

POLITECHNIKA
KRAKOWSKA
im. Tadeusza Kościuszki



PIOTR KULCZYCKI

CZASOWOOPTYMALNE
STEROWANIE STOCHASTYCZNE
NIECIĄGŁYM UKŁADEM
DYNAMICZNYM

MONOGRAFIA 127



KRAKÓW 1992

PL ISSN 0860-097X

POLITECHNIKA KRAKOWSKA
im. Tadeusza Kościuszki

PIOTR KULCZYCKI

**CZASOWOOPTYMALNE STEROWANIE
STOCHASTYCZNE
NIECIĄGŁYM UKŁADEM
DYNAMICZNYM**

MONOGRAFIA 127



KRAKÓW 1992

**PRZEWODNICZĄCY KOLEGIUM REDAKCYJNEGO
WYDAWNICTW POLITECHNIKI KRAKOWSKIEJ**

Jan Ryś

PRZEWODNICZĄCY SEKCJI ZESZYTÓW NAUKOWYCH I MONOGRAFII

Roman Ciesielski

**REDAKTOR SERII
REDAKTOR NAUKOWY PRACY
Władysław Hejmo**

**SEKRETARZ SEKCJI
Marta Kupłowska**

**RECENZENCI
Krzysztof Kuźmiński
Wojciech Mitkowski**

**ADRES REDAKCJI
ul. Warszawska 24
31-155 Kraków**

© Copyright by Politechnika Krakowska

PL ISSN 0860-097X

Wykonano w Zakładzie Graficznym Politechniki Krakowskiej. Nakład 200+18 egz. Ark. wyd. 5.
Ark. druk. 6,875. Oddano do druku 13.03.1992 r.

Zam. 96/92/MON96KUL

Cena zł 15 000,-

PIOTR KULCZYCKI

CZASOWOOPTYMALNE STEROWANIE STOCHASTYCZNE NIECIĄGŁYM UKŁADEM DYNAMICZNYM

1. WSTĘP

Dynamika szerokiej klasy sterowanych obiektów opisywana jest równaniem różniczkowym:

$$\ddot{y}(t) = f(\dot{y}(t), y(t), t) + u(t), \quad (1.1)$$

gdzie u oznacza ograniczoną funkcję sterującą. Przykładową interpretację takiego układu stanowi masa poddana działaniu siły. Istotnym elementem powyższego opisu jest ograniczona funkcja f , która reprezentuje opory ruchu. Dla większości występujących w praktyce rodzajów oporów ruchu, funkcja ta może być przedstawiona w postaci:

$$f(\dot{y}(t), y(t), t) = v(\dot{y}(t), y(t), t) \operatorname{sgn}(\dot{y}(t)), \quad (1.2)$$

przy czym v jest funkcją ciągłą i ograniczoną. Wprowadzana przez funkcję sgn nieciągłość sprawia, że stosowanie metod klasycznej teorii optymalizacji dynamicznej jest niemożliwe. I tak poza najprostszymi przypadkami postaci funkcji v , synteza układu sterowania czasowo optymalnego okazuje się niemożliwa do zrealizowania dla powyższego zagadnienia deterministycznego.

W prezentowanej pracy zaproponowana będzie stochastyczna koncepcja rozwiązania problemu. W przyjętym tu probabilistycznym modelu oporów ruchu założono, że określona w równaniu (1.2) funkcja v jest realizacją zadanego

procesu stochastycznego o prawie wszystkich realizacjach ciągłych i wspólnie ograniczonych. Taki model oporów ruchu uwzględnia w postaci probabilistycznej nieokreśloności zależność oporów ruchu od szeregu innych czynników, nie tylko $\dot{y}(t)$, $y(t)$ oraz t , ale także tych, które w ujęciu deterministycznym najczęściej są pomijane ze względu na konieczność uproszczenia modelu. Model probabilistyczny uwzględnia również pojawiające się w układzie zakłócenia.

Czynnik losowy wprowadzony przez proces stochastyczny powoduje, że rozważany układ dynamiczny opisywany będzie losowym równaniem różniczkowym. Ponieważ miara probabilistyczna związana z tym procesem stochastycznym może mieć także rozkład jednopunktowy, to tak sformułowane zagadnienie sterowania stochastycznego jest uogólnieniem odpowiedniego problemu deterministycznego, w którym sterowany układ jest nieciągły i niestacjonarny.

Głównym zagadnieniem niniejszej pracy będzie problem czasowo optymalnego sterowania stochastycznego. Wykazane zostanie istnienie tzw. czasowo optymalnego sterowania stochastycznego pierwszego rodzaju oraz podana będzie jego charakteryzacja. W celu pokazania formalnej poprawności tak skonstruowanego sterowania dowiedzione zostanie istnienie rozwiązania losowego równania różniczkowego. Udowodnione też będą niektóre jego cechy.

Rozważane powyżej czasowo optymalne sterowanie stochastyczne pierwszego rodzaju będzie dogodną podstawą do tworzenia technicznych rozwiązań struktur suboptymalnych. Ze względu na utylitarne zalety, w pracy zostanie zdefiniowana i szczegółowo rozważona struktura suboptymalna określona w układzie zamkniętym, przy deterministycznej funkcji regulatora. Jej konstrukcja oparta będzie na elementach teorii decyzji. Tak jak poprzednio, w celu pokazania formalnej poprawności skonstruowanego sterowania, zostanie wykazane istnienie rozwiązania losowego równania różniczkowego oraz udowodnione będą niektóre jego cechy. Działanie suboptymalnego regulatora stochastycznego zostało sprawdzone za pomocą cyfrowego programu symulacyjnego; na koniec omówione będą jego wyniki.

Sterowanie czasowo optymalne znajduje szerokie zastosowanie we współczesnej praktyce inżynierskiej. Jako przykład podać można rozległą klasę urządzeń przemysłowych, które swój cykl technologiczny realizują głównie poprzez zmianę pozycji poszczególnych mechanizmów, np. suporty obrabiarek i szlifierek, manipulatory i roboty przemysłowe, walcownicze mechanizmy pozycyjne i wiele innych. Przeważnie zmiana ta następuje między dwiema operacjami technologicznymi, a więc w tym czasie proces staje się bezefektywny. Sterowanie czasowo optymalne wpływa więc bezpośrednio na powiększenie wydajności takiego urządzenia. Innym przykładem są wszelkie systemy zabezpieczające i awaryjne; możliwie najkrótszy czas reakcji jest podstawowym elementem skuteczności ich działania. Proponowana w tej pracy suboptymalna stochastyczna

struktura sterująca może być łatwo realizowana w praktyce dzięki możliwości wykorzystania współczesnych systemów mikroprocesorowych.

Niniejsza publikacja powstała w oparciu o pracę doktorską, którą w kwietniu 1991 roku obroniłem na Wydziale Elektrotechniki, Automatyki i Elektroniki Akademii Górniczo-Hutniczej. Stanowi ona jednak przede wszystkim syntezę moich zainteresowań z okresu studiów magisterskich w zakresie automatyki na tym wydziale oraz matematyki stosowanej na Wydziale Matematyki i Fizyki Uniwersytetu Jagiellońskiego.

Panu prof. dr hab. inż. Władysławowi Hejmo (PK) winien jestem szczególną wdzięczność za opiekę okazaną mi w trakcie trwania przewodu doktorskiego. Wnikliwe uwagi o pracy zawdzięczam przewodniczącemu komisji Panu prof. dr hab. inż. Ryszardowi Koziolowi (AGH) oraz recenzentom: Panu prof. dr hab. inż. Krzysztofowi Kuźmińskiemu (PŁ) i Panu prof. dr hab. inż. Wojciechowi Mitkowskemu (AGH). Za wieloletnią współpracę pragnę również podziękować Panu dr Antoniemu Leonowi Dawidowiczowi (UJ).

Autor

2. PRELIMINARIA

2.1. ROZWIĄZANIA RÓWNAŃ RÓŻNICZKOWYCH DETERMINISTYCZNYCH

W niniejszym podrozdziale omówione zostaną rozwiązania równań różniczkowych deterministycznych: klasyczne oraz w sensie Caratheodory'ego, Filipova i Krasowskiego. Trzy ostatnie są najczęściej stosowanymi w teorii równań różniczkowych z nieciągłą prawą stroną.

Niech T będzie przedziałem o niepustym wnętrzu. Rozważane będzie deterministyczne równanie różniczkowe:

$$\dot{x}(t) = g(x(t), t), \quad (2.1)$$

przy czym $g : \mathbb{R}^n \times T \rightarrow \mathbb{R}^n$ oraz $x : T \rightarrow \mathbb{R}^n$. Funkcja g nazywana będzie funkcją określającą dynamikę układu.

Definicja

Funkcja x jest rozwiązaniem klasycznym równania (2.1), jeżeli jest klasy C^1 oraz spełnia równanie (2.1) dla każdego $t \in T$. ■

W klasycznej teorii równań różniczkowych jako warunek wystarczający istnienia rozwiązania, zakłada się ciągłość funkcji g [Pelczar, Szarski; s. 85]. I chociaż powyższe nie stanowi warunku koniecznego, to założenie ciągłości funkcji g jest praktycznie nieodłączne rozważaniom nad rozwiązaniami klasycznymi.

Definicja

Funkcja x jest rozwiązaniem w sensie Caratheodory'ego (C-rozwiazaniem) równania (2.1), jeżeli jest absolutnie (bezwzględnie) ciągła [Łojasiewicz, s. 172] na każdym zwartym podprzedziale zbioru T oraz spełnia równanie (2.1) prawie wszędzie w T . ■

Należy zaznaczyć, że funkcja absolutnie ciągła posiada pochodną prawie wszędzie [Łojasiewicz, s. 173].

Definicja

Funkcja x jest rozwiązaniem w sensie Filippova (F-rozwiazaniem) równania (2.1), jeżeli jest absolutnie ciągła na każdym zwartym podprzedziale zbioru T oraz:

$$\dot{x}(t) \in F[g](x(t), t) \quad \text{prawie wszędzie w } T, \quad (2.2)$$

przy czym operator Filippova F zdefiniowany jest następująco:

$$F[g](x(t), t) = \bigcap_{e>0} \bigcap_{\substack{Z \subset \mathbb{R}^n: \\ m(Z)=0}} \text{conv} [g((x(t) + eB) \setminus Z, t)], \quad (2.3)$$

gdzie B jest otwartą kulą jednostkową w \mathbb{R}^n , m — miarą Lebesgue'a, a $\text{conv}[A]$ oznacza wypukłą domkniętą powłokę zbioru A [Musielak, s. 179]. ■

Definicja

Funkcja x jest rozwiązaniem w sensie Krasowskiego (K-rozwiazaniem) równania (2.1), jeżeli jest absolutnie ciągła na każdym zwartym podprzedziale zbioru T oraz:

$$\dot{x}(t) \in K[g](x(t), t) \quad \text{prawie wszędzie w } T, \quad (2.4)$$

przy czym operator Krasowskiego K zdefiniowany jest następująco:

$$K[g](x(t), t) = \bigcap_{e>0} \text{conv} [g(x(t) + eB, t)], \quad (2.5)$$

gdzie B jest otwartą kulą jednostkową w \mathbb{R}^n , a $\text{conv}[A]$ oznacza wypukłą domkniętą powłokę zbioru A . ■

Uwagi

1. Rozwiązanie klasyczne jest C -rozwiązaniem (na zbiorze zwartym funkcja klasy C^1 jest funkcją Lipschitza, a więc jest absolutnie ciągła).
2. C -rozwiązanie jest K -rozwiązaniem (ponieważ $g(x(t), t) \in K[g](x(t), t)$).
3. F -rozwiązanie jest K -rozwiązaniem (ponieważ $F[g](x(t), t) \subset \subset K[g](x(t), t)$). ■

Definicja

Niech $t_0 \in T$ oraz $x_0 \in \mathbb{R}^n$. Niech dane będzie równanie różniczkowe (2.1) z warunkiem początkowym:

$$x(t_0) = x_0. \quad (2.6)$$

Rozwiązanie klasyczne jest jednoznaczne, jeżeli każde rozwiązanie klasyczne jest funkcją równą mu tożsamościowo.

Analogicznie definiuje się jednoznaczność C -, F - oraz K -rozwiązania. ■

Przykład

Rozważane będzie następujące równanie różniczkowe:

$$\dot{x}_1(t) = \begin{cases} 1, & \text{gdy } x_2(t) > 0 \\ -1, & \text{gdy } x_2(t) = 0, \\ 1, & \text{gdy } x_2(t) < 0 \end{cases} \quad x_1(0) = x_{01} \quad (2.7)$$

$$\dot{x}_2(t) = \begin{cases} -1, & \text{gdy } x_2(t) > 0 \\ 0, & \text{gdy } x_2(t) = 0, \\ 1, & \text{gdy } x_2(t) < 0. \end{cases} \quad x_2(0) = x_{02} \quad (2.8)$$

Najpierw rozpatrzony zostanie przypadek, gdy stan początkowy zawiera się w osi x_1 . Funkcja $[x_{01} - t, 0]^T$ dla $t \in [0, \infty)$ jest wtedy jednoznaczny rozwiązaniem klasycznym i jednoznaczny C-rozwiazaniem. Ponieważ dla każdego $t \in [0, \infty)$ oraz $x(t)$ zawartego w osi x_1 , prawdziwa jest równość $F[g](x(t), t) = \{[1, a]^T : |a| \leq 1\}$, to funkcja $[x_{01} + t, 0]^T$ dla $t \in [0, \infty)$ jest jednoznaczny F-rozwiazaniem. Z kolei, dla każdego $t \in [0, \infty)$ oraz $x(t)$ zawartego w osi x_1 , zbiór $K[g](x(t), t)$ jest trójkątem o wierzchołkach $[1, 1]^T$, $[1, -1]^T$ i $[-1, 0]^T$, a więc absolutnie ciągle funkcje postaci $[x_1(t), 0]^T$ dla $t \in [0, \infty)$, przy czym $x_1(0) = x_{01}$ oraz $|x_1(t)| \leq 1$ prawie wszędzie w $[0, \infty)$, są K-rozwiazaniami.

Natomiast w przypadku, gdy stan początkowy nie zawiera się w osi x_1 , funkcja $[x_{01} + t, x_{02} - t \cdot \text{sgn}(x_{02})]^T$ jest do chwili przecięcia tej osi jednoznaczny rozwiązaniem w sensie wszystkich podanych wyżej rodzajów. W chwili przecięcia osi x_1 rozwiązanie klasyczne kończy się, natomiast C-, F- oraz K-rozwiazanie można przedłużyć odpowiednimi rozwiązaniami opisanymi powyżej. ■

Uwagi (cd.)

4. Nie każde C-rozwiazanie jest rozwiązaniem klasycznym.
5. Nie każde F-rozwiazanie jest rozwiązaniem klasycznym.
6. Nie każde rozwiązanie klasyczne jest F-rozwiazaniem.
7. Nie każde F-rozwiazanie jest C-rozwiazaniem.
8. Nie każde C-rozwiazanie jest F-rozwiazaniem.
9. Nie każde K-rozwiazanie jest C-rozwiazaniem.
10. Nie każde K-rozwiazanie jest F-rozwiazaniem. ■

Definicja

Funkcja g określona w równaniu (2.1) nazywana jest funkcją obszarami ciągłą, jeżeli dla prawie każdego $t \in T$ istnieje rodzina $\{M_{t,i}\}$ (przy czym $i \in I_t$) podzbiorów przestrzeni \mathbb{R}^n takich, że:

$$\mathbb{R}^n = \bigcup_{i \in I_t} M_{t,i} \quad (2.9)$$

$$M_{t,i} \subset \overline{\text{int}(M_{t,i})} \quad \text{dla każdego } i \in I_t \quad (2.10)$$

oraz rodzina $\{g_{t,i}\}$ (przy czym jak poprzednio $i \in I_t$) funkcji $g_{t,i} : \mathbb{R}^n \times T \rightarrow \mathbb{R}^n$ ciągłych ze względu na n pierwszych zmiennych takich, że $g \equiv g_{t,i}$ na odpowiednich zbiorach $M_{t,i}$. ■

Twierdzenie

Jeżeli funkcja g określona w równaniu (2.1) jest funkcją obszarami ciągłą, to każde K -rozwiązanie jest F -rozwiązaniem.

Dowód

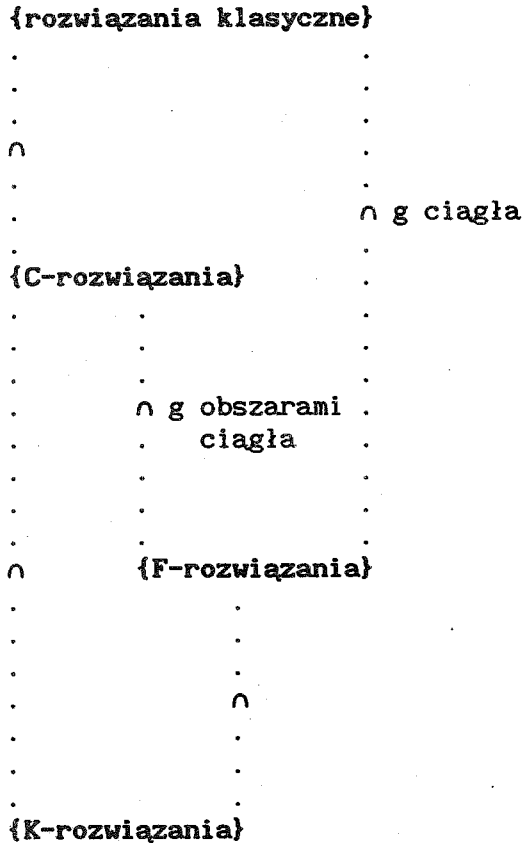
Niech t^* będzie ustalonym elementem zbioru T , dla którego spełnione są określone w powyższej definicji warunki istnienia odpowiednich rodzin $\{M_{t^*,i}\}$ oraz $\{g_{t^*,i}\}$, przy czym $i \in I_{t^*}$. Jeżeli przyjąć $f(x(t^*)) = g(x(t^*), t^*)$ oraz $f_i(x(t^*)) = g_{t^*,i}(x(t^*), t^*)$ dla każdego $i \in I_{t^*}$, to dalsza część dowodu jest identyczna z zawartym w pracy [Hajek, cz. I; s. 156] dowodem dla układów stacjonarnych. ■

Uwagi (cd.)

11. Jeżeli funkcja g określona w równaniu (2.1) jest funkcją obszarami ciągłą, to każde C -rozwiązanie jest F -rozwiązaniem (z uwagi 2 wynika, że C -rozwiązanie jest K -rozwiązaniem, a powyższe twierdzenie implikuje, że jest ono F -rozwiązaniem).
12. Jeżeli funkcja g określona w równaniu (2.1) jest funkcją ciągłą, to każde rozwiązanie klasyczne jest F -rozwiązaniem (z uwagi 1 wynika, że rozwiązanie klasyczne jest C -rozwiązaniem, a dzięki uwadze 11 jest ono F -rozwiązaniem, gdyż funkcja ciągła jest funkcją obszarami ciągłą). ■

Wniosek

Pomiędzy zbiorami rozwiązań klasycznych oraz w sensie Caratheodory'ego, Filippova i Krasowskiego zachodzą trzy zaznaczone poniżej inkluzje bezwarunkowe i żadne inne. Przy dodatkowych założeniach prawdziwe są też zaznaczone inkluzje warunkowe.



Dowód przedstawiony został w postaci sformułowanych wyżej uwag. ■

W rozważaniach nad równaniami różniczkowymi z nieciągłą prawą stroną, znaczne utrudnienie stanowi brak uniwersalnego pojęcia rozwiązania tego typu równania. Układ sterowania skonstruowany i w pełni zadowolający dla pierwotnie założonego typu rozwiązania, może przecież posiadać rozwiązania pozostałych rodzajów zasadniczo różniące się między sobą, przy czym zachowanie się skonstruowanego układu może być dla tych ostatnich absolutnie nie do przyjęcia z punktu widzenia poczynionych założeń (dodatek A). Tymczasem w trakcie analizy wrażliwości, rozwiązanie przyjęte za podstawowe, może w pewnych warunkach nie istnieć, skąd wynika potrzeba rozważania innego typu rozwiązania. Oczywiście pożądane jest istnienie w układzie jednoznacznych oraz — wtedy gdy występują jednocześnie — równych sobie C-, F- oraz K-rozwiązań.

Wreszcie, dla uniknięcia wątpliwości warto zaznaczyć, iż w definicji rozwiązania klasycznego niejednokrotnie nie wymaga się ciągłości jego pochodnej (np. w monografii [Pelczar, Szarski; s. 20], której fragmenty będą w pracy wielokrotnie wykorzystywane). Jednak przy uzasadnionym praktyką klasycznej teorii równań różniczkowych założeniu ciągłości funkcji g określonej w równaniu (2.1), obie definicje są równoważne, gdyż ciągłość pochodnej rozwiązania wynika wtedy z równania (2.1). W dalszej części pracy, gdy rozważane będą rozwiązania klasyczne, założenie ciągłości funkcji g będzie zawsze spełnione i dlatego fakt dwuznaczności definicji nie będzie prowadzić do nieporozumień.

2.2. ROZWIĄZANIA RÓWNAŃ RÓŻNICZKOWYCH LOSOWYCH

W poniższym podrozdziale omówione będą rozwiązania równań różniczkowych losowych, tzn. określających dynamikę układu uzależnioną dodatkowo od czynnika losowego. W szczególności zdefiniowane zostaną C -, F - oraz K -rozwiązanie pierwszego rodzaju.

Niech (Ω, S, P) będzie przestrzenią probabilistyczną, gdzie Ω jest zbiorem „zdarzeń elementarnych”, S – σ -algebrą podzbiorów zbioru Ω oraz P – miarą probabilistyczną określoną na S [Billingsley, s. 29-33]. Z praktycznego punktu widzenia, dodanie do σ -algebry S dowolnego podzbioru zbioru zerowej miary nie zmniejsza ogólności rozważań, gdyż ze względu na monotoniczność miary podzbiór ten ma miarę probabilistyczną zero. W dalszej części pracy zakłada się więc zupełność miar probabilistycznych. Zagadnienie rozszerzenia miary omówione jest w pracy [Rudin, s. 36-37].

Definicja

Niech dana będzie przestrzeń probabilistyczna (Ω, S, P) oraz niepusty przedział T . Funkcja $X : \Omega \times T \rightarrow \mathbb{R}^n$ nazywana jest n -wymiarowym procesem stochastycznym określonym na (Ω, S, P) oraz T , jeżeli dla każdego $t \in T$ funkcja $X_t(\cdot) = X(\cdot, t)$ jest n -wymiarową zmienną losową określoną na (Ω, S, P) [Bobrowski 1987, s. 22]. Wtedy dla ustalonego $\omega \in \Omega$ funkcja $X_\omega(\cdot) = X(\omega, \cdot)$ nazywana jest realizacją procesu stochastycznego X . ■

Powyższa definicja nie zapewnia żadnej regularności realizacji.

1-wymiarowy proces stochastyczny nazywany będzie rzeczywistym procesem stochastycznym.

Definicja

n -wymiarowe procesy stochastyczne X^* , X^{**} określone na przestrzeni probabilistycznej (Ω, S, P) oraz niepustym przedziale T , są stochastycznie równoważne, gdy:

$$P(\{\omega \in \Omega : X_t^*(\omega) = X_t^{**}(\omega)\}) = 1 \quad (2.11)$$

dla każdego $t \in T$. ■

Niech (Ω, S, P) będzie przestrzenią probabilistyczną oraz T przedziałem o niepustym wnętrzu. Rozważane będzie losowe równanie różniczkowe:

$$\dot{X}(\omega, t) = G(\omega, X(\omega, t), t), \quad (2.12)$$

przy czym $G : \Omega \times \mathbb{R}^n \times T \rightarrow \mathbb{R}^n$ oraz X jest n -wymiarowym procesem stochastycznym określonym na (Ω, S, P) oraz T .

Definicja

Niech $A = \{\omega \in \Omega : \text{funkcja } G(\omega, \cdot, \cdot) \text{ jest nieciągła}\}$. Losowe równanie różniczkowe (2.12) nazywane będzie równaniem z nieciągłą prawą stroną, jeżeli $P(A) > 0$. ■

Użyte w tytule pracy pojęcie nieciągłego układu dynamicznego (jako obiektu sterowania stochastycznego) oznacza układ opisany zdefiniowanym powyżej losowym równaniem różniczkowym z nieciągłą prawą stroną.

Definicja

Proces stochastyczny X jest C -rozwiązaniem pierwszego rodzaju losowego równania różniczkowego (2.12), jeżeli prawie wszystkie jego realizacje są C -rozwiązaniami odpowiednich deterministycznych równań różniczkowych, otrzymanych przy ustalonym $\omega \in \Omega$.

Analogicznie definiuje się F - oraz K -rozwiązanie pierwszego rodzaju. ■

Definicja

Pochodną pierwszego rodzaju procesu stochastycznego X nazywany jest n -wymiarowy proces stochastyczny określony na (Ω, S, P) oraz T taki, że prawie każda jego realizacja jest pochodną (prawie wszędzie w T) realizacji procesu X odpowiadającej temu samemu $\omega \in \Omega$. ■

Warto zwrócić uwagę, że definicja rozwiązań pierwszego rodzaju losowego równania różniczkowego nie zapewnia istnienia ich pochodnych pierwszego rodzaju.

Definicja

Niech $t_0 \in T$ oraz niech X_0 będzie n -wymiarową zmienną losową określoną na (Ω, S, P) . Niech dane będzie losowe równanie różniczkowe (2.12) z warunkiem początkowym:

$$X(\omega, t_0) = X_0(\omega) \quad \text{dla prawie każdego } \omega \in \Omega. \quad (2.13)$$

Wtedy C -rozwiązanie pierwszego rodzaju jest jednoznaczne, jeżeli każde C -rozwiązanie pierwszego rodzaju jest procesem stochastycznym, stochastycznie z nim równoważnym.

Analogicznie definiuje się jednoznaczność F - oraz K -rozwiązania pierwszego rodzaju. ■

W teorii niedeterministycznych równań różniczkowych istnieją również inne koncepcje pojęcia rozwiązania: rozwiązanie drugiego rodzaju [Bobrowski 1987, s. 126-127], podobnie jak przedstawione powyżej należące do zakresu losowych równań różniczkowych oraz rozwiązanie w sensie Ito, stosowane w teorii stochastycznych równań różniczkowych [Wong, s. 133-172]. Wykorzystywana w tej pracy koncepcja rozwiązania pierwszego rodzaju losowego równania różniczkowego stwarza największe możliwości zastosowań do badania losowych równań różniczkowych z nieciągłą prawą stroną, a jako bliska intuicji jest również dogodna w interpretacji, która tutaj staje się wręcz oczywista.

2.3. STEROWANIE CZASOWOOPTYMALNE

W podrozdziale tym zagadnienie sterowania czasowo optymalnego zostanie uogólnione na układy losowe. W szczególności zdefiniowane będzie pojęcie czasowo optymalnego sterowania stochastycznego pierwszego rodzaju.

Definicja

Niech T będzie przedziałem o niepustym wnętrzu i niech $t_0 \in T$. Niech $x_0, x_k \in \mathbb{R}^n$ reprezentują stan początkowy i docelowy oraz $U_d \subset \{u^* : T \rightarrow \mathbb{R}^m\}$ zbiór sterowań dopuszczalnych. Niech dana będzie funkcja $g : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \times T \rightarrow \mathbb{R}^n$ określająca dynamikę deterministycznego układu poddanego działaniu sterowania u :

$$\dot{x}(t) = g(x(t), u(t), t), \quad x(t_0) = x_0. \quad (2.14)$$

Niech wreszcie przy ustalonym $u \in U_d$ dane będzie:

$$t_u = \inf_x t_{u,x}, \quad (2.15)$$

gdzie $t_{u,x}$ oznacza czas osiągnięcia stanu docelowego przez rozwiązanie x generowane sterowaniem $u \in U_d$, równy ∞ gdy stan ten nie jest osiągnięty. Wtedy funkcja $u^o \in U_d$ nazywana będzie sterowaniem czasowo optymalnym, jeżeli:

$$t_{u^o} = \inf_{u \in U_d} t_u \quad (2.16)$$

oraz t_{u^o} ma skończoną wartość. ■

Powyższa definicja uwzględnia możliwość istnienia niejednoznacznych rozwiązań równania różniczkowego. Przyjęcie we wzorze (2.15) funkcji *inf* wynika z fizycznej interpretacji rozważanych w tej pracy zagadnień.

Uogólnienie pojęcia sterowania czasowo optymalnego na układy losowe nie jest jednoznaczne. Z praktycznego punktu widzenia najkorzystniejsze byłoby określenie sterowania będącego jedynie funkcją czasu (oraz stanu w układach zamkniętych) takiego, że wartość oczekiwana czasu osiągnięcia zbioru docelowego byłaby minimalna. Niestety, występujące wtedy trudności najczęściej nie pozwalają na wyjście poza fazę formułowania problemu [Kushner], [Meditch], [Schweppe].

Poniżej podana zostanie odmienna definicja sterowania czasowo optymalnego w układach losowych. Sterowanie to, przez analogię do rozwiązania pierwszego rodzaju, nazywane będzie czasowo optymalnym sterowaniem stochastycznym pierwszego rodzaju.

Definicja

Niech dana będzie przestrzeń probabilistyczna (Ω, S, P) , przedział T o niepustym wnętrzu oraz niech $t_0 \in T$. Niech $x_0, x_k \in \mathbb{R}^n$ reprezentują stan początkowy i docelowy oraz $U_d \subset \{u : T \rightarrow \mathbb{R}^m\}$ zbiór sterowań dopuszczalnych. Niech wreszcie dana będzie funkcja $G : \Omega \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \times T \rightarrow \mathbb{R}^n$ określająca dynamikę losowego układu poddanego działaniu sterowania U :

$$\dot{X}(\omega, t) = G(\omega, X(\omega, t), U(\omega, t); t). \quad (2.17)$$

Wtedy m -wymiarowy proces stochastyczny U^ω określony na (Ω, S, P) oraz T nazywany będzie czasowo optymalnym sterowaniem stochastycznym pierwszego rodzaju, jeżeli prawie wszystkie jego realizacje są sterowaniami czasowo optymalnymi odpowiednich układów deterministycznych otrzymanych przy ustalonym $\omega \in \Omega$. ■

Powyższe definicje w sposób pośredni określają warunek początkowy losowego równania różniczkowego (2.17):

$$X(\omega, t_0) = X_0(\omega) \quad \text{dla prawie wszystkich } \omega \in \Omega, \quad (2.18)$$

gdzie X_0 jest n -wymiarową zmienną losową określoną na (Ω, S, P) , o rozkładzie jednopunktowym [Bobrowski 1980, s. 210] skoncentrowanym w punkcie x_0 .

Przedstawione definicje nie precyzują typu rozwiązania występującego w układzie.

2.4. ELEMENTY TEORII DECYZJI

W niniejszym podrozdziale omówione zostaną dwie główne metody stosowane w teorii decyzji: reguły minimaksu i Bayesa.

Podstawowym zagadnieniem teorii decyzji [Lindgren] jest wyodrębnienie ze zbioru wszystkich możliwych do podjęcia decyzji „najlepszego” elementu jedynie na podstawie probabilistycznych informacji o stanie natury, w szczególności bez znajomości jej rzeczywistego stanu. To co jest najlepsze ma jednak relatywny charakter, istnieje więc szereg różnych algorytmów (reguł) pozwalających wyróżnić poszukiwany element.

Definicja (reguły minimaksu)

Niech dany będzie niepusty zbiór N możliwych stanów natury oraz niepusty zbiór D możliwych do podjęcia decyzji i funkcja:

$$s : D \times N \rightarrow \mathbb{R} \cup \{\pm \infty\} \quad (2.19)$$

reprezentująca straty. Niech $s_m : D \rightarrow \mathbb{R} \cup \{\pm \infty\}$ będzie funkcją tzw. strat minimaksowych, zdefiniowaną następująco:

$$s_m(d) = \sup_{n \in N} s(d, n). \quad (2.20)$$

Wtedy każdy element $d_m \in D$ taki, że:

$$s_m(d_m) = \inf_{d \in D} s_m(d) \quad (2.21)$$

nazywany będzie decyzją minimaxową. ■

Definicja (reguły Bayesa)

Niech dana będzie przestrzeń probabilistyczna (N, S, P) – zbiór N reprezentuje możliwe stany natury, niepusty zbiór D możliwych do podjęcia decyzji oraz funkcja:

$$s : D \times N \rightarrow \mathbb{R} \cup \{\pm \infty\} \quad (2.22)$$

reprezentująca straty taka, że dla każdego $d \in D$ istnieje całka względem miary P [Billingsley, s. 200-201] $\int_N s(d, n) dP(n)$ (wartość całki nie musi być skończona).

Niech $s_b : D \rightarrow \mathbb{R} \cup \{\pm \infty\}$ będzie funkcją tzw. strat Bayesa, zdefiniowaną następująco:

$$s_b(d) = \int_N s(d, n) dP(n). \quad (2.23)$$

Wtedy każdy element $d_b \in D$ taki, że:

$$s_b(d_b) = \inf_{d \in D} s_b(d) \quad (2.24)$$

nazywany będzie decyzją Bayesa. ■

Wartość $s_b(d)$ jest wartością oczekiwaną strat po podjęciu decyzji d .

Powyższe definicje nie zapewniają jednoznaczności decyzji minimaxowej i Bayesa.

Porównując obie reguły decyzyjne można zauważyć, że w przypadku stosowania reguły minimaksu, nie wymaga się określenia w zbiorze N miary probabilistycznej. Również obliczenia są wtedy prostsze. Podstawowa różnica uwidoczni się jednak w interpretacji i wynika wprost z postaci funkcji strat s_m i s_b : „pesymistyczna” reguła minimaksu zakłada wystąpienie najbardziej niekorzystnego stanu natury, natomiast „realistyczna” reguła Bayesa, wykorzystująca znajomość rozkładu tych stanów, pozwala wyznaczyć działanie najkorzystniejsze w sensie wartości oczekiwanej.

3. CZASOWOOPTYMALNE STEROWANIE STOCHASTYCZNE

3.1. SFORMUŁOWANIE PROBLEMU

W niniejszym podrozdziale zostanie sformułowane główne zagadnienie prezentowanej pracy: problem czasowo optymalnego sterowania stochastycznego. Przedtem przedstawiona będzie jego intuicyjna interpretacja.

W pracy przyjmuje się, że funkcja rzeczywista jest przedziałami ciągła, gdy ma skończoną ilość nieciągłości pierwszego rodzaju [Leja, s. 80]. Funkcja rzeczywista jest przedziałami C^1 , gdy sama funkcja oraz jej pochodna są funkcjami przedziałami ciągłymi. Przyjmuje się również, iż $sgn(0) = 0$.

Rozważane będzie deterministyczne równanie różniczkowe:

$$\dot{x}_1(t) = x_2(t), \quad x_1(0) = x_{01} \quad (3.1)$$

$$\dot{x}_2(t) = u(t) - a z(x_1(t), x_2(t), t), \quad x_2(0) = x_{02}, \quad (3.2)$$

gdzie $t \geq 0$ jest czasem, w którym $x_1(t) \in \mathbb{R}$ jest położeniem, natomiast $x_2(t) \in \mathbb{R}$ prędkością. Funkcja u jest sterowaniem. Równanie to opisuje m.in. ruch masy jednostkowej poddanej działaniu siły. Zakłada się, że:

$$u(t) \in [-1, 1] \quad (3.3)$$

$$z(x_1(t), x_2(t), t) \in [-1, 1] \quad (3.4)$$

oraz:

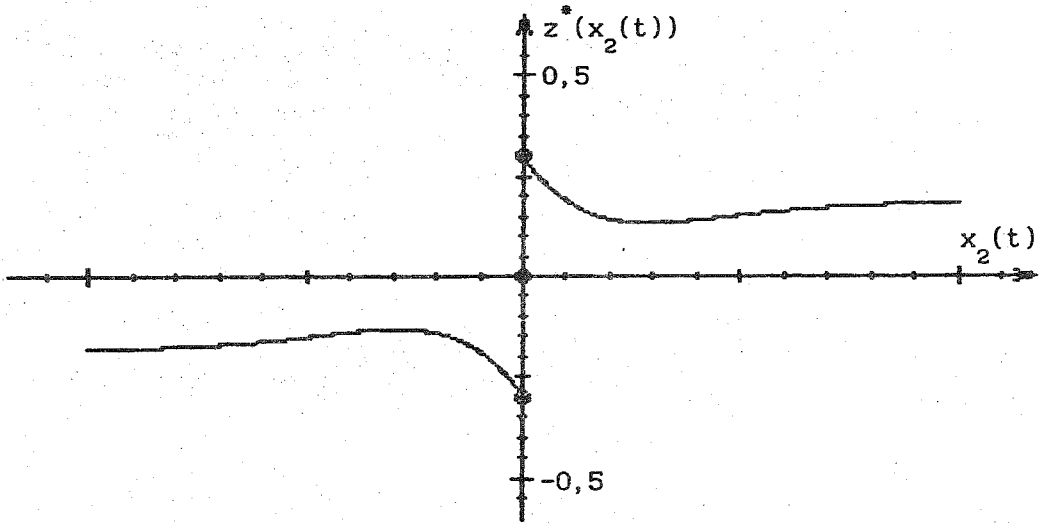
$$a \in [0, 1), \quad (3.5)$$

co zapewnia sterowalność [Ogata, s. 370] układu.

Funkcja z reprezentuje opory ruchu. W pracy rozważane będą bierne opory, czyli posiadające własność tłumienia ruchu, np. wszystkie rodzaje tarcia. Fizyczne uzasadnienie mają zatem takie wartości funkcji z , że $x_2(t) \cdot z(x_1(t), x_2(t), t) \geq 0$. W ogólnym przypadku, opory ruchu zależą głównie od prędkości, położenia i czasu, przy czym dominująca jest zależność od prędkości. Z kolei, istotnym elementem tej zależności jest nieciągłość w zerze (rys. 3.1). Funkcja z może więc być przedstawiona w postaci:

$$z(x_1(t), x_2(t), t) = v(x_1(t), x_2(t), t) \operatorname{sgn}(x_2(t)), \quad (3.6)$$

przy czym $v : \mathbb{R}^2 \times [0, \infty) \rightarrow [-1, 1]$ jest funkcją ciągłą.



Rys.3.1. Doświadczalnie uzyskana charakterystyka oporów ruchu jednego z mechanizmów walcarki nawrotnej

Ze względu na wprowadzaną przez funkcję sgn nieciągłość tego modelu, stosowanie aparatu klasycznej teorii optymalizacji dynamicznej [Athans], [Bołtianski], [Leitmann] jest niemożliwe. Oczywiście, im postać funkcji v jest bardziej złożona, tym zarówno sam proces syntezy układu sterowania czasowo optymalnego, jak i konieczna w praktyce inżynierskiej analiza wrażliwości na niedokładności modelu, czy też późniejsza identyfikacja parametrów definiujących funkcję v , stają się trudniejsze lub wręcz niemożliwe do zrealizowania.

Mając powyższe na uwadze, w prezentowanej pracy zaproponowana będzie stochastyczna koncepcja rozwiązania problemu. W przyjętym tu probabilistycznym modelu oporów ruchu założono, że funkcja v jest realizacją zadanego procesu stochastycznego V . Ponieważ występująca we wzorze (3.6) funkcja v jest ciągła, a funkcje x_1 oraz x_2 będące składowymi rozwiązania równania różniczkowego są również m.in. ciągle, to założyć można, że realizacje tego procesu stochastycznego są ciągle. Oczywiście jest też, że ich wartości będą ograniczone do przedziału $[-1, 1]$. Tak więc zależność funkcji v od x_1 , x_2 oraz t została zastąpiona zależnością od czynnika losowego.

Problem czasowo optymalnego sterowania stochastycznego

Niech $0 \leq a < b$, $c > 0$ oraz $t_0 \in \mathbb{R}$. Niech (Ω, S, P) będzie przestrzenią probabilistyczną oraz niech $T = [t_0, \infty)$. Niech $x_0, x_k \in \mathbb{R}^2$ reprezentują stan początkowy i docelowy oraz $U_d = \{u : T \rightarrow [-1, 1]\}$ zbiór sterowań dopuszczalnych. Niech V będzie ustalonym rzeczywistym procesem stochastycznym określonym na (Ω, S, P) oraz T , o prawie wszystkich realizacjach ciągłych i spełniających ograniczenie $|V_\omega(t)| \leq 1$ dla $t \in T$. Niech wreszcie dane będzie losowe równanie różniczkowe określające dynamikę układu poddanego działaniu sterowania U :

$$\dot{X}_1(\omega, t) = X_2(\omega, t) \quad (3.7)$$

$$\dot{X}_2(\omega, t) = \frac{1}{c} [b U(\omega, t) - a V(\omega, t) \operatorname{sgn}(X_2(\omega, t))]. \quad (3.8)$$

Należy określić czasowo optymalne sterowanie stochastyczne pierwszego rodzaju. ■

Parametr c jest interpretowany jako masa (moment bezwładności) sterowanego obiektu.

Rozwiązanie przedstawionego problemu czasowo optymalnego sterowania stochastycznego będzie przedmiotem twierdzenia sformułowanego w następnym podrozdziale, tzn. 3.2, i udowodnionego w kolejnych paragrafach: 3.3 oraz 3.4.

Twierdzenie udowodnione będzie w ogólniejszej formie — funkcja sgn z równania (3.8) zastąpiona zostanie dowolną funkcją $f : \mathbb{R} \rightarrow [-1, 1]$ przędziałami C^1 , spełniającą warunek $yf(y) \geq 0$ dla każdego $y \in \mathbb{R}$.

Z kolei, zbiór docelowy przyjęty będzie w postaci $x_k = [x_{k1}, 0]^T$, gdzie $x_{k1} \in \mathbb{R}$. Jest to najczęściej rozważany przypadek sterowania czasowo optymalnego, stanowiący o zatrzymaniu obiektu w żądanym miejscu w minimalnym czasie. Postępowanie takie w istotny sposób uprości wypowiedź twierdzenia oraz jego dowód, nie zmniejszając możliwości wykorzystania tezy twierdzenia do przeprowadzonej w rozdziale 4 syntezy struktury sterującej przy dowolnym $x_k \in \mathbb{R}^2$.

3.2. TWIERDZENIE O CZASOWO OPTYMALNYM STEROWANIU STOCHASTYCZNYM

W podrozdziale tym zostanie sformułowane twierdzenie będące rozwiązaniem przedstawionego w poprzednim paragrafie problemu czasowo optymalnego sterowania stochastycznego.

Twierdzenie (o czasowo optymalnym sterowaniu stochastycznym)

Niech $0 \leq a < b$, $c > 0$ oraz $t_0 \in \mathbb{R}$. Niech (Ω, S, P) będzie przestrzenią probabilistyczną oraz niech $T = [t_0, \infty)$. Niech $x_0 \in \mathbb{R}^2$ i $x_k = [x_{k1}, 0]^T$, gdzie $x_{k1} \in \mathbb{R}$, reprezentują stan początkowy i docelowy oraz $U_d = \{u : T \rightarrow [-1, 1]\}$ zbiór sterowań dopuszczalnych. Niech V będzie rzeczywistym procesem stochastycznym określonym na (Ω, S, P) oraz T , o prawie wszystkich realizacjach ciągłych i spełniających ograniczenie $|V_\omega(t)| \leq 1$ dla $t \in T$. Niech $f : \mathbb{R} \rightarrow [-1, 1]$ będzie funkcją przedziałami C^1 taką, że $yf(y) \geq 0$ dla każdego $y \in \mathbb{R}$. Niech wreszcie dane będzie losowe równanie różniczkowe określające dynamikę układu poddanego działaniu sterowania U :

$$\dot{X}_1(\omega, t) = X_2(\omega, t) \quad (3.9)$$

$$\dot{X}_2(\omega, t) = \frac{1}{c} [b U(\omega, t) - a V(\omega, t) f(X_2(\omega, t))]. \quad (3.10)$$

Istnieje wtedy czasowo optymalne sterowanie stochastyczne pierwszego rodzaju U° , generujące jednoznaczne C -rozwiązanie pierwszego rodzaju. To C -rozwiązanie jest również jednoznacznym F -rozwiązaniem pierwszego rodzaju oraz jednoznacznym K -rozwiązaniem pierwszego rodzaju. Każde z tych rozwiązań posiada pochodną pierwszego rodzaju. Realizacje sterowania U° przyjmują wartości $+1$, -1 i mają co najwyżej jeden punkt nieciągłości.

Dowód przedstawiony jest w podrozdziałach 3.3 i 3.4. ■

W dowodzie powyższego twierdzenia główne miejsce zajmować będzie przedstawiony poniżej lemat. Stanowi on tezę twierdzenia przy ustalonym $\omega \in \Omega$, a więc opisuje własności czasowo optymalnego sterowania stochastycznego „na realizacjach”.

Lemat (o czasowo optymalnym sterowaniu stochastycznym na realizacjach)

Niech $0 \leq a < b$, $c > 0$ oraz $t_0 \in \mathbb{R}$, $T = [t_0, \infty)$. Niech $x_0 \in \mathbb{R}^2$ i $x_k = [x_{k1}, 0]^T$, gdzie $x_{k1} \in \mathbb{R}$, reprezentują stan początkowy i docelowy oraz $U_d = \{u : T \rightarrow [-1, 1]\}$ zbiór sterowań dopuszczalnych. Niech $f : \mathbb{R} \rightarrow [-1, 1]$ będzie funkcją przedziałami C^1 taką, że $yf(y) \geq 0$ dla każdego $y \in \mathbb{R}$. Niech wreszcie dane będzie deterministyczne równanie różniczkowe określające dynamikę układu poddanego działaniu sterowania u :

$$\dot{x}_1(t) = x_2(t) \quad (3.11)$$

$$\dot{x}_2(t) = \frac{1}{c} [b u(t) - a v(t) f(x_2(t))]. \quad (3.12)$$

Jeżeli $v : T \rightarrow [-1, 1]$ jest funkcją ciągłą, to istnieje wtedy czasowo optymalne sterowanie (deterministyczne) u^o , generujące jednoznaczne C -rozwiązanie. To C -rozwiązanie jest również jednoznacznym F -rozwiązaniem oraz jednoznacznym K -rozwiązaniem. Funkcja u^o przyjmuje wartości $+1$, -1 i ma co najwyżej jeden punkt nieciągłości.

Dowód przedstawiony jest w podrozdziale 3.3. ■

Jeżeli przyjąć, że v jest funkcją stałą: $v(t) = w$ dla $t \in T$, przy czym $w \in [-1, 1]$, to treść lematu sprowadza się do fundamentalnego twierdzenia teorii czasowo optymalnego sterowania deterministycznym mechanizmem pozytywnym z nieciągłymi oporami ruchu [Hejmo, Kloch; 1981]. W szczególnym przypadku, gdy $w = 0$ (funkcja określająca dynamikę układu jest wtedy ciągła) otrzymuje się podstawowy w klasycznej teorii optymalizacji dynamicznej przypadek czasowo optymalnego przemieszczenia masy [Athans, s. 499-509].

Teza przedstawionego powyżej lematu o czasowo optymalnym sterowaniu stochastycznym na realizacjach pozostaje prawdziwa po uogólnieniu funkcji v do funkcji przedziałami ciągłej. Dowód wymaga wtedy jedynie uzupełnienia krótkim komentarzem.

3.3. DOWÓD LEMATU O CZASOWO OPTYMALNYM STEROWANIU STOCHASTYCZNYM NA REALIZACJACH

W poniższym podrozdziale zostanie udowodniony lemat o czasowo optymalnym sterowaniu stochastycznym na realizacjach, sformułowany w poprzednim paragrafie.

W dalszej części pracy przyjmuje się notację, w której dolne indeksy „1” i „2” oznaczają współrzędną punktu w przestrzeni \mathbb{R}^2 , np. $x = [x_1, x_2]^T$ lub $x_0 = [x_{01}, x_{02}]$, albo składową funkcji o wartościach w \mathbb{R}^2 , np. $x_+(t) = [x_{+1}(t), x_{+2}(t)]^T$.

W dowodzie przyjęte będą dodatkowe założenia:

$$c = 1 \quad (3.13)$$

$$b = 1. \quad (3.14)$$

Nie zmniejszają one ogólności rozważań ze względu na możliwość zmiany zmiennych, odpowiednio:

$$x_1^*(t) = cx_1(t), \quad x_2^*(t) = cx_2(t) \quad (3.15)$$

$$x_1^*(t) = \frac{1}{b}x_1(t), \quad x_2^*(t) = \frac{1}{b}x_2(t), \quad (3.16)$$

gdzie $t \in T$.

Wykazana teraz będzie pierwsza teza pomocnicza.

Lemat 1

Niech I będzie przedziałem o niepustym wnętrzu oraz niech $t_0^* \in I$. Niech zbiór E będzie postaci $[e_1, e_2]$ lub $[-e_2, -e_1]$, przy czym $0 < e_1 < e_2$. Niech dana będzie funkcja $h: \mathbb{R} \times I \rightarrow E$ taka, że:

$$h(y(t), t) = f(y(t))v(t) + c \quad \text{dla } y(t) \in \mathbb{R} \text{ i } t \in I, \quad (3.17)$$

przy czym $c \in \mathbb{R}$, $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ jest funkcją przedziałami C^1 oraz $v: I \rightarrow \mathbb{R}$ jest funkcją ciągłą. Niech wreszcie $y_0 \in \mathbb{R}$. Wtedy równanie różniczkowe:

$$\dot{y}(t) = h(y(t), t), \quad y(t_0^*) = y_0 \quad (3.18)$$

ma określone na zbiorze I jednoznaczne C -rozwiązanie, będące jednoznacznym K -rozwiązaniem.

Dowód

Rozważony zostanie przypadek $E = [e_1, e_2]$. Gdy $E = [-e_2, -e_1]$, dowód jest analogiczny.

Dzięki tezie punktu 1 uwag z podrozdziału 2.1, istnienie C -rozwiązania wynika wprost z możliwości „sklejania” rozwiązań klasycznych istniejących w obszarach ciągłości funkcji h [Pelczar, Szarski; s. 85] i docierających do ich brzegów [Pelczar, Szarski; s. 86]. Warto zauważyć, że ze względu na wynikającą z postaci zbioru E nierówność $\dot{y}(t) \geq e_1 > 0$ dla $t \in I$ oraz fakt, iż funkcja h posiada jedynie skończoną ilość nieciągłości ze względu na pierwszą zmienną, tj. $y(t)$ i jest ciągła ze względu na drugą zmienną, wystarczy rozważyć jedynie skończoną ilość „sklejeń”.

Na mocy tezy punktu 2 uwag z podrozdziału 2.1, określone powyżej C -rozwiązanie jest K -rozwiązaniem. Wykazana teraz będzie jego jednoznaczność.

Jeżeli funkcja $y: I \rightarrow \mathbb{R}$ jest K -rozwiązaniem, to jak wynika z definicji operatora Krasowskiego i postaci zbioru E , zbiór wartości $t \in I$, dla których funkcje f lub \hat{f} są nieciągłe, jest skończony. Ponieważ funkcje ciągłe równe prawie

wszędzie są tożsame, wystarczy dowieść jednoznaczności K -rozwiązania w obszarach ciągłości funkcji f oraz \dot{f} . W obszarach tych rozwiązanie klasyczne istnieje [Pelczar, Szarski; s. 85] i jest jednoznaczne [Pelczar, Szarski; s. 66-67]. Ciągłość funkcji h oraz jednoznaczność rozwiązania klasycznego jest warunkiem wystarczającym jednoznaczności K -rozwiązania [Hajek, cz. II; s. 181], [Hajek, cz. I, s. 168].

Jednoznaczność K -rozwiązania implikuje z kolei jednoznaczność C -rozwiązania na podstawie punktu 2 uwag z podrozdziału 2.1.

Niniejszym teza lematu 1 została udowodniona. ■

Niech x_{++} oraz x_{+-} oznaczają określone na przedziale $(-\infty, 0]$, C -rozwiązania układu (3.11)-(3.12) generowane przez $u \equiv +1$, z warunkiem początkowym $x(0) = x_k$, gdy odpowiednio $v \equiv +1$ lub $v \equiv -1$. Ich istnienie i jednoznaczność wynika z przedstawionego powyżej lematu 1, stosowanego do równania (3.12), a także istnienia i jednoznaczności rozwiązania klasycznego [Pelczar, Szarski; s. 66-67, 85], tez punktów 1 i 2 uwag z podrozdziału 2.1 oraz jednoznaczności K -rozwiązania [Hajek, cz. II; s. 181], [Hajek, cz. I; s. 168], stosowanych do równania (3.11) podobnie jak w dowodzie lematu 1.

Równanie (3.12) implikuje, że:

$$\dot{x}_{++}(t) \geq 1 - a > 0, \quad \text{gdy } t \in (-\infty, 0]. \quad (3.19)$$

Niech:

$$K_{++} = \{[x_1, x_2]^T \in x_{++}(t), \text{ gdy } t \in (-\infty, 0)\} \quad (3.20)$$

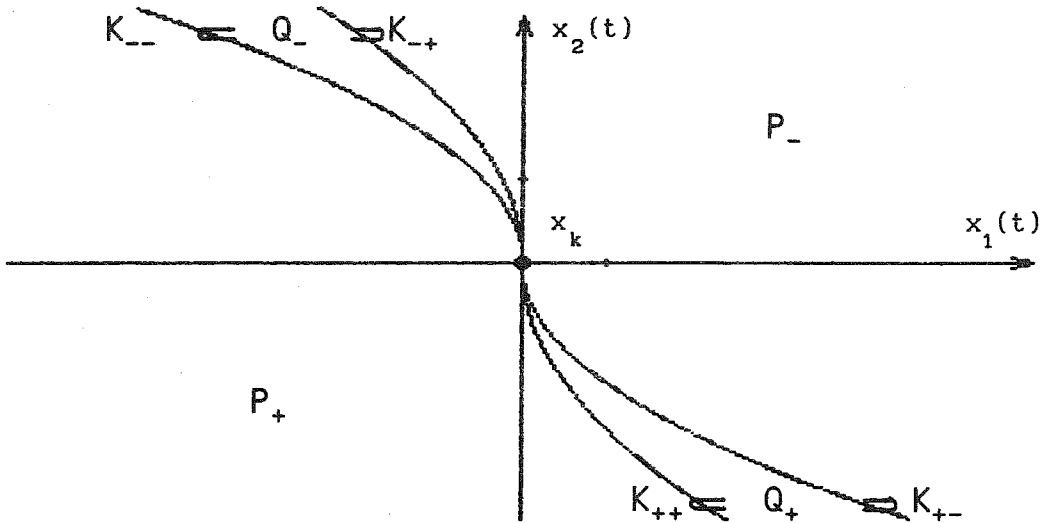
$$K_{+-} = \{[x_1, x_2]^T \in x_{+-}(t), \text{ gdy } t \in (-\infty, 0)\}. \quad (3.21)$$

Są to zbiory wszystkich stanów, które mogą być przeprowadzone do stanu x_k sterowaniem $u \equiv +1$, gdy odpowiednio $v \equiv +1$ lub $v \equiv -1$ (rys. 3.2).

Niech dana będzie funkcja $k_{++} : (-\infty, 0] \rightarrow \mathbb{R}$ zdefiniowana wzorem:

$$x_1 = k_{++}(x_2), \quad \text{gdy } [x_1, x_2]^T \in (K_{++} \cup \{x_k\}). \quad (3.22)$$

Nierówność (3.19) zapewnia istnienie funkcji x_{++}^{-1} , a więc funkcja k_{++} jest dobrze określona, gdyż jest złożeniem $x_{++} \circ x_{++}^{-1}$. Co więcej, x_{++} jako funkcja ciągła oraz dzięki nierówności (3.19) otwarta [Engelking, s. 49] i odwracalna, jest homeomorfizmem [Engelking, s. 51-52], a więc będąc złożeniem funkcji ciągłych, funkcja k_{++} jest ciągła. Z uwagi na nierówność (3.19) jest ona również przedziałami C^1 , gdyż w obszarach ciągłości funkcji f , x_{++} jest



Rys.3.2. Przykładowy podział przestrzeni \mathbb{R}^2 na zbiory $\{x_k\}$, Q_+ , Q_- , P_- , P_+

klasy C^1 , a x_{++2} jako funkcja regularna [Kołodziej, s. 238] i odwracalna jest dyfeomorfizmem [Kołodziej, s. 238 i 240].

Analogicznie, funkcja $k_{+-} : (-\infty, 0] \rightarrow \mathbb{R}$ zdefiniowana wzorem:

$$x_1 = k_{+-}(x_2), \quad \text{gdy } [x_1, x_2]^T \in (K_{+-} \cup \{x_k\}) \quad (3.23)$$

jest dobrze określona, ciągła i przedziałami C^1 .

Z równań (3.11) i (3.12) otrzymuje się z uwagi na nierówność (3.19), że:

$$\frac{dk_{++}(x_2)}{dx_2} = \frac{x_2}{1 - af(x_2)} \quad (3.24)$$

dla $x_2 \in (-\infty, 0]$ poza zbiorem skończonym zawierającym punkty nieciągłości funkcji f , czyli:

$$\frac{dk_{++}(x_2)}{dx_2} = \frac{x_2}{1 - af(x_2)} \quad \text{prawie wszędzie w } (-\infty, 0]. \quad (3.25)$$

Analogicznie wykazać można, iż:

$$\frac{dk_{+-}(x_2)}{dx_2} = \frac{x_2}{1 + af(x_2)} \quad \text{prawie wszędzie w } (-\infty, 0]. \quad (3.26)$$

Wynika stąd, że:

$$\frac{dk_{+-}(x_2)}{dx_2} \leq \frac{dk_{++}(x_2)}{dx_2} < 0 \quad \text{prawie wszędzie w } (-\infty, 0], \quad (3.27)$$

co w połączeniu z równością $k_{+-}(0) = x_{k1} = k_{++}(0)$ implikuje [Łojasiewicz, s. 174] nierówność:

$$x_{k1} \leq k_{++}(x_2) \leq k_{+-}(x_2), \quad \text{gdy } x_2 \in (-\infty, 0]. \quad (3.28)$$

Analogicznie, niech x_{--} oraz x_{-+} oznaczają określone na przedziale $(-\infty, 0]$ C-rozwiązania układu (3.11)-(3.12) generowane przez $u \equiv -1$, z warunkiem początkowym $x(0) = x_k$, gdy odpowiednio $v \equiv +1$ lub $v \equiv -1$. Ich istnienie i jednoznaczność wykazać można analogicznie jak powyżej dla x_{++} oraz x_{+-} . Niech:

$$K_{--} = \{[x_1, x_2]^T \in x_{--}(t), \text{ gdy } t \in (-\infty, 0)\} \quad (3.29)$$

$$K_{-+} = \{[x_1, x_2]^T \in x_{-+}(t), \text{ gdy } t \in (-\infty, 0)\}. \quad (3.30)$$

Są to zbiory wszystkich stanów, które mogą być przeprowadzone do stanu x_k sterowaniem $u \equiv -1$, gdy odpowiednio $v \equiv +1$ lub $v \equiv -1$. Niech funkcje k_{--} oraz $k_{-+} : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ zdefiniowane będą następująco:

$$x_1 = k_{--}(x_2), \quad \text{gdy } [x_1, x_2]^T \in (K_{--} \cup \{x_k\}) \quad (3.31)$$

$$x_1 = k_{-+}(x_2), \quad \text{gdy } [x_1, x_2]^T \in (K_{-+} \cup \{x_k\}). \quad (3.32)$$

Podobnie jak powyżej dla funkcji k_{++} wykazać można, że są one dobrze określone, ciągłe i przedziałami C^1 . Prawdziwa jest też analogiczna do wyrażenia (3.28) nierówność:

$$k_{--}(x_2) \leq k_{-+}(x_2) \leq x_{k1}, \quad \text{gdy } x_2 \in [0, \infty). \quad (3.33)$$

Dla potrzeb dalszej części dowodu zapisane jeszcze będzie analogiczne do wyrażen (3.25) i (3.26) równanie:

$$\frac{dk_{-+}(x_2)}{dx_2} = \frac{x_2}{-1 - af(x_2)} \quad \text{prawie wszędzie w } [0, \infty). \quad (3.34)$$

Niech dane będą następujące zbiory:

$$Q_+ = \{[x_1, x_2]^T \in \mathbb{R}^2 : \text{istnieją } [x_1^*, x_2]^T \in K_{+-} \text{ i } [x_1^{**}, x_2]^T \in K_{--}, \\ \text{przy czym } x_1^* \leq x_1 \leq x_1^{**}\} \quad (3.35)$$

$$Q_- = \{[x_1, x_2]^T \in \mathbb{R}^2 : \text{istnieją } [x_1^*, x_2]^T \in K_{--} \text{ i } [x_1^{**}, x_2]^T \in K_{-+}, \\ \text{przy czym } x_1^* \leq x_1 \leq x_1^{**}\} \quad (3.36)$$

$$P_+ = \{[x_1, x_2]^T \in \mathbb{R}^2 : \text{istnieje } [x_1^*, x_2]^T \in Q_+, \\ \text{przy czym } x_1 < x_1^*\} \quad (3.37)$$

$$P_- = \{[x_1, x_2]^T \in \mathbb{R}^2 : \text{istnieje } [x_1^*, x_2]^T \in Q_-, \\ \text{przy czym } x_1^* < x_1\}, \quad (3.38)$$

gdzie $Q = (Q_+ \cup \{x_k\} \cup Q_-)$. Ponieważ funkcje k_{++} i k_{+-} związane ze zbiorami K_{++} oraz K_{+-} zawartymi w Q_+ , określone były na $(-\infty, 0]$, natomiast k_{--} i k_{-+} związane ze zbiorami K_{--} oraz K_{-+} zawartymi w Q_- określone były na $[0, \infty)$, to każdy punkt przestrzeni \mathbb{R}^2 nie należący do zbioru Q należy do P_- lub P_+ .

Tak więc przestrzeń \mathbb{R}^2 została podzielona na rozłączne, niepuste zbiory: $\{x_k\}$, Q_+ , Q_- , P_+ , P_- (rys. 3.2).

Zostanie teraz wykazane istnienie sterowania przyjmującego wartości $+1$, -1 z co najwyżej jednym punktem nieciągłości, które przeprowadza stan układu (3.11)-(3.12) C -rozwiązaniem z x_0 do x_k w skończonym czasie. W dalszej części dowodu, v jest ustaloną funkcją zadaną zgodnie z założeniami lematu.

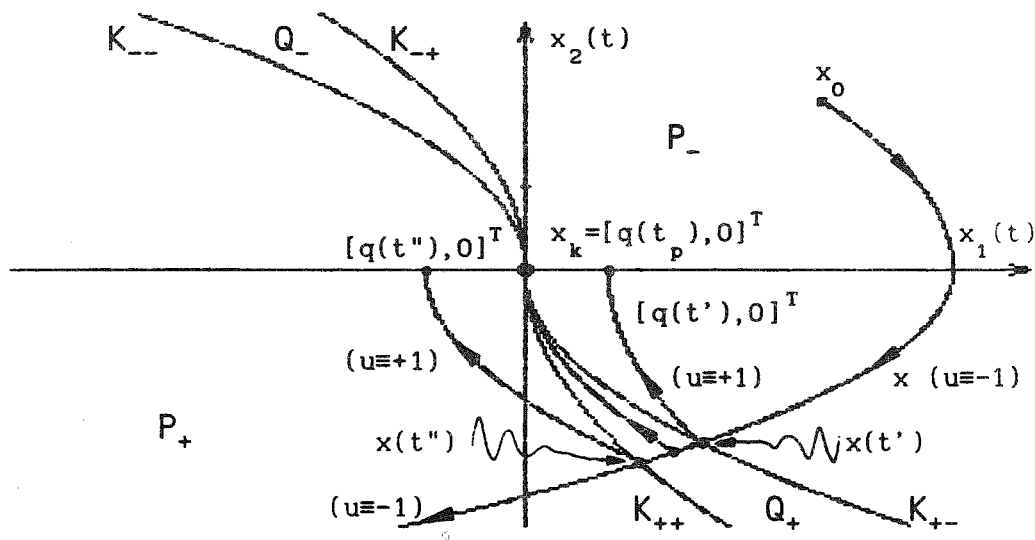
Niech teraz $x_0 \in P_-$ (rys. 3.3). Rozważane będzie najpierw określone na przedziale $[t_0, \infty)$ C -rozwiązanie układu (3.11)-(3.12) oznaczone przez x , generowane przez sterowanie $u \equiv -1$ i spełniające warunek początkowy $x(t_0) = x_0$. Jego istnienie i jednoznaczność wykazać można analogicznie jak powyżej dla x_{++} oraz x_{+-} .

Z równania (3.12) wynika, iż:

$$\dot{x}_2(t) \leq -1 + a < 0, \quad \text{gdy } t \in [t_0, \infty), \quad (3.39)$$

a więc funkcja $x^* : (-\infty, x_{02}] \rightarrow \mathbb{R}$ taka, że:

$$x_1 = x^*(x_2), \quad \text{gdy } [x_1, x_2]^T \in x(t) \text{ dla } t \in [t_0, \infty) \quad (3.40)$$



Rys.3.3. Ilustracja dowodu istnienia sterowania postaci $(-1, +1)$ dla $x_0 \in P_-$.

jest dobrze określona, ciągła i przedziałami C^1 , co można wykazać podobnie jak powyżej dla funkcji k_{++} . Korzystając z równań (3.11) i (3.12) otrzymuje się, iż:

$$\frac{dx^*(x_2)}{dx_2} = \frac{x_2}{-1 - a v^*(x_2) f(x_2)} \quad \text{prawie wszędzie w } (-\infty, x_{02}]. \quad (3.41)$$

przy czym v^* jest funkcją rzeczywistą o wartościach z przedziału $[-1, 1]$.

Niech najpierw $x_{02} > 0$. Zależność (3.39) stanowi, że C -rozwiązanie x przecina oś x_1 w skończonym czasie, a prawdziwa na podstawie wzorów (3.34) i (3.41) nierówność:

$$\frac{dx^*(x_2)}{dx_2} \leq \frac{dk_{-+}(x_2)}{dx_2} < 0 \quad \text{prawie wszędzie w } [0, x_{02}] \quad (3.42)$$

implikuje dzięki wynikającej z definicji zbioru P_- nierówności $k_{-+}(x_{02}) < x^*(x_{02}) = x_{01}$ oraz wzoru (3.39), że x nie przecina zbioru $(K_{-+} \cup \{x_k\})$, a więc przecina oś x_1 wewnątrz zbioru P_- .

A teraz, zarówno w rozważanym dotąd przypadku $x_{02} > 0$, jak i dla $x_{02} \leq 0$, ze wzoru (3.26) wynika, że:

$$\lim_{x_2 \rightarrow -\infty} k_{+-}(x_2) = \infty, \quad (3.43)$$

natomiast dzięki równaniu (3.41) prawdziwe jest, iż:

$$\lim_{x_2 \rightarrow -\infty} x^*(x_2) = -\infty, \quad (3.44)$$

czyli w obu przypadkach na mocy definicji zbioru P_- , C -rozwiązanie x przecina zbiór K_{+-} w skończonym czasie, oznaczonym przez t' (przy czym $t_0 < t'$), w punkcie spełniającym, z uwagi na nierówność (3.39), warunek:

$$x_2(t') < 0. \quad (3.45)$$

Analogicznie wykazać można, że przecina ono również zbiór K_{++} w skończonym czasie, oznaczonym przez t'' . Z uwagi na nierówność (3.28) prawdziwe jest, że $t' \leq t''$.

Niech $t^* \in [t', t'']$ oznacza czas zmiany sterowania z dotychczasowej wartości -1 na $+1$. Z nierówności (3.39) i (3.45) wynika, iż:

$$x_2(t^*) \leq x_2(t') < 0. \quad (3.46)$$

Ponieważ $\dot{x}_2(t) \geq 1 - a > 0$ gdy $u \equiv +1$, to rozważane teraz C -rozwiązanie x , którego istnienie i jednoznaczność dla $t \geq t^*$ (a stąd również dla $t \geq t_0$) wykazać można analogicznie jak powyżej dla x_{++} oraz x_{+-} , przecina oś x_1 w skończonym czasie, oznaczanym dalej przez t^{**} , przy czym $t^* < t^{**}$.

Niech dana będzie funkcja $q: [t', t''] \rightarrow \mathbb{R}$ taka, że $q(t^*) = x_1(t^{**})$. Czasowi zmiany wartości sterowania przyporządkowana jest więc pierwsza współrzędna punktu przecięcia przez C -rozwiązanie x osi x_1 . Zostanie teraz wykazane, że q jest funkcją ciągłą.

W tym celu rozważana będzie pomocnicza funkcja $q^*: [t', t''] \times T \rightarrow \mathbb{R}$ taka, że:

$$q^*(t^*, t) = \begin{cases} x_2^{t^*}(t), & \text{gdy } t \in [t_0, t^{**}) \\ 0, & \text{gdy } t \in [t^{**}, \infty), \end{cases} \quad (3.47)$$

gdzie $x_2^{t^*}$ jest C -rozwiązaniem równania (3.12) dla:

$$u(t) = \begin{cases} -1, & \text{gdy } t \in [t_0, t^*) \\ +1, & \text{gdy } t \in [t^*, \infty). \end{cases} \quad (3.48)$$

Wartości funkcji q^* należą do zbioru $[x_2(t''), \max(x_{02}, 0)]$, zatem istnienie jej lokalnej sumowalnej majoranty jest oczywiste. Funkcja $q^*(\cdot, t)$ jest ciągła dla każdego $t \in T$; wynika to z ograniczoności funkcji $|x_2(\cdot)|$ oraz twierdzenia o ciągłej zależności rozwiązania klasycznego od stanu początkowego [Pelczar, Szarski; s. 61-62], stosowanego odpowiednią (skończoną) ilość razy, z uwagi na nieciągłość funkcji f oraz u , tezy punktu 1 uwag z podrozdziału 2.1 i jednoznaczności C -rozwiązania wynikającej z udowodnionego powyżej lematu 1 stosowanego osobno do przedziałów $[t_0, t^*)$ oraz $[t^*, \infty)$. Ponieważ na mocy równania (3.11) prawdziwa jest równość:

$$q(t^*) = x_{01} + \int_{t_0}^{\infty} q^*(t^*, t) dt, \quad (3.49)$$

to funkcja q jest ciągła na podstawie twierdzenia o ciągłości całki z parametrem [Maurin, s. 343-344].

Rozważany teraz będzie pierwszy warunek brzegowy funkcji q , tzn. $q(t')$. Ponieważ wtedy gdy $u \equiv +1$ prawdziwa jest nierówność $\dot{x}_2(t) \geq 1 - a > 0$, to funkcja $x^{**}: [x_2(t'), \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ taka, że:

$$x_1 = x^{**}(x_2), \quad \text{gdy } [x_1, x_2]^T \in x(t) \text{ dla } t \in [t', \infty) \quad (3.50)$$

jest dobrze określona, ciągła i przedziałami C^1 , co można wykazać podobnie jak powyżej dla funkcji k_{++} . Wtedy też:

$$\frac{dx^{**}(x_2)}{dx_2} = \frac{x_2}{1 - a v^{**}(x_2) f(x_2)} \quad \text{prawie wszędzie w } [x_2(t'), \infty), \quad (3.51)$$

przy czym v^{**} jest funkcją rzeczywistą o wartościach z przedziału $[-1, 1]$. Ze wzorów (3.26) i (3.51) wynika, że:

$$\frac{dk_{+-}(x_2)}{dx_2} \leq \frac{dx^{**}(x_2)}{dx_2} < 0 \quad \text{prawie wszędzie w } [x_2(t'), 0], \quad (3.52)$$

a stąd dzięki równości $k_{+-}(x_2(t')) = x^{**}(x_2(t'))$ prawdziwe jest, iż $x_{k1} \leq q(t')$.

Analogicznie rozważając drugi warunek brzegowy funkcji q , otrzymać można nierówność $q(t'') \leq x_{k1}$.

Ponieważ funkcja ciągła określona na zbiorze spójnym przyjmuje wszystkie wartości pośrednie [Kuratowski, s. 208-211], to istnieje takie $t_p \in [t', t'']$, że $q(t_p) = x_{k1}$, czyli $x(t^{**}) = x_k$ i wtedy $t^{**} = t_k$, gdzie t_k jest skończonym czasem osiągnięcia zbioru docelowego przez C -rozwiązanie x .

Reasumując: jeżeli $x_0 \in P_-$, to istnieje $t_p \in (t_0, t_k)$ takie, że jednoznaczne (!) C -rozwiązanie x generowane przez sterowanie:

$$u^o(t) = \begin{cases} -1, & \text{gdy } t \in [t_0, t_p) \\ +1, & \text{gdy } t \in [t_p, \infty) \end{cases} \quad (3.53)$$

osiąga zbiór docelowy x_k w skończonym czasie t_k , przy czym $x(t_p) \in Q_+$.

Analogicznie dowieść można, że jeżeli $x_0 \in P_+$, to istnieje $t_p \in (t_0, t_k)$ takie, że jednoznaczne C -rozwiązanie x generowane przez sterowanie:

$$u^o(t) = \begin{cases} +1, & \text{gdy } t \in [t_0, t_p) \\ -1, & \text{gdy } t \in [t_p, \infty) \end{cases} \quad (3.54)$$

osiąga zbiór docelowy x_k w skończonym czasie t_k , przy czym $x(t_p) \in Q_-$.

Niech teraz $x_0 \in Q_+$. C -rozwiązanie x generowane przez sterowanie $u \equiv +1$, którego istnienie i jednoznaczność wykazać można podobnie jak powyżej dla x_{++} oraz x_{+-} , osiąga oś x_1 w skończonym czasie t^{**} , ze względu na wynikającą ze wzoru (3.12) nierówność $\dot{x}_2(t) \geq 1 - a > 0$. Jeżeli $x_1(t^{**}) = x_{k1}$, czyli $x(t^{**}) = x_k$, to poszukiwanym sterowaniem jest:

$$u^o(t) = +1, \quad \text{gdy } t \in [t_0, \infty) \quad (3.55)$$

i wtedy $t^{**} = t_k$, gdzie t_k jest skończonym czasem osiągnięcia przez jednoznaczne C -rozwiązanie x zbioru docelowego. Natomiast jeżeli $x_{k1} < x_1(t^{**})$, to przeprowadzić można analogiczne rozumowanie jak w przypadku $x_0 \in P_-$, dowodząc istnienia sterowania postaci (3.53), przy czym rolę punktu $x(t')$ przejmuje x_0 . Jeżeli wreszcie $x_1(t^{**}) < x_{k1}$, to z definicji zbioru P_+ wynika, że $x(t^{**}) \in P_+$, a więc przedłużając sterowanie o wartości $+1$, kontynuować można dla $t > t^{**}$ rozumowanie właściwe dla przypