynależność operatorów do różnych generacji, stąd jawnie wypiszemy odpowiadające im indeksy p. Uwzględniając na razie wyłącznie strukturę reprezentacji grupy SU(3) – każdemu zestawowi pól odpowiadają dwie niezmiennicze kombinacje – oraz pomijając operatory sprzężone do danych, otrzymujemy:

$$(q^\dagger_{p_1} q_{p_2})(q^\dagger_{p_3} q_{p_4}) \quad (q^\dagger_{p_1} \lambda^A q_{p_2})(q^\dagger_{p_3} \lambda^A q_{p_4}) \tag{6.1.6}$$
$$(q^\dagger_{p_1} q_{p_2})(u^\dagger_{p_3} u_{p_4}) \quad (q^\dagger_{p_1} \lambda^A q_{p_2})(u^\dagger_{p_3} \lambda^A u_{p_4}) \tag{6.1.7}$$
$$(q^\dagger_{p_1} q_{p_2})(d^\dagger_{p_3} d_{p_4}) \quad (q^\dagger_{p_1} \lambda^A q_{p_2})(d^\dagger_{p_3} \lambda^A d_{p_4}) \tag{6.1.8}$$
$$(u^\dagger_{p_1} u_{p_2})(u^\dagger_{p_3} u_{p_4}) \quad (u^\dagger_{p_1} \lambda^A u_{p_2})(u^\dagger_{p_3} \lambda^A u_{p_4}) \tag{6.1.9}$$
$$(u^\dagger_{p_1} u_{p_2})(d^\dagger_{p_3} d_{p_4}) \quad (u^\dagger_{p_1} \lambda^A u_{p_2})(d^\dagger_{p_3} \lambda^A d_{p_4}) \tag{6.1.10}$$
$$(d^\dagger_{p_1} d_{p_2})(d^\dagger_{p_3} d_{p_4}) \quad (d^\dagger_{p_1} \lambda^A d_{p_2})(d^\dagger_{p_3} \lambda^A d_{p_4}) \tag{6.1.11}$$

  Niezmienniczość operatorów w drugiej kolumnie wynika z (C.2) . Zauważmy, że na mocy wzoru (B.11) w przypadku czterech pól, wśród których dwa różnią się co najwyżej generacjami (sprzężenie zespolone rozróżnia tu pola - przynależą one do różnych reprezentacji grupy SU(3)), drugi singlet w danym wierszu sprowadza się do kombinacji wyrażeń postaci pierwszego – w parach (6.1.6), (6.1.9) i (6.1.11) niezależny w tym sensie jest zatem tylko pierwszy operator. Dalej pominiemy te z powyższych indeksów generacyjnych, które nie są istotne.

- $|n_q - \bar{n}_q| = 1$, co łamie warunek (6.1.2).

- $n_q = 0$, $\bar{n}_q = 2$ co na podstawie (6.1.5) narzuca:

$$n_u - \bar{n}_u = 1 \tag{6.1.12}$$

co znaczy, biorąc pod uwagę założone wartości n_q oraz (6.1.3), że $n_u = 1$, zaś $\bar{n}_u = 0$ oraz $n_d = 1$ i $\bar{n}_d = 0$. Prowadzi to do operatora postaci (nie uwzględniającej struktury SU(2))[8]:

$$(q^\dagger u)(q^\dagger d) \quad (q^\dagger \lambda^A u)(q^\dagger \lambda^A d) \tag{6.1.13}$$

- wybór $n_q = 2$, $\bar{n}_q = 0$ jest przypadkiem zespolenie sprzężonym do poprzedniego, co, dzięki rzeczywistemu charakterowi równań narzucających więzy, odpowiadać musi operatorowi sprzężonemu do (6.1.13). Zgodnie z przyjętą konwencją, nie będzie on wypisywany jawnie wśród innych niezależnych operatorów.

Musimy jeszcze uwzględnić strukturę reprezentacji SU(2). W iloczynie $\hat{2} \otimes \hat{2}$ występuje jeden singlet, zaś w $\hat{2} \otimes \hat{2} \otimes \hat{2} \otimes \hat{2}$ dwa. Prowadzi to do następującej listy niezmienników działania grup cechowania w podklasie $\boxed{QQQQ}$ (tym razem zastosowana symbolika uwzględnia odpowiednie zwężenia wszystkich indeksów poza spinorowymi):

$$(q^\dagger_{p_1} q_{p_2})(q^\dagger_{p_3} q_{p_4}) \quad (q^\dagger_{p_1} \tau^I q_{p_2})(q^\dagger_{p_3} \tau^I q_{p_4}) \tag{6.1.14}$$

$$(q^\dagger q)(u^\dagger u) \quad (q^\dagger \lambda^A q)(u^\dagger \lambda^A u) \tag{6.1.15}$$

$$(q^\dagger q)(d^\dagger d) \quad (q^\dagger \lambda^A q)(d^\dagger \lambda^A d) \tag{6.1.16}$$

$$(u^\dagger_{p_1} u_{p_2})(u^\dagger_{p_3} u_{p_4}) \tag{6.1.17}$$

$$(u^\dagger u)(d^\dagger d) \quad (u^\dagger \lambda^A u)(d^\dagger \lambda^A d) \tag{6.1.18}$$

$$(d^\dagger_{p_1} d_{p_2})(d^\dagger_{p_3} d_{p_4}) \tag{6.1.19}$$

$$(q^{\dagger i}_{p_1} u_{p_2})\varepsilon^{ij}(q^{\dagger j}_{p_3} d_{p_4}) \quad (q^{\dagger i}_{p_1} \lambda^A u_{p_2})\varepsilon^{ij}(q^{\dagger j}_{p_3} \lambda^A d_{p_4}) \tag{6.1.20}$$

Uwaga Spośród czterech możliwych i w ogólności niezależnych niezmienników działania grupy SU(3)xSU(2) na iloczyn czterech kwarków lewoskrętnych:

$$(q^\dagger_{p_1} q_{p_2})(q^\dagger_{p_3} q_{p_4})$$
$$(q^\dagger_{p_1} \tau^I q_{p_2})(q^\dagger_{p_3} \tau^I q_{p_4})$$
$$(q^\dagger_{p_1} \lambda^A q_{p_2})(q^\dagger_{p_3} \lambda^A q_{p_4})$$
$$(q^\dagger_{p_1} \lambda^A \tau^I q_{p_2})(q^\dagger_{p_3} \lambda^A \tau^I q_{p_4})$$

dzięki tożsamości (B.11) tylko wyrażenia następujących dwóch postaci pozostają liniowo niezależne:

$$(q^\dagger_{p_1} q_{p_2})(q^\dagger_{p_3} q_{p_4})$$
$$(q^{\dagger i}_{p_1} q^j_{p_2})(q^{\dagger j}_{p_3} q^i_{p_4})$$

[8] W tym wypadku dwa niezmienniki działania grupy SU(3) jakie możemy zaproponować, są identyczne z dokładnością do generacji:

$$(q^\dagger_{p_1} u)(q^\dagger_{p_2} d) \sim (q^\dagger_{p_2} u)(q^\dagger_{p_1} d)$$

Zamiast nich wybrać możemy jednak bazę (6.1.14), która pozwala uniknąć jawnego wypisania indeksów grupowych.

6.2 Trzy pola kwarków i jedno pole leptonowe $\boxed{QQQL}$

Operatory o takim składzie łamią zasadę zachowania liczby leptonowej i barionowej, ale wypiszemy je dla kompletności analizy.

Wśród możliwych w tym wypadku iloczynów reprezentacji grupy SU(3) pojedyncze singlety zawierają wyłącznie $\hat{3} \otimes \hat{3} \otimes \hat{3}$ (3.1.22) i iloczyn do niego sprzężony - ostatecznie wobec rzeczywistości warunków związanych z pozostałymi grupami cechowania prowadzi on do operatorów sprzężonych względem uzyskanych z pierwszego iloczynu. Aby znaleźć postać singletu w tym rozkładzie, wykorzystajmy tożsamość (B.16) dla macierzy 3×3:

$$\varepsilon^{abc} M_{aa'} M_{bb'} M_{cc'} = \varepsilon^{a'b'c'} det M \tag{6.2.1}$$

Niezmiennik działania grupy SU(3) ma zatem w tym wypadku postać

$$\varepsilon^{abc} Q_1^a Q_2^b Q_3^c \tag{6.2.2}$$

gdyż

$$\varepsilon^{abc} Q_1^a Q_2^b Q_3^c \to \varepsilon^{abc} U_{aa'} U_{bb'} U_{cc'} Q_1^{a'} Q_2^{b'} Q_3^{c'} \overset{detU=1}{=} \varepsilon^{a'b'c'} Q_1^{a'} Q_2^{b'} Q_3^{c'} \tag{6.2.3}$$

Analizując strukturę pozostałych grup cechowania, ujmijmy niezmiennicze operatory tej klasy w Tabeli 6, ukazującej stopnie wnioskowania, gdy czytamy ją od lewej do prawej.

Pole leptonowe	Wniosek z zachowania symetrii	
	$SU(2)$ - rodzaj pól kwarkowych	$U(1)_Y$ - skład pełnego operatora
l	$qQ_RQ'_R$	$lqud, \quad l^*qdd$
	qqq	$lqqq$
e	qqQ_R	$eqqu$
	$Q_RQ'_RQ''_R$	$e^*ddd, \quad eduu$

Tabela 6: Klasyfikacja operatorów $\boxed{QQQL}$.

Uwzględniając strukturę grup cechowania otrzymujemy następujące operatory (indeksy izospinowe odpowiadają notacji macierzowej, zaś, tam gdzie to istotne, wypisujemy indeksy generacji p, natomiast nie rozważamy jeszcze indeksów spinorowych):

$$\varepsilon^{abc}(l^T \varepsilon q^a) u^b d^c \tag{6.2.4}$$

$$\varepsilon^{abc}(l_{p_1}^\dagger q_{p_2}^a) d_{p_3}^b d_{p_4}^c \tag{6.2.5}$$

$$\varepsilon^{abc}(l_{p_1}^T \varepsilon q_{p_2}^a)(q_{p_3}^{bT} \varepsilon q_{p_4}^c) \tag{6.2.6}$$

$$\varepsilon^{abc} e_{p_1} (q_{p_2}^{aT} \varepsilon q_{p_3}^b) u_{p_4}^c \tag{6.2.7}$$

$$\varepsilon^{abc} e_{p_1}^* d_{p_2}^a d_{p_3}^b d_{p_4}^c \tag{6.2.8}$$

$$\varepsilon^{abc} e_{p_1} d_{p_2}^a u_{p_3}^b u_{p_4}^c \tag{6.2.9}$$

W przypadku wyrażenia o składzie $lqqq$ symetria SU(2) wyróżnia dwie niezależne niezmiennicze kombinacje składowych multipletów, np. rozróżniane wyborem wektora q, przez który mnożony jest l.[9] Obie te kombinacje są jednak tej samej postaci, tj. (6.2.6).

6.3 Dwa pola kwarków i dwa pola leptonowe $\boxed{QQLL}$

Dzieląc możliwe przypadki ze względu na działanie grupy SU(2) i pamiętając, że singlety występują tylko w iloczynach parzystej liczby jej reprezentacji otrzymujemy podklasy:

1. $\boxed{Q_L Q_L L_L L_L}$ Operatory złożone z czterech pól lewoskrętnych.

   Porównanie hiperładunków prowadzi do wniosku, iż pola kwarków muszą być wzajemnie sprzężone, podobnie jak pola leptonów. Analogicznie jak wcześniej, występują tu następujące 2 singlety grupy SU(2):

   $$(q^\dagger q)(l^\dagger l) \quad (q^\dagger \tau^I q)(l^\dagger \tau^I l) \tag{6.3.1}$$

2. $\boxed{Q_L Q_L L_R L_R}$ Operatory złożone z dwóch pól kwarków lewoskrętnych i dwóch pól leptonów prawoskrętnych.

   Argumenty analogiczne do przytoczonych powyżej prowadzą do wniosku, że w tej klasie występuje jedno niezmiennicze wyrażenie, odpowiadające :

   $$(q^\dagger q)e^* e \tag{6.3.2}$$

3. $\boxed{Q_L Q_R L_L L_R}$ Operatory złożone ze wszystkich możliwych w tej klasie rodzajów pól.

   Porównanie wartości hiperładunków w Tabeli 1 natychmiast prowadzi nas do jednoznacznie wyznaczonego operatora dla każdego wyboru prawoskrętnego pola kwarkowego (pamiętajmy, że niezmienniczość ze względu na działanie grupy SU(3) wymaga, by jedno z pól kwarkowych było zespolenie sprzężone do pola ujętego w tej tabeli, zaś drugie nie). Jak zwykle nie umieszczamy jawnie operatorów sprzężonych do wypisanych. W tej klasie otrzymujemy dwa operatory niezmiennicze:

   $$[(q^\dagger l)d]e^* \tag{6.3.3}$$
   $$[(q^\dagger u)\varepsilon l^*]e \tag{6.3.4}$$

4. $\boxed{Q_L Q_L L_R L_R}$ Operatory złożone z dwóch pól kwarków prawoskrętnych i dwóch pól leptonów lewoskrętnych.

   Mając na uwadze te same zastrzeżenia co poprzednio, uzyskujemy wyrażenia:

   $$(u^\dagger u)(l^\dagger l) \tag{6.3.5}$$
   $$(d^\dagger d)(l^\dagger l) \tag{6.3.6}$$
   $$(u^\dagger_{p_1} d_{p_2})(l^\dagger_{p_3} \varepsilon l^*_{p_4}) \tag{6.3.7}$$

   przy czym ostatni operator łamie liczbę leptonową.

[9] To stwierdzenie oparte jest na tożsamości podanej w przypisie na s.38, wiążącej ze sobą trzy niezmiennicze wyrażenia uzyskiwane poprzez wybór par wzajemnie zwężanych przez ε multipletów.

5. $\boxed{Q_R Q_R L_R L_R}$ Operatory złożone z czterech pól prawoskrętnych.

   W sposób analogiczny jak powyżej, uzyskujemy operatory:

$$(u^\dagger u)e^* e \tag{6.3.8}$$

$$(d^\dagger d)e^* e \tag{6.3.9}$$

6.4 Jedno pole kwarków i trzy pola leptonowe $\boxed{QLLL}$

Operatory zawierające tylko jeden kwark nie mogą być niezmiennikami działania grupy SU(3), więc w tej klasie nie występuje żadne poszukiwane wyrażenie.

6.5 Tylko pola leptonowe $\boxed{LLLL}$

Operatory tej podklasy są trywialnymi niezmiennikami grupy SU(3). Dublety leptonowe l posiadają połówkowy hiperładunek, zaś singlety e - całkowity, zatem by zachować symetrię $U(1)_Y$, konieczne jest wystąpienie poszczególnych obiektów wyłącznie w parach $\bar{L}L$. Możliwe są przypadki

1. $\boxed{l^* l^* l l}$
   W tym iloczynie reprezentacji grupy SU(2) (3.1.7) występują dwa singlety, postaci (dla rozróżnienia w ogólności różnych pól fermionowych, jawnie wypisujemy indeksy generacji):
$$(l^\dagger_{p1} l_{p2})(l^\dagger_{p3} l_{p4}) \quad \text{i} \quad (l^\dagger_{p1} \tau^I l_{p2})(l^\dagger_{p3} \tau^I l_{p3}) \tag{6.5.1}$$
   Podobnie jak w przypadku operatorów zbudowanych z czterech pól kwarków drugie wyrażenie jest kombinacją liniową iloczynów o postaci pierwszego.

2. $\boxed{l^* e^* l e}$
   W operatorze o tym składzie istnieje jedna niezmiennicza ze względu na działanie grupy SU(2) kombinacja pól (należąca do iloczynu $\hat{2} \otimes \hat{2}$):
$$(l^\dagger l)e^* e \tag{6.5.2}$$

3. $\boxed{e^* e^* e e}$
   Operator tej postaci jest trywialnym singletem grupy SU(2).

Podsumowując narzuciwszy warunek niezmienniczości ze względu na transformacje cechowania, otrzymaliśmy następującą listę operatorów nie łamiących zasad zachowania liczby barionowej i leptonowej (na razie uwzględniamy tylko strukturę grupową):

$$(q^\dagger_{p_1} q_{p_2})(q^\dagger_{p_3} q_{p_4}) \qquad (q^\dagger_{p_1} \tau^I q_{p_2})(q^\dagger_{p_3} \tau^I q_{p_4}) \tag{6.5.3}$$
$$(q^\dagger q)(u^\dagger u) \qquad (q^\dagger \lambda^A q)(u^\dagger \lambda^A u) \tag{6.5.4}$$
$$(q^\dagger q)(d^\dagger d) \qquad (q^\dagger \lambda^A q)(d^\dagger \lambda^A d) \tag{6.5.5}$$
$$(u^\dagger_{p_1} u_{p_2})(u^\dagger_{p_3} u_{p_4}) \tag{6.5.6}$$
$$(u^\dagger u)(d^\dagger d) \qquad (u^\dagger \lambda^A u)(d^\dagger \lambda^A d) \tag{6.5.7}$$
$$(d^\dagger_{p_1} d_{p_2})(d^\dagger_{p_3} d_{p_4}) \tag{6.5.8}$$
$$(q^\dagger_{p_1} u_{p_2})\varepsilon(q^\dagger_{p_3} d_{p_4})^T \tag{6.5.9}$$
$$(q^\dagger q)(l^\dagger l) \qquad (q^\dagger \tau^I q)(l^\dagger \tau^I l) \tag{6.5.10}$$
$$(q^\dagger q)e^* e \tag{6.5.11}$$
$$(q^\dagger l)de^* \tag{6.5.12}$$
$$[(q^\dagger u)\varepsilon l^*]e \tag{6.5.13}$$
$$(u^\dagger u)(l^\dagger l) \tag{6.5.14}$$
$$(d^\dagger d)(l^\dagger l) \tag{6.5.15}$$
$$(u^\dagger u)e^* e \tag{6.5.16}$$
$$(d^\dagger d)e^* e \tag{6.5.17}$$
$$(l^\dagger_{p_1} l_{p_2})(l^\dagger_{p_3} l_{p_4}) \tag{6.5.18}$$
$$(l^\dagger l)e^* e \tag{6.5.19}$$
$$e^* e^* e e \tag{6.5.20}$$

oraz nie zachowujące tych liczb kwantowych operatory

$$(u^\dagger d)(l^\dagger \varepsilon l^*) \tag{6.5.21}$$
$$\varepsilon^{abc}(l^T \varepsilon q^a) u^b d^c \tag{6.5.22}$$
$$\varepsilon^{abc}(l^\dagger_{p_1} q^a_{p_2}) d^b_{p_3} d^c_{p_4} \tag{6.5.23}$$
$$\varepsilon^{abc}(l^T_{p_1} \varepsilon q^a_{p_2})(q^{bT}_{p_3} \varepsilon q^c_{p_4}) \tag{6.5.24}$$
$$\varepsilon^{abc} e_{p_1}(q^{aT}_{p_2} \varepsilon q^b_{p_3}) u^c_{p_4} \tag{6.5.25}$$
$$\varepsilon^{abc} e^*_{p_1} d^a_{p_2} d^b_{p_3} d^c_{p_4} \tag{6.5.26}$$
$$\varepsilon^{abc} e_{p_1} d^a_{p_2} u^b_{p_3} u^c_{p_4} \tag{6.5.27}$$

6.6 Struktura lorentzowska

W tej klasie mamy do czynienia z iloczynami izomorficznymi iloczynom reprezentacji właściwej grupy Lorentza następujących rodzajów (tu przez R oznaczamy reprezentację $(0, \frac{1}{2})$, zaś przez L - $(\frac{1}{2}, 0)$):

1. *RRLL*
   czyli iloczynowi

$$(0, \tfrac{1}{2}) \otimes (0, \tfrac{1}{2}) \otimes (\tfrac{1}{2}, 0) \otimes (\tfrac{1}{2}, 0) = (0,0) \oplus (1,0) \oplus (0,1) \oplus (1,1) \tag{6.6.1}$$

w którym występuje jeden singlet, postaci

$$(\psi_R^1\gamma_\mu\psi_L^2)(\psi_R^3\gamma^\mu\psi_L^4) \text{ lub } (\psi_L^1\gamma_\mu\psi_R^2)(\psi_L^3\gamma^\mu\psi_R^4) \tag{6.6.2}$$

W rozważanej klasie są to operatory:

$$(\bar{q}_{p_1}\gamma_\mu q_{p_2})(\bar{q}_{p_3}\gamma^\mu q_{p_4}) \qquad (\bar{q}_{p_1}\gamma_\mu\tau^I q_{p_2})(\bar{q}_{p_3}\gamma^\mu\tau^I q_{p_4}) \tag{6.6.3}$$

$$(\bar{q}u)(\bar{u}q) \qquad (\bar{q}\lambda^A u)(\bar{u}\lambda^A q) \tag{6.6.4}$$

$$(\bar{q}d)(\bar{d}q) \qquad (\bar{q}\lambda^A d)(\bar{d}\lambda^A q) \tag{6.6.5}$$

$$(\bar{u}_{p_1}\gamma_\mu u_{p_2})(\bar{u}_{p_3}\gamma^\mu u_{p_4}) \tag{6.6.6}$$

$$(\bar{u}\gamma_\mu u)(\bar{d}\gamma^\mu d) \qquad (\bar{u}\gamma_\mu\lambda^A u)(\bar{d}\lambda^A d) \tag{6.6.7}$$

$$(\bar{d}_{p_1}\gamma_\mu d_{p_2})(\bar{d}_{p_3}\gamma^\mu d_{p_4}) \tag{6.6.8}$$

$$(\bar{q}\gamma_\mu q)(\bar{l}\gamma^\mu l) \qquad (\bar{q}\gamma_\mu\tau^I q)(\bar{l}\gamma^\mu\tau^I l) \tag{6.6.9}$$

$$\varepsilon^{abc}(l^T\gamma_\mu u^a)\varepsilon(d^{bT}\gamma^\mu q^c) \qquad \varepsilon^{abc}(e_{p_1}^T\gamma_\mu q_{p_2}^{ai})\varepsilon^{ij}(u_{p_3}^{bT}\gamma^\mu q_{p_4}^{cj}) \tag{6.6.10}$$

$$(\bar{q}e)(\bar{e}q) \tag{6.6.11}$$

$$(\bar{q}d)(\bar{e}l) \tag{6.6.12}$$

$$(\bar{u}l)(\bar{l}u) \tag{6.6.13}$$

$$(\bar{d}l)(\bar{l}d) \tag{6.6.14}$$

$$(\bar{u}\gamma_\mu u)(\bar{e}\gamma^\mu e) \tag{6.6.15}$$

$$(\bar{d}\gamma_\mu d)(\bar{e}\gamma^\mu e) \tag{6.6.16}$$

$$(\bar{l}_{p_1}\gamma_\mu l_{p_2})(\bar{l}_{p_3}\gamma^\mu l_{p_4}) \tag{6.6.17}$$

$$(\bar{l}e)(\bar{e}l) \tag{6.6.18}$$

$$(\bar{e}\gamma_\mu e)(\bar{e}\gamma^\mu e) \tag{6.6.19}$$

2. *RRRR*
   czyli iloczynowi

$$\begin{aligned}(0,\tfrac{1}{2})\otimes(0,\tfrac{1}{2})\otimes(0,\tfrac{1}{2})\otimes(0,\tfrac{1}{2}) &= [(0,0)\oplus(0,1)]\otimes[(0,0)\oplus(0,1)]\\ &= (0,0)\oplus 2\cdot(0,1)\oplus(0,0)\oplus(0,1)\oplus(0,2)\end{aligned} \tag{6.6.20}$$

w którym występują dwa singlety. Zapiszmy je w postaci:[10]

$$(\psi_R^{1T}\psi_R^2)(\psi_R^{3T}\psi_R^4) \tag{6.6.21}$$

$$(\psi_R^{1T}\psi_R^4)(\psi_R^{3T}\psi_R^2) \tag{6.6.22}$$

[10] Analogicznie jak w przypadku dwóch singletów w iloczynie $\hat{2}\otimes\hat{2}\otimes\hat{2}\otimes\hat{2}$ reprezentacji grupy SU(2) (por. z przypisem na s.38) spośród trzech różnych niezmienniczych wyrażeń tej postaci tylko dwa są niezależne.

Zauważmy od razu, że jeśli dwa spośród rozważanych pól fermionowych należą do tych samych multipletów (choć być może różnych generacji), to oba odpowiednie niezmienniki mają tę samą postać. W analizowanej klasie prowadzi to do następujących operatorów:

$$(\bar{q}^i u)\varepsilon^{ij}(\bar{l}^j e) \qquad (\bar{q}^i e)\varepsilon^{ij}(\bar{l}^j u) \tag{6.6.23}$$

$$(\bar{q}^i_{p_1} u_{p_2})\varepsilon^{ij}(\bar{q}^j_{p_3} d_{p_4}) \qquad (\bar{q}^i_{p_1}\lambda^A u_{p_2})\varepsilon^{ij}(\bar{q}^j_{p_3}\lambda^A d_{p_4}) \tag{6.6.24}$$

$$\varepsilon^{abc}(e^T_{p_1} u^a_{p_4})(u^{bT}_{p_3} d^c_{p_2}) \tag{6.6.25}$$

Uwaga W wypadku wyrażeń (6.6.24) odeszliśmy od zapisu niezmienników w postaci zadanej wzorami (6.6.22) – $(\bar{q}^i_{p_1} u)\varepsilon^{ij}(\bar{q}^j_{p_2} d)$ i $(\bar{q}^{ai}_{p_2} u^b)\varepsilon^{ij}(\bar{q}^{bj}_{p_1} d^a)$, gdzie nawiasami oznaczyliśmy niezmienniki lorentzowskie. Stanowią one bazę równoważną do (6.6.24), którą wybieramy arbitralnie - łączy je wzór (B.11) i dowolność wyboru generacji do której należą pola $\bar{q}$. Operatory (6.6.25) ze względu na całkowitą antysymetrię ε^{abc} są identyczne z dokładnością do przynależności do generacji.

3. *RLLL*
czyli iloczynowi

$$(0, \tfrac{1}{2}) \otimes (\tfrac{1}{2}, 0) \otimes (\tfrac{1}{2}, 0) \otimes (\tfrac{1}{2}, 0) = \bigoplus(\cdot, \tfrac{1}{2}) \tag{6.6.26}$$

w którym nie występuje singlet lorentzowski.

4. *RRRL*
w którym również z analogicznych przyczyn nie znajdziemy niezmiennika transformacji Lorentza.

5. *LLLL*
analogicznym do przypadku *RRRR* i zawierającym tylko operatory o składzie $lqqq$:

$$\varepsilon^{abc}(l^T_{p_1}\varepsilon q^a_{p_2})(q^{bT}_{p_3}\varepsilon q^c_{p_4}) \qquad \varepsilon^{abc}(l^{Ti}_{p_1} q^{al}_{p_2})\varepsilon^{ij}\varepsilon^{kl}(q^{bkT}_{p_3} q^{cj}_{p_4}) \tag{6.6.27}$$

gdzie nawiasami oznaczyliśmy iloczyny w ramach składowych lorentzowskich. Analogicznie jak w wypadku operatorów (6.6.24) bazę operatorów niezmienniczych o tym składzie wybrać można w postaci:

$$\varepsilon^{abc}(l^T_{p_1}\varepsilon q^a_{p_2})(q^{bT}_{p_3}\varepsilon q^c_{p_4}) \tag{6.6.28}$$

$$\varepsilon^{abc}(l^T_{p_1}\varepsilon\tau^I q^a_{p_2})(q^{bT}_{p_3}\varepsilon\tau^I q^c_{p_4}) \tag{6.6.29}$$

zyskując na estetyce i czytelności oraz dopasowując się do stosowanych w wielu innych miejscach konwencji.

6.7 Podsumowanie klasyfikacji operatorów czterofermionowych

Otrzymaliśmy 25 liniowo niezależnych operatorów, zachowujących liczbę fermionową i leptonową, zestawionych w Tabeli 7. Ich niezależność wynika wprost z faktu, iż składają się z różnych pól. Jest tak również w wypadku operatorów postaci $(\bar{\psi}_1 T^A \psi_2)(\bar{\psi}_3 T^A \psi_4)$, odpowiadają one bowiem w świetle tożsamości (B.11) kombinacji liniowej dwóch operatorów $(\bar{\psi}_1 \psi_2)(\bar{\psi}_3 \psi_4)$ i $(\bar{\psi}_1 \psi_4)(\bar{\psi}_3 \psi_2)$, spośród których drugi jest funkcją jawnie niezależną od tej danej pierwszym wyrażeniem. W tym miejscu jawnie zaznaczymy wszystkie, w ogólności dowolne, indeksy generacji poszczególnych pól.

$\bar{L}L\bar{L}L$	$\bar{R}R\bar{R}R$
$(\bar{l}_{p_1}\gamma_\mu l_{p_2})(\bar{l}_{p_3}\gamma^\mu l_{p_4})$	$(\bar{e}_{p_1}\gamma_\mu e_{p_2})(\bar{e}_{p_3}\gamma^\mu e_{p_4})$
$(\bar{q}_{p_1}\gamma_\mu q_{p_2})(\bar{q}_{p_3}\gamma^\mu q_{p_4})$	$(\bar{u}_{p_1}\gamma_\mu u_{p_2})(\bar{u}_{p_3}\gamma^\mu u_{p_4})$
$(\bar{q}_{p_1}\gamma_\mu \tau^I q_{p_2})(\bar{q}_{p_3}\gamma^\mu \tau^I q_{p_4})$	$(\bar{d}_{p_1}\gamma_\mu d_{p_2})(\bar{d}_{p_3}\gamma^\mu d_{p_4})$
$(\bar{q}_{p_1}\gamma_\mu q_{p_2})(\bar{l}_{p_3}\gamma^\mu l_{p_4})$	$(\bar{u}_{p_1}\gamma_\mu u_{p_2})(\bar{e}_{p_3}\gamma^\mu e_{p_4})$
$(\bar{q}_{p_1}\gamma_\mu \tau^I q_{p_2})(\bar{l}_{p_3}\gamma^\mu \tau^I l_{p_4})$	$(\bar{d}_{p_1}\gamma_\mu d_{p_2})(\bar{e}_{p_3}\gamma^\mu e_{p_4})$
	$(\bar{u}_{p_1}\gamma_\mu u_{p_2})(\bar{d}_{p_3}\gamma^\mu d_{p_4})$
	$(\bar{u}_{p_1}\gamma_\mu \lambda^A u_{p_2})(\bar{d}_{p_3}\lambda^A d_{p_4})$
$\bar{L}R\bar{R}L$	$\bar{L}R\bar{L}R$
$(\bar{l}_{p_1} e_{p_2})(\bar{e}_{p_3} l_{p_4})$	$(\bar{q}^i_{p_1} u_{p_2})\varepsilon^{ij}(\bar{q}^j_{p_3} d_{p_4})$
$(\bar{u}_{p_1} l_{p_2})(\bar{l}_{p_3} u_{p_4})$	$(\bar{q}^i_{p_1}\lambda^A u_{p_2})\varepsilon^{ij}(\bar{q}^j_{p_3}\lambda^A d_{p_4})$
$(\bar{d}_{p_1} l_{p_2})(\bar{l}_{p_3} d_{p_4})$	$(\bar{q}_{p_1} u_{p_2})\varepsilon(\bar{l}_{p_3} e_{p_4})^T$
$(\bar{q}_{p_1} e_{p_2})(\bar{e}_{p_3} q_{p_4})$	$(\bar{q}^i_{p_1} e_{p_2})\varepsilon^{ij}(\bar{l}^j_{p_3} u_{p_4})$
$(\bar{q}_{p_1} u_{p_2})(\bar{u}_{p_3} q_{p_4})$	
$(\bar{q}_{p_1}\lambda^A u_{p_2})(\bar{u}_{p_3}\lambda^A q_{p_4})$	
$(\bar{q}_{p_1} d_{p_2})(\bar{d}_{p_3} q_{p_4})$	
$(\bar{q}_{p_1}\lambda^A d_{p_2})(\bar{d}_{p_3}\lambda^A q_{p_4})$	
$(\bar{q}_{p_1} d_{p_2})(\bar{e}_{p_3} l_{p_4})$	

Tabela 7: Złożone z pól fermionowych, niezależne operatory o wymiarze masowym 6, zachowujące liczby leptonową i barionową.

Poza nimi znaleźliśmy 5 niezmienniczych ze względu na transformacje cechowania i

Lorentza operatorów, łamiących zasadę zachowania liczby barionowej i leptonowej:

$$\varepsilon^{abc}(l_{p_1}^T \gamma_\mu u^b)_{p_2}\varepsilon(d_{p_3}^{cT}\gamma^\mu q_{p_4}^a) \tag{6.7.30}$$
$$\varepsilon^{abc}(e_{p_1}^T \gamma_\mu q_{p_2}^{ai})\varepsilon^{ij}(u_{p_3}^{cT}\gamma^\mu q_{p_4}^{bj}) \tag{6.7.31}$$
$$\varepsilon^{abc}(e_{p_1}^T u_{p_4}^a)(u_{p_3}^{bT} d_{p_2}^c) \tag{6.7.32}$$
$$\varepsilon^{abc}(l_{p_1}^T \varepsilon q_{p_2}^a)(q_{p_3}^{bT}\varepsilon q_{p_4}^c) \tag{6.7.33}$$
$$\varepsilon^{abc}(l_{p_1}^T \varepsilon\tau^I q_{p_2}^a)(q_{p_3}^{bT}\varepsilon\tau^I q_{p_4}^c) \tag{6.7.34}$$

7 Porównanie z pracą [1]

Operatory wybrane w niniejszej pracy jako baza liniowo niezależnych operatorów zawierających bozony tworzą podzbiór operatorów z pracy [1], łącznie z operatorem wymiaru 5 łamiącym zasadę zachowania liczby leptonowej, który wymieniony jest w równaniu (3.1) tej pracy. Poniżej zestawione są one z symbolami odpowiadającymi im w cytowanej pracy, według schematu: *operator=symbol* w pracy [1]

$$(l^T\tilde{\varphi}^*)(\tilde{\varphi}^\dagger l) \quad \text{wspomniany wyżej operator wymiaru 5} \tag{7.1}$$

$$(\bar{q}\gamma^\mu q)(\varphi^\dagger D_\mu\varphi) = -i\mathcal{O}_{\varphi q}^{(1)} \tag{7.2}$$
$$(\bar{q}\gamma^\mu\tau^I q)(\varphi^\dagger\tau^I D_\mu\varphi) = -i\mathcal{O}_{\varphi q}^{(3)} \tag{7.3}$$
$$(\bar{d}\gamma^\mu u)(\varphi^\dagger D_\mu\tilde{\varphi}) = i\mathcal{O}_{\varphi\varphi}^\dagger \tag{7.4}$$
$$(\bar{u}\gamma^\mu u)(\varphi^\dagger D_\mu\varphi) = -i\mathcal{O}_{\varphi u} \tag{7.5}$$
$$(\bar{d}\gamma^\mu d)(\varphi^\dagger D_\mu\varphi) = -i\mathcal{O}_{\varphi d} \tag{7.6}$$
$$(\bar{e}\gamma^\mu e)(\varphi^\dagger D_\mu\varphi) = -i\mathcal{O}_{\varphi e} \tag{7.7}$$
$$(\bar{l}\gamma^\mu l)(\varphi^\dagger D_\mu\varphi) = -i\mathcal{O}_{\varphi l}^{(1)} \tag{7.8}$$
$$(\varphi^\dagger l)\gamma^\mu(\bar{l}D_\mu\varphi) = -i\mathcal{O}_{\varphi l}^{(3)} \tag{7.9}$$
$$[\bar{u}(\tilde{\varphi}^\dagger q)](\varphi^\dagger\varphi) = \mathcal{O}_{u\varphi}^\dagger \tag{7.10}$$
$$[\bar{d}(\varphi^\dagger q)](\varphi^\dagger\varphi) = \mathcal{O}_{d\varphi}^\dagger \tag{7.11}$$
$$[\bar{e}(\varphi^\dagger l)](\varphi^\dagger\varphi) = \mathcal{O}_{e\varphi}^\dagger \tag{7.12}$$

$$\bar{d}\sigma^{\mu\nu}\lambda^A(\varphi^\dagger q)G^A_{\mu\nu} = \mathcal{O}^\dagger_{dG} \quad (7.13)$$
$$\bar{u}\sigma^{\mu\nu}\lambda^A(\tilde{\varphi}^\dagger q)G^A_{\mu\nu} = \mathcal{O}^\dagger_{uG} \quad (7.14)$$
$$\bar{d}\sigma^{\mu\nu}(\varphi^\dagger \tau^I q)W^I_{\mu\nu} = \mathcal{O}^{(3)\dagger}_{dW} \quad (7.15)$$
$$\bar{u}\sigma^{\mu\nu}(\tilde{\varphi}^\dagger \tau^I q)W^I_{\mu\nu} = \mathcal{O}^\dagger_{uW} \quad (7.16)$$
$$\bar{e}\sigma^{\mu\nu}(\varphi^\dagger \tau^I l)W^I_{\mu\nu} = \mathcal{O}^\dagger_{eW} \quad (7.17)$$
$$\bar{u}\sigma^{\mu\nu}(\tilde{\varphi}^\dagger q)B_{\mu\nu} = \mathcal{O}^\dagger_{uB} \quad (7.18)$$
$$\bar{d}\sigma^{\mu\nu}(\varphi^\dagger q)B_{\mu\nu} = \mathcal{O}^\dagger_{dB} \quad (7.19)$$
$$\bar{e}\sigma^{\mu\nu}(\varphi^\dagger l)B_{\mu\nu} = \mathcal{O}^\dagger_{eB} \quad (7.20)$$
$$(\varphi^\dagger\varphi)^3 = \mathcal{O}_\varphi \quad (7.21)$$
$$\varepsilon^{IJK}W^{I\ \nu}_{\mu}W^{J\ \rho}_{\nu}W^{K\ \mu}_{\rho} = \mathcal{O}_W \qquad \varepsilon^{IJK}\widetilde{W}^{I;\mu\nu}W^J_{\nu\delta}W^{K;\delta}_{\ \mu} = \mathcal{O}_{\widetilde{W}} \quad (7.22)$$
$$f^{ABC}G^{A\ \nu}_{\ \mu}G^{B\ \rho}_{\ \nu}G^{C\ \mu}_{\ \rho} = \mathcal{O}_G \qquad f^{ABC}\widetilde{G}^{A\ \nu}_{\ \mu}G^{B\ \delta}_{\ \nu}G^{C\ \mu}_{\ \delta} = \mathcal{O}_{\widetilde{G}} \quad (7.23)$$
$$\varphi^\dagger\tau^I\varphi W^I_{\mu\nu}B^{\mu\nu} = \mathcal{O}_{WB} \qquad \varphi^\dagger\tau^I\varphi W^I_{\mu\nu}\widetilde{B}^{\mu\nu} = \mathcal{O}_{\widetilde{W}B} \quad (7.24)$$
$$\varphi^\dagger\varphi W^I_{\mu\nu}W^{I\mu\nu} = 2\mathcal{O}_{\varphi W} \qquad \varphi^\dagger\varphi W^I_{\mu\nu}\widetilde{W}^{I\mu\nu} = \mathcal{O}_{\varphi\widetilde{W}} \quad (7.25)$$
$$\varphi^\dagger\varphi G^A_{\mu\nu}G^{A\mu\nu} = 2\mathcal{O}_{\varphi G} \qquad \varphi^\dagger\varphi G^A_{\mu\nu}\widetilde{G}^{A\mu\nu} = \mathcal{O}_{\varphi\widetilde{G}} \quad (7.26)$$
$$\varphi^\dagger\varphi B_{\mu\nu}B^{\mu\nu} = 2\mathcal{O}_{\varphi B} \qquad \varphi^\dagger\varphi B_{\mu\nu}\widetilde{B}^{\mu\nu} = \mathcal{O}_{\varphi\widetilde{B}} \quad (7.27)$$
$$(\varphi^\dagger\varphi)(D_\mu\varphi)^\dagger(D^\mu\varphi) = \mathcal{O}^{(1)}_\varphi \qquad [\varphi^\dagger(D^\mu\varphi)][(D_\mu\varphi)^\dagger\varphi] = \mathcal{O}^{(3)}_\varphi \quad (7.28)$$

Poza nimi w pracy [1] znajduje się 17 operatorów zawierających pola bozonowe, które w świetle przedstawionych tu obliczeń wyrażają się poprzez wyżej wypisane wyrażenia. Są to:

- Operator $\mathcal{O}_{\partial\varphi}$
- Operatory zawierające pochodne kowariantne działające na pole fermionowe, ponumerowane w [1] jako (3.30)–(3.37):

  $$\mathcal{O}_{lW}, \mathcal{O}_{lB}, \mathcal{O}_{eB}, \mathcal{O}_{qG}, \mathcal{O}_{qW}, \mathcal{O}_{qB}, \mathcal{O}_{uG}, \mathcal{O}_{uB}, \mathcal{O}_{dG}, \mathcal{O}_{dB}$$

  oraz opatrzone numerami (3.57) - (3.59):

  $$\mathcal{O}_{De}, \mathcal{O}_{\bar{D}e}, \mathcal{O}_{Du}, \mathcal{O}_{\bar{D}u}, \mathcal{O}_{Dd}, \mathcal{O}_{\bar{D}d}$$

Analogiczne zestawienie w przypadku operatorów czterofermionowych przedstawia się następująco:

$$(\bar{l}_{p_1}\gamma_\mu l_{p_2})(\bar{l}_{p_3}\gamma^\mu l_{p_4}) \sim \mathcal{O}^{(1)}_{ll} \quad (7.29)$$
$$(\bar{q}_{p_1}\gamma_\mu q_{p_2})(\bar{q}_{p_3}\gamma^\mu q_{p_4}) \sim \mathcal{O}^{(1,1)}_{qq} \qquad (\bar{q}_{p_1}\gamma_\mu\tau^I q_{p_2})(\bar{q}_{p_3}\gamma^\mu\tau^I q_{p_4}) \sim \mathcal{O}^{(1,3)}_{qq} \quad (7.30)$$
$$(\bar{q}\gamma_\mu q)(\bar{l}\gamma^\mu l) \sim \mathcal{O}^{(1)}_{lq} \qquad (\bar{q}\gamma_\mu\tau^I q)(\bar{l}\gamma^\mu\tau^I l) \sim \mathcal{O}^{(3)}_{lq} \quad (7.31)$$

$$(\bar{e}\gamma_\mu e)(\bar{e}\gamma^\mu e) \sim \mathcal{O}_{ee} \tag{7.32}$$
$$(\bar{u}_{p_1}\gamma_\mu u_{p_2})(\bar{u}_{p_3}\gamma^\mu u_{p_4}) \sim \mathcal{O}_{uu}^{(1)} \tag{7.33}$$
$$(\bar{d}_{p_1}\gamma_\mu d_{p_2})(\bar{d}_{p_3}\gamma^\mu d_{p_4}) \sim \mathcal{O}_{dd}^{(1)} \tag{7.34}$$
$$(\bar{u}\gamma_\mu u)(\bar{e}\gamma^\mu e) \sim \mathcal{O}_{eu} \tag{7.35}$$
$$(\bar{d}\gamma_\mu d)(\bar{e}\gamma^\mu e) \sim \mathcal{O}_{ed} \tag{7.36}$$
$$(\bar{u}\gamma_\mu u)(\bar{d}\gamma^\mu d) \sim \mathcal{O}_{ud}^{(1)} \qquad (\bar{u}\gamma_\mu \lambda^A u)(\bar{d}\gamma^\mu \lambda^A d) \sim \mathcal{O}_{ud}^{(8)} \tag{7.37}$$

$$(\bar{l}e)(\bar{e}l) \sim \mathcal{O}_{le} \tag{7.38}$$
$$(\bar{u}l)(\bar{l}u) \sim \mathcal{O}_{lu} \tag{7.39}$$
$$(\bar{d}l)(\bar{l}d) \sim \mathcal{O}_{ld} \tag{7.40}$$
$$(\bar{q}e)(\bar{e}q) \sim \mathcal{O}_{qe} \tag{7.41}$$
$$(\bar{q}u)(\bar{u}q) \sim \mathcal{O}_{qu}^{(1)} \qquad (\bar{q}\lambda^A u)(\bar{u}\lambda^A q) \sim \mathcal{O}_{qu}^{(8)} \tag{7.42}$$
$$(\bar{q}d)(\bar{d}q) \sim \mathcal{O}_{qd}^{(1)} \qquad (\bar{q}\lambda^A d)(\bar{d}\lambda^A q) \sim \mathcal{O}_{qd}^{(8)} \tag{7.43}$$
$$(\bar{q}d)(\bar{e}l) \sim \mathcal{O}_{qde} \tag{7.44}$$

$$(\bar{q}_{p_1}u_{p_2})\varepsilon(\bar{q}_{p_3}d_{p_4}) \sim \mathcal{O}_{qq}^{(1)} \qquad (\bar{q}_{p_1}\lambda^A u_{p_2})\varepsilon(\bar{q}_{p_3}\lambda^A d_{p_4}) \sim \mathcal{O}_{qq}^{(8)} \tag{7.45}$$
$$(\bar{q}^i u)\varepsilon^{ij}(\bar{l}^j e) \sim \mathcal{O}_{lq} \qquad (\bar{q}^i e)\varepsilon^{ij}(\bar{l}^i u) \sim \mathcal{O}_{lq}' \tag{7.46}$$

Operatora $\mathcal{O}_{lq}'$ zabrakło w pracy [1], ale pojawił się on już w literaturze, m.in. w artykule [16]. W publikacji [1] niepotrzebnie znalazły się z kolei operatory sprowadzające się na mocy wzoru (B.11) do wyrażeń tej samej postaci co odpowiedni operator $\mathcal{O}^{(1)}$:

$$\mathcal{O}_{ll}^{(3)}, \mathcal{O}_{qq}^{(8,1)}, \mathcal{O}_{qq}^{(8,3)}, \mathcal{O}_{uu}^{(8)}, \mathcal{O}_{dd}^{(8)}$$

Przypomnijmy, iż liniowo niezależne $\mathcal{O}_{qq}^{(1,1)}$ i $\mathcal{O}_{qq}^{(1,3)}$ rozpinają przestrzeń zawierającą też $\mathcal{O}_{qq}^{(8,1)}$ i $\mathcal{O}_{qq}^{(8,3)}$ pod warunkiem uwzględnienia wszystkich możliwych przyporządkowań indeksów zapachowych w rozważanych operatorach.

8 Podsumowanie

W przedstawionej pracy sklasyfikowaliśmy operatory o wymiarach masowych 5 i 6, mogące pojawiać się w teoriach efektywnych opartych na Modelu Standardowym, redukując listę wyrażeń zebranych w pracy [1] do minimalnej bazy operatorów liniowo niezależnych. Po opublikowaniu, nasza analiza powinna pomóc innym autorom w poprawnej analizie efektywnych rozszerzeń SM, dotychczas często rozważanych w oparciu o zbyt obszerną listę [1].

W szczególności, w pierwszych rozdziałach pracy przypomnieliśmy strukturę Modelu Standardowego i przedstawiliśmy schemat wnioskowania, używanego następnie przy klasyfikacji wszystkich operatorów. Dalej, w ramach właściwej analizy stworzyliśmy kompletną listę operatorów niezmienniczych ze względu na transformacje cechowania i Lorentza, redukując ją następnie poprzez zadane równaniami ruchu SM zależności zobrazowane na Rys. 1 na s. 17. Ostatecznie uzyskaliśmy minimalną bazę złożoną z 1 operatora wymiaru 5, niezachowującego globalnej liczby leptonowej oraz 64 niezależnych niezmienniczych wyrażeń wymiaru 6. Ostatnia grupa zawiera 15 operatorów nie zawierających pól fermionowych, 19 operatorów zawierających pola fermionowe i bozonowe lub pochodne kowariantne oraz 30 wyrażeń zbudowanych z czterech pól fermionowych, w tym 5 operatorów łamiących zasadę zachowania liczby barionowej i/lub leptonowej. Razem stanowi to bazę 59 operatorów zachowujących liczby barionową i leptonową oraz 6 wyrażeń je zmieniających.

Porównując otrzymany rezultat z pracą [1], wskazaliśmy symbole, którymi oznaczone zostały tam wyrażenia występujące i na naszej liście. Podaliśmy operator, jaki należy dodać do sklasyfikowanych tam obiektów, aby tworzyły one bazę oraz wyszczególniliśmy 22 operatory występujące w pracy [1], a będące zależnymi od innych.

A Zapis lagranżjanu teorii pola z cechowaniem wyłącznie za pomocą pól materii, tensorów pól cechowania i pochodnych kowariantnych

A.1 Określenie zagadnienia

Chcemy wykazać, że dowolna niezmiennicza względem cechowania gęstość funkcji Lagrange'a teorii pola z cechowaniem o zwartej grupie cechowania, która jest wielomianem pól "materii" $\Phi_i, i = 1..N$ i ich pochodnych oraz pól cechowania $A^I_\mu, I = 1..M$, wraz z ich pochodnymi może zostać zapisana jako wielomian pól materii, tensorów pól cechowania i ich pochodnych kowariantnych:

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}(\Phi_i, \partial_{\mu_1}...\partial_{\mu_n}\Phi_i, A^I_\mu, \partial_{\mu_1}...\partial_{\mu_m}A^I_\mu) = \mathcal{L}'(\Phi_i, D_{\mu_1}...D_{\mu_n}\Phi, X^I_{\mu\nu}, (D_{\mu_1}...D_{\mu_m}X_{\mu\nu})^I) \tag{A.1}$$

W niniejszym dodatku skorzystamy z oznaczenia na symetryzację tensora:

$$M_{(a_1,...,a_n)} = \frac{1}{n!} \sum_{\sigma=permutacje\{1..n\}} M_{a_{\sigma(1)},...,a_{\sigma(n)}}$$

Przypomnijmy postać transformacji cechowania w stosowanej w pracy konwencji:

$$\Phi \to \Phi' = e^{-ig\omega^I\tau^I}$$

$$A^I_\mu \to A'^I_\mu = A^I_\mu + \partial_\mu\omega^I + gf^{IJK}A^J_\mu\omega^K$$

Dalej konsekwentnie dla skrócenia zapisu pola cechowania i materii uwzględniamy jako "zerowe pochodne" pól cechowania i materii.

A.2 Konstrukcja

W celu przejścia do wyżej zdefiniowanej parametryzacji wykorzystamy następującą strategię[11]:

1. Wyzerujemy zsymetryzowane pochodne pól cechowania dowolnego rzędu (również samo pole cechowania) w wybranym punkcie x_0 za pomocą odpowiedniego wyboru cechowania w jakim wyrażana jest gęstość funkcji Lagrange'a.

2. Wyrazimy pochodne pola cechowania i ich pochodne występujące w lagranżjanie poprzez zsymetryzowane pochodne pól cechowania i pochodne tensora pola cechowania - uwzględniając znikanie tych pierwszych otrzymamy:

$$\partial_{\mu_1}...\partial_{\mu_n}A_\nu^I(x_0) = \frac{n!}{n+1}\partial_{(\mu_2}...\partial_{\mu_n}X^I_{\mu_1)\nu}(x_0)$$

3. Zapiszemy pochodne pól materii i tensorów pól cechowania poprzez pochodne kowariantne tych wielkości oraz zsymetryzowane pochodne pól cechowania, co dzięki obserwacji w pkt. 1 doprowadzi nas do żądanej postaci gęstości funkcji Lagrange'a w punkcie x_0:

$$\mathcal{L}(\Phi_i, \partial_{\mu_1}...\partial_{\mu_n}\Phi_i, A_\mu^I, \partial_{\mu_1}...\partial_{\mu_m}A_\mu^I) = \mathcal{L}''(\Phi_i(x_0), D_{\mu_1}...D_{\mu_n}\Phi_i(x_0), (D_{\mu_1}...D_{\mu_m}X_{\nu\rho})^I(x_0))$$

4. W dowolnym cechowaniu i dowolnym punkcie gęstość lagranżjanu $\mathcal{L}$ ma postać $\mathcal{L}$" z dokładnością do zsymetryzowanych pochodnych pól cechowania i samych pól cechowania. Jednak wyjściowa gęstość lagranżjanu $\mathcal{L}$ jest niezmiennicza ze względu na lokalne transformacje cechowania w każdym punkcie, zaś wspomniana transformacja zeruje w dowolnie wybranym punkcie x_0 zsymetryzowane pochodne pól cechowania i same pola cechowania zachowując (niezmiennicze ze względu na dowolną transformację cechowania) $\mathcal{L}$" bez zmian. Dodatkowe wyrażenia muszą zatem sumować się do 0, więc żądana równość zachodzi w całej czasoprzestrzeni.

W następnych punktach przeprowadzimy precyzyjniej naszkicowane tu kroki.

A.3 Znikanie zsymetryzowanych pochodnych

Wybierzmy przejście do nowych pól poprzez transformację cechowania zdefiniowaną jako

$$\omega^I = -A_\mu^I(x_0)(x-x_0)^\mu \tag{A.2}$$

wtedy

$$A'^I_\mu(x_0) = 0 \tag{A.3}$$

Następna t. cechowania

$$\omega_2^I = -\partial_\mu A_\nu^I(x_0)(x-x_0)^\mu(x-x_0)^\nu \tag{A.4}$$

[11] Pragnę podziękować dr hab. Pawłowi Nurowskiemu za zasugerowanie tej drogi rozumowania.

nie wpływa na wartość $A'^I_\mu(x_0)$, zaś zsymetryzowana pochodna dzięki tożsamościom $\omega_2^I(x_0) = 0$ i $\forall_\mu \partial_\mu \omega_2^I(x_0) = 0$

$$\partial_{(\mu} A'^I_{\nu)}(x_0) = \partial_{(\mu} A^I_{\nu)}(x_0) + \partial_{(\mu}\partial_{\nu)}\omega_2^I(x_0) - gf^{IJK}\{[\partial_{(\mu} A^J_{\nu)}](x_0)\omega_2^K(x_0) + A^J_{(\nu}(x_0)[\partial_{\mu)}\omega_2^K(x_0)]\} = 0 \tag{A.5}$$

W ten sposób iteracyjnie zeruje się zsymetryzowane pochodne pól cechowania dowolnego rzędu - procedura działa łatwo dzięki temu, że ostatnie wyrażenie w równaniu (A.5) ($\sim gf^{IJK}$) zawiera o jedną pochodną mniej, a więc nie generuje niezerowego wyrażenia z ω^K w punkcie x_0.

A.4 Zastąpienie pochodnych cząstkowych działających na pola cechowania przez tensory pola cechowania i ich pochodne

Chcemy wyrazić pochodne samego pola cechowania poprzez pewną kombinację pochodnych tensora pola cechowania, więc rozważmy najpierw różniczkowanie tensora pola cechowania:

$$\begin{aligned}
&n!\partial_{(\mu_2}...\partial_{\mu_n} X^I_{\mu_1)\nu} \equiv \partial_{\mu_2}...\partial_{\mu_n} X^I_{\mu_1\nu} + \partial_{\mu_1}\partial_{\mu_3}...\partial_{\mu_n} X^I_{\mu_2\nu} + ... + \partial_{\mu_1}...\partial_{\mu_{n-1}} X^I_{\mu_n\nu} \overset{\text{z def.}}{=} \\
&= n\partial_{\mu_1}...\partial_{\mu_n} A^I_\nu - \partial_{\mu_2}...\partial_{\mu_n}\partial_\nu A^I_{\mu_1} - ... - \partial_{\mu_1}...\partial_\nu A^I_{\mu_n} + (\partial_{\mu_1}...\partial_{\mu_n} A^I_\nu - \partial_{\mu_1}...\partial_{\mu_n} A^I_\nu) + \\
&\quad - gf^{IJK}[\partial_{\mu_2}...\partial_{\mu_n}(A^J_{\mu_1} A^K_\nu) + \partial_{\mu_1}\partial_{\mu_3}...\partial_{\mu_n}(A^J_{\mu_2} A^K_\nu) + ... + \partial_{\mu_1}...\partial_{\mu_{n-1}}(A^J_{\mu_n} A^K_\nu)] = \\
&= (n+1)\partial_{\mu_1}...\partial_{\mu_n} A^I_\nu - (n!)\partial_{(\mu_2}...\partial_{\mu_n}\partial_{\nu)} A^I_{\mu_1} - ... - (n!)\partial_{(\mu_1}...\partial_{\nu)} A^I_{\mu_n} - (n!)\partial_{(\mu_1}...\partial_{\mu_n)} A^I_\nu) + \\
&\quad - (n!)gf^{IJK}\partial_{(\mu_2}...\partial_{\mu_n}(A^J_{\mu_1)} A^K_\nu) = \\
&=: (n+1)\partial_{\mu_1}...\partial_{\mu_n} A^I_\nu - (n+1)!\partial_{(\mu_1}...\partial_{\mu_n} A^I_{\nu)} - gf^{IJK}\mathcal{Y}^{JK}
\end{aligned} \tag{A.6}$$

czyli

$$\partial_{\mu_1}...\partial_{\mu_n} A^I_\nu = (n!)\partial_{(\mu_1}...\partial_{\mu_n} A^I_{\nu)} + gf^{IJK}\mathcal{Y}^{JK} + \frac{n!}{n+1}\partial_{(\mu_2}...\partial_{\mu_n} F^I_{\mu_1)\nu} \tag{A.7}$$

Przyjrzyjmy się $\mathcal{Y}^{JK}$. Zmierzając do wyrażenia go poprzez zsymetryzowane pochodne, zauważmy, że:

$$\begin{aligned}
&M_{(a_1,...,a_n)} = \frac{1}{n}\sum_{k\in\{1..n\}} M_{(a_1,...,a_{k-1},a_{k+1},...,a_n),k} = \\
&= \frac{1}{n}\sum_{k_1\in\{1..n\}} \frac{1}{n-1}\sum_{k_2\in\{1..n\}\backslash k_1} ... \frac{1}{n-m+1}\sum_{k_m\in\{1..n\}\backslash\{k_1,...,k_{m-1}\}} M_{(a_1,...,a_{k_i-1},a_{k_i+1},...,a_n),k_1,...,k_m}
\end{aligned} \tag{A.8}$$

zatem

$$\mathcal{Y}^{JK} \sim \sum_{k\in\{\mu_1,...,\mu_n\}} \partial_{(\mu_2}...\partial_{\mu_n}(A^J_{\mu_1)} A^K_\nu) \sim \sum ... \sum [\partial_{(\rho_1}...\partial_{\rho_m} A_{\mu_1)}][\partial_{\sigma_1}...\partial_{\sigma_{m'}} A_\nu]$$

Jeśli wszystkie zsymetryzowane pochodne oraz samo pole A są równe 0 to wyrażenie $\mathcal{Y}^{JK} = 0$, a zatem:

$$\partial_{\mu_1}...\partial_{\mu_n} A^I_\nu(x_0) = \frac{n!}{n+1}\partial_{(\mu_2}...\partial_{\mu_n} X^I_{\mu_1)\nu}(x_0) \tag{A.9}$$

czyli również po zwężeniu z macierzami reprezentacji τ^I

$$\partial_{\mu_1}...\partial_{\mu_n}\mathcal{A}_\nu(x_0) = \frac{n!}{n+1}\partial_{(\mu_2}...\partial_{\mu_n}\mathcal{X}_{\mu_1)\nu}(x_0) \tag{A.10}$$

Reasumując, udało się wyrazić część wyrażeń zbudowanych z pól cechowania i ich pochodnych poprzez obiekty złożone z tensorów pól cechowania oraz ich pochodnych oraz wyzerować pozostałą część w punkcie x_0, czyli w tak wybranym cechowaniu pierwotna funkcja Lagrange'a

$$\begin{aligned}\mathcal{L}(x_0) &= \mathcal{L}(\Phi_i(x_0), \partial_{\mu_1}...\partial_{\mu_n}\Phi_i(x_0), A^I_\mu(x_0), \partial_{\mu_1}...\partial_{\mu_m}A^I_\mu(x_0)) = \\ &= \mathcal{L}'(\Phi_i(x_0), \partial_{\mu_1}...\partial_{\mu_n}\Phi_i(x_0), \partial_{\mu_1}...\partial_{\mu_m}X^I_{\nu\rho}(x_0))\end{aligned} \tag{A.11}$$

A.5 Zamiana pochodnych cząstkowych na kowariantne

Jeśli zamienimy w $\mathcal{L}'$ (A.11) zwykłe pochodne na kowariantne, to przyjmie on postać z równania (A.1), do której dążymy. Jak zauważymy, ta zamiana nie zmienia postaci funkcji Lagrange'a w punkcie x_0. W tym celu wykażemy najpierw indukcyjnie pośrednie przekształcenie postaci pochodnych pola materii:

$$\partial_{\mu_n}...\partial_{\mu_1}\Phi = D_{\mu_n}...D_{\mu_1}\Phi + \mathcal{Z} \tag{A.12}$$

gdzie $\mathcal{Z}$ jest kombinacją liniową iloczynów pochodnych pól cechowania i pochodnych kowariantnych pola materii:

$$\mathcal{Z} = \sum\prod \alpha_{kl}(\partial^k\mathcal{A}_{\rho_k})(D^l\Phi) \tag{A.13}$$

gdzie α to pewne stałe współczynniki, zaś dla skrócenia zapisu nie wypisaliśmy indeksów poszczególnych pochodnych. Później istotnym okaże się fakt, że zawsze k jest ściśle mniejsze od n. W tym dowodzie chodzi o wykazanie, iż po wydzieleniu złożenia samych pochodnych kowariantnych, resztę wyrażeń składających się na $\partial_{\mu_n}...\partial_{\mu_1}\Phi$ można sprowadzić do postaci $\mathcal{Z}$.

Dla pojedynczej pochodnej ($n = 1$) powyższe założenie indukcyjne jest spełnione:

$$\partial_\mu\Phi = (D_\mu - ig\mathcal{A}_\mu)\Phi = D_\mu\Phi - ig(\mathcal{A}_\mu)(\Phi) \tag{A.14}$$

Zakładając (A.12) i pamiętając iż, z definicji, pochodne kowariantne pól transformują się tak jak same pola, więc działa na nie taka sama pochodna kowariantna otrzymujemy:

$$\begin{aligned}\partial_{\mu_{n+1}}\partial_{\mu_n}...\partial_{\mu_1}\Phi &\overset{(A.12)}{=} (D_{\mu_{n+1}} - ig\mathcal{A}_{\mu_{n+1}})D_{\mu_n}...D_{\mu_1}\Phi + \partial_{\mu_{n+1}}\sum\prod\alpha_{kl}(\partial^k\mathcal{A}_{\rho_k})(D^l\Phi) \\ &= D_{\mu_{n+1}}D_{\mu_n}...D_{\mu_1}\Phi + \sum\prod\alpha_{kl}[(\partial_{\mu_{n+1}}\partial^k\mathcal{A}_{\rho_k})(D^l\Phi) + (\partial^k\mathcal{A}_{\rho_k})(D_{\mu_{n+1}}D^l\Phi) + \\ &\quad - ig(\partial^k\mathcal{A}_{\rho_k})(\mathcal{A}_{\mu_{n+1}})(D^l\Phi)] - ig(\mathcal{A}_{\mu_{n+1}})(D_{\mu_n}...D_{\mu_1}\Phi) \\ &= D_{\mu_{n+1}}D_{\mu_n}...D_{\mu_1}\Phi + \sum\prod\alpha_{k'l'}[(\partial^{k'}\mathcal{A}_{\rho_{k'}})(D^{l'}\Phi)]\end{aligned} \tag{A.15}$$

co dowodzi postaci rozkładu (A.12) dla dowolnego n.

Na mocy (A.10) otrzymujemy w punkcie x_0:

$$(\partial_{\mu_n}...\partial_{\mu_1}\Phi)(x_0) = \sum\prod \alpha'_{kl}(\partial_{(\mu_{k-1}}...\partial_{\mu_1}\mathcal{X}_{\mu_k)\nu})(x_0)(D^l\Phi)(x_0) \tag{A.16}$$

Udało nam się już pozbyć zwykłych pochodnych pól materii, spróbujmy domknąć zamianę zwykłych pochodnych na kowariantne, usuwając zwykłe pochodne tensorów pól cechowania. W ich wypadku

$$\partial_\mu X^I_{\nu\rho} = (D_\mu X_{\nu\rho})^I - igf^{IJK}A^J_\mu X^K_{\nu\rho} \tag{A.17}$$

Jak widać, we wzorze (A.12) przy zamianie Φ na $X^B_{\nu\rho}$ zmieni się wyłącznie struktura grupowa wyrażenia $\mathcal{Z}$ przy zachowaniu jego charakteru - dowód indukcyjny ma analogiczny przebieg jak poprzednio, prowadząc do wniosku:

$$\partial_{\mu_n}...\partial_{\mu_1}X^I_{\nu\rho} = (D_{\mu_n}...D_{\mu_1}X_{\nu\rho})^I + \sum\prod \alpha^{II_kJ_k}_{kl}(\partial^k A^{I_k}_{\delta_k})(D^l X^{J_k}_{\sigma_k\sigma'_k}) \tag{A.18}$$

By pozbyć się zwykłych pochodnych pól cechowania, wzór (A.9) również zastosować musimy indukcyjnie, dowodząc:

$$\partial_{\mu_n}...\partial_{\mu_1}X^I_{\nu\rho}(x_0) = (D_{\mu_n}...D_{\mu_1}X_{\nu\rho})^I(x_0) + \sum\prod \alpha_k(D^k X^{I_k}_{\sigma_k\sigma'_k})(x_0) \tag{A.19}$$

gdzie pominęliśmy potencjalnie skomplikowaną strukturę grupową iloczynu.
Dla $n = 1$:

$$\partial_\mu X^I_{\nu\rho}(x_0) \overset{(A.17)}{=} (D_\mu X_{\nu\rho})^I(x_0) - igf^{IJK}(A^J_\mu(x_0))(X^K_{\nu\rho})(x_0) \overset{(A.3)}{=} (D_\mu X_{\nu\rho})^I(x_0) \tag{A.20}$$

Zakładając, że (A.19) zachodzi dla wszystkich n $<$ m, rozważamy:

$$\begin{aligned}\partial_{\mu_m}\partial_{\mu_{m-1}}...\partial_{\mu_1}X^I_{\nu\rho}(x_0) &\overset{(A.18)}{=} (D_{\mu_m}...D_{\mu_1}X_{\nu\rho})^I(x_0) + \sum\prod \alpha^{I_kJ_k}_{kl}(\partial^k A^{I_k}_{\delta_k})(D^l X^{J_k}_{\sigma_k\sigma'_k})(x_0)\\ &\overset{(A.9)}{=} (D_{\mu_m}...D_{\mu_1}X_{\nu\rho})^I(x_0)+\\ &\quad + \sum\prod \alpha'^{I_kJ_k}_{kl}[\partial_{(\nu_{k-1}}...\partial_{\nu_1}X_{\nu_k)\delta_k}]^{I_k}(x_0)(D^l X^{J_k}_{\sigma_k\sigma'_k})(x_0)\end{aligned} \tag{A.21}$$

ale pod sumą zawsze $k < m$, a zatem na mocy (A.19):

$$\begin{aligned}\partial_{\mu_m}\partial_{\mu_{m-1}}...\partial_{\mu_1}X^I_{\nu\rho}(x_0) &= (D_{\mu_m}...D_{\mu_1}X_{\nu\rho})^I(x_0)+\\ &\quad + \sum\prod \alpha_{kl}(D^l X^{J_k}_{\sigma_k\sigma'_k})\{[D_{(\nu_{k-1}}...D_{\nu_1}X_{\nu_k)\delta_k}]^I(x_0)+\\ &\quad + \sum\prod \alpha_k(D^k X^{K_k}_{\sigma_k\sigma'_k}(x_0)\}\\ &= (D_{\mu_m}...D_{\mu_1}X_{\nu\rho})^I(x_0) + \sum\prod \alpha_{k'}(D^{k'}X^{J_{k'}}_{\sigma_{k'}\sigma'_{k'}})(x_0)\end{aligned} \tag{A.22}$$

co kończy dowód indukcyjny dla dowolnego m.

Podsumowując, udało się wyrazić pochodne tensorów pól cechowania wyłącznie poprzez pochodne kowariantne tychże obiektów, a zatem pochodne pól materii również dane są przez kombinacje pochodnych kowariantnych tych pól oraz pochodnych kowariantnych tensorów pól cechowania.

Ostatecznie

$$\begin{aligned}\mathcal{L}(x_0) &= \mathcal{L}(\Phi_i(x_0), \partial_{\mu_1}...\partial_{\mu_n}\Phi_i(x_0), A^I_\mu(x_0), \partial_{\mu_1}...\partial_{\mu_m}A^I_\mu(x_0)) \\ &= \mathcal{L}''(\Phi_i(x_0), D_{\mu_1}...D_{\mu_n}\Phi_i(x_0), \left(D_{\mu_1}...D_{\mu_m}X_{\nu\rho}\right)^I(x_0))\end{aligned} \tag{A.23}$$

Jak zauważyliśmy we wstępie, zapisanie niezmienniczej względem lokalnych transformacji cechowania gęstości lagranżjanu w postaci sumy dwóch wyrażeń, z których pierwsze również jest niezmiennicze, a drugie wynosi zero w dowolnie wybranym punkcie x_0 w pewnym cechowaniu oznacza, że drugie wyrażenie musi zerować się we wszystkich punktach. Ostatecznym wnioskiem jest, iż zamiast rozważać niezmiennicze względem lokalnych transformacji cechowania funkcje Lagrange'a wyrażone jako wielomiany w

$$\Phi_i, \partial_{\mu_1}...\partial_{\mu_n}\Phi_i, A^I_\mu, \partial_{\mu_1}...\partial_{\mu_m}A^I_\mu$$

można rozważać niezmiennicze względem lokalnych transformacji cechowania funkcje Lagrange'a wyrażone jako wielomiany w

$$\Phi_i, D_{\mu_1}...D_{\mu_n}\Phi, X^I_{\mu\nu}, \left(D_{\mu_1}...D_{\mu_m}X_{\mu\nu}\right)^I$$

B Konwencje i podstawowe tożsamości

Ostateczna baza operatorów wymiaru 5 i 6 jest niezależna od wyboru współczynników w poniższych wyrażeniach, ale zmieniają one m.in. część znaków w rachunkach. Stosujemy następującą konwencję:

- Komutatory generatorów grupy cechowania, generowanej przez $\{T^A\}$, wyznaczają stałe struktury algebry:
$$[T^A, T^B] = if^{ABC}T^C \tag{B.1}$$
W szczególności generatory reprezentacji fundamentalnej grupy $SU(2)$ są proporcjonalne do macierzy Pauliego $T^I = \frac{1}{2}\tau^I$, co prowadzi do stałych struktury ich algebry w postaci całkowicie antysymetrycznego symbolu Levi - Civity ε^{IJK}. Macierze Pauliego spełniają też relację:
$$\{\tau^I, \tau^J\} = 2\delta^{IJ}\mathrm{I} \tag{B.2}$$
Dla grupy SU(3) sens ma również zdefiniowanie całkowicie symetrycznych stałych d^{ABC}:
$$\{T^A, T^B\} = d^{ABC}T^C + \frac{1}{3}\delta^{AB}I_3 \tag{B.3}$$
Dalej poprzez T oznaczamy generatory reprezentacji fundamentalnej dowolnej grupy cechowania.

- Definiując tensor pola cechowania poprzez komutator pochodnych kowariantnych działających na pole materii
$$[D_\mu, D_\nu]\Phi = igX^A_{\mu\nu}T^A\Phi =: ig\mathcal{X}_{\mu\nu}\Phi \tag{B.4}$$
otrzymujemy jego następującą postać:
$$X^A_{\mu\nu} = \partial_\mu A^A_\nu - \partial_\nu A^A_\mu - gf^{ABC}A^B_\mu A^C_\nu \tag{B.5}$$

- Dla następującego działania pochodnej kowariantnej na tensor pola cechowania

$$(D_\mu X_{\nu\rho})^A = \delta^{AC}\partial_\mu X^C_{\nu\rho} + igf^{ABC}X^B_\mu X^C_{\nu\rho} \tag{B.6}$$

  komutator pochodnych kowariantnych w działaniu na tensor pola cechowania przyjmuje postać

$$([D_\mu, D_\nu]X_{\rho\sigma})^A = gf^{ABC}X^B_{\mu\nu}X^C_{\rho\sigma} \tag{B.7}$$

- Korzystać będziemy z następującej konwencji zapisu antysymetryzowanego iloczynu dwóch macierzy Diraca:

$$\sigma_{\mu\nu} = \tfrac{i}{2}[\gamma_\mu, \gamma_\nu] \tag{B.8}$$

- Tensor dualny do danego oznaczamy standardowo z dodatkową normalizacją:

$$\widetilde{X}^{\mu\nu} = \tfrac{1}{2}\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma}X_{\rho\sigma} \tag{B.9}$$

- Przyjmujemy następującą normalizację generatorów grup cechowania:

$$Tr\left(T^A T^B\right) = \tfrac{1}{2}\delta^{AB} \tag{B.10}$$

- W tej konwencji prawdziwa jest tożsamość wiążąca generatory reprezentacji fundamentalnych grup $SU(N)$:

$$T^A_{ij}T^A_{kl} = \tfrac{1}{2}\delta_{il}\delta_{kj} - \tfrac{1}{2N}\delta_{ij}\delta_{kl} \tag{B.11}$$

- Przy redukcji liczby liniowo niezależnych operatorów korzystać będziemy z tożsamości Bianchi:

$$D_\mu\widetilde{X}^{\mu\sigma} = 0 \quad\Leftrightarrow\quad \epsilon^{\mu\sigma\nu\rho}D_\mu X_{\nu\rho} = 0 \quad\Leftrightarrow\quad D_\mu X_{\nu\rho} + D_\nu X_{\rho\mu} + D_\rho X_{\mu\nu} = 0 \tag{B.12}$$

Fakt 1 Będziemy korzystać także z własności symetrii iloczynu dwóch wzajemnie dualnych tensorów antysymetrycznych. Wykażemy tu poprawność wzoru

$$X_{\mu\nu}\widetilde{X}^{\nu\rho} = -\tfrac{1}{4}\delta_\mu{}^\rho X_{\zeta\xi}\widetilde{X}^{\zeta\xi} \tag{B.13}$$

Wybierzmy zapożyczone z elektrodynamiki oznaczenia dla składowych ogólnego tensora antysymetrycznego $X_{\mu\nu}$:

$$X_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & -E_1 & -E_2 & -E_3 \\ E_1 & 0 & B_3 & -B_2 \\ E_2 & -B_3 & 0 & B_1 \\ E_3 & B_2 & -B_1 & 0 \end{pmatrix} \tag{B.14}$$

W tej notacji otrzymujemy:

$$\widetilde{X}^{\nu\rho} = \tfrac{1}{2}\epsilon^{\nu\rho\sigma\delta}X_{\sigma\delta} = \begin{pmatrix} 0 & B_1 & B_2 & B_3 \\ -B_1 & 0 & -E_3 & E_2 \\ -B_2 & E_3 & 0 & -E_1 \\ -B_3 & -E_2 & E_1 & 0 \end{pmatrix} = X_{\nu\rho}\{E \leftrightarrow -B\} \tag{B.15}$$

Teraz już bardzo łatwo przekonać się, że

$$X_{\mu\nu}\widetilde{X}^{\nu\rho} = (\vec{E} \cdot \vec{B})\delta_\mu{}^\rho$$

zaś prawa strona wykazywanego wzoru wynosi

$$X_{\alpha\beta}\widetilde{X}^{\alpha\beta} = -4(\vec{E} \cdot \vec{B})$$

co kończy dowód.

Fakt 2 We wnioskowaniu wykorzystujemy również tożsamości związane z wyznacznikiem. Zauważmy, że dla dowolnych macierzy $M_{n\times n}$ prawdziwa jest tożsamość:

$$\varepsilon^{a_1...a_n} M_{a_1 a'_1} ... M_{a_n a'_n} = \varepsilon^{a'_1...a'_n} detM \tag{B.16}$$

Wynika ona z definicji wyznacznika

$$detM = \sum_{\sigma\in S^n} sgn(\sigma) M_{\sigma(1)1} ... M_{\sigma(n)n} \tag{B.17}$$

który dla indeksów $\{a'_1, ..., a'_n\}$ w miejsce $\{1, ..., n\}$ daje wynik $\varepsilon^{a'_1...a'_n} detM$, o czym łatwo bezpośrednio się przekonać.

C Niezmienniki transformacji cechowania

Dowiedziemy tu niezmienniczości względem działania grupy cechowania SM tych spośród wykorzystanych w pracy wyrażeń, w przypadku których dowód ten jest bezpośrednim rozważeniem transformacji cechowania danego obiektu. Przeanalizujemy tu tylko działanie reprezentacji grup nieabelowych, analiza zachowania hiperładunku sprowadza się bowiem do prostego zsumowania hiperładunków pól występujących w danym operatorze, przy czym ładunki pól sprzężonych wchodzą do sumy z ujemnym znakiem. Dowody przeprowadzimy dla różnych pól należących do danej reprezentacji grupy cechowania - w niniejszej pracy bardzo często w danym wyrażeniu występują identyczne obiekty, jednak poprawne wnioskowanie poprzez rozkłady iloczynów tensorowych wymaga przeprowadzanej tu analizy.

Przeanalizujmy niezmienniki zbudowane z pól Φ, które następująco transformują się wedle tej samej unitarnej reprezentacji U pewnej grupy Liego:

$$\Phi \to \Phi' = U\Phi = e^{-ig\omega^A T^A}\Phi$$

W niniejszej klasyfikacji bardzo często wykorzystywane są operatory kilku rodzajów, których niezmienniczego charakteru dowodzimy poniżej. Dla większej przejrzystości wykorzystamy skrótowe oznaczenie form biliniowych (w rachunkach będą bowiem odgrywać wyłącznie statyczną rolę) $(A) := (\Phi_i^\dagger T^A \Phi_j)$, podobnie $([A,B]) := (\Phi_i^\dagger [T^A, T^B] \Phi_j)$.

- Wyrażenie $(\Phi_1^\dagger \Phi_2)$ transformuje się następująco:

$$(\Phi_1^\dagger \Phi_2) \to (\Phi_1^\dagger U^\dagger U \Phi_2) \overset{U^\dagger U = I}{=} (\Phi_1^\dagger \Phi_2) \tag{C.1}$$

- Wyrażenie $(\Phi_1^\dagger T^A \Phi_2)(\Phi_3^\dagger T^A \Phi_4)$ pod działaniem transformacji infinitezymalnej zmienia się o (uwzględniając tylko wyrażenia liniowe w parametrach transformacji):

$$\begin{aligned}
\delta_{(\Phi_1^\dagger T^A \Phi_2)(\Phi_3^\dagger T^A \Phi_4)} &= ig'\omega^B(\Phi_1^\dagger[T^B,T^A]\Phi_2)(\Phi_3^\dagger T^A\Phi_4) + ig'\omega^B(\Phi_1^\dagger T^A\Phi_2)(\Phi_3^\dagger[T^B,T^A]\Phi_4)\\
&= ig'\omega^B f^{BAC}[(C)(A)+(A)(C)]\\
&= ig'\omega^B[f^{BAC}+f^{BCA}](C)(A)\\
&= 0
\end{aligned} \tag{C.2}$$

- Infinitezymalna transformacja operatora postaci $f^{ABC}(\Phi_1^\dagger T^A\Phi_2)(\Phi_3^\dagger T^B\Phi_4)(\Phi_5^\dagger T^C\Phi_6)$ pozostawia nas z liniowym dodatkiem:

$$\begin{aligned}
\delta_{f^{ABC}(A)(B)(C)} &= i\omega^D f^{ABC}\{([D,A])(B)(C)+(A)([D,B])(C)+(A)(B)([D,C])\}\\
&= -\omega^D\{f^{ABC}f^{DAE}(E)(B)(C)+f^{ABC}f^{DBE}(A)(E)(C)\\
&\quad + f^{ABC}f^{DCE}(A)(B)(E)\}
\end{aligned} \tag{C.3}$$

co, gdy zmienimy nazwy indeksów w drugim i trzecim wyrażeniu, odpowiednio $\{A\to E\to B\to A\}$ oraz $\{A\to E\to C\to A\}$, prowadzi do wyrażenia

$$\delta_{f^{ABC}(A)(B)(C)} = -\omega^D(E)(B)(C)(f^{ABC}f^{DAE}+f^{EAC}f^{DAB}+f^{EBA}f^{DAC}) \tag{C.4}$$

Okazuje się zaś, że wyrażenie w nawiasie znika na mocy tożsamości Jacobiego, co widać po kilku przekształceniach:

$$\begin{aligned}
&(f^{ABC}f^{DAE}+f^{EAC}f^{DAB}+f^{EBA}f^{DAC})T^E =\\
&\qquad = f^{ABC}[T^D,T^A]+f^{DAB}[T^A,T^C]+f^{DAC}[T^B,T^A]\\
&\qquad = [T^D,[T^B,T^C]]+[T^C,[T^D,T^B]]+[T^B,[T^C,T^D]]\\
&\qquad = 0
\end{aligned} \tag{C.5}$$

Dowodzi to niezmienniczości operatorów rozważanej postaci.

Literatura

[1] W. Buchmüller, D. Wyler, "Effective lagrangian analysis of new interactions and flavour conservation", Nucl. Phys. B268 (1986) 621;

[2] C. Amsler et al. (Particle Data Group), Phys. Lett. B667, 1 (2008);

[3] C. Jarlskog, Z. Phys. C 29 (1985) 491;
C. Jarlskog, Phys. Rev. Lett. 55 (1985) 1039;
C. Jarlskog, CP Violation, World Scientific, 1989.

[4] A. Tranberg, A. Hernandez, T. Konstandin, M.G. Schmidt, "Cold electroweak baryogenesis with Standard Model CP violation", Phys. Lett. B690 (2010) 207;

[5] T. Appelquist, J. Carazzone, "Infrared singularities and massive fields", Phys. Rev. D11 (1975) 2856

[6] P. H. Chankowski, J. Wagner, "Violation of the Appelquist-Carazzone decoupling in non-SUSY GUT", Phys. Rev. D77, 025033 (2008);

[7] H. Simma, "Equations of Motion for Effective Lagrangians and Penguins in Rare B-Decays", Z. Phys. C61 (1994) 67;

[8] C. Grosse-Knetter, "Effective Lagrangians with Higher Order Derivatives", Phys. Rev. D 49, 6709 (1994);

[9] C. Arzt, "Reduced Effective Lagrangians", Phys. Lett. B 342, 189 (1995);

[10] J. A. Aguilar-Saavedra, "Single top quark production at LHC with anomalous Wtb couplings", Nucl. Phys. B804 (2008) 160;

[11] K. Agashe, R. Contino, "Composite Higgs-mediated flavor-changing neutral current", Phys. Rev. D 80, 075016 (2009);

[12] S. Kanemura, K. Tsumura, "Effects of the anomalous Higgs couplings on the Higgs boson production at the Large Hadron Collider ", Eur. Phys. J. C63 (2009) 11;

[13] R. Slansky, "Group theory for unified model building", Physics Reports Volume 79, Issue 1, December 1981, Pages 1-128;

[14] J.Łopuszański, "Rachunek spinorów", PWN, Warszawa 1985;

[15] D. Bailin, A. Love, "Supersymmetric gauge field theory and string theory", Institute of physics publishing, Bristol i Philadephia, 1994;

[16] B. Grządkowski, "Four-Fermi Effective Operators at $e^+e^- \to \bar{t}t$", Acta Phys.Polon. B27 (1996) 921-932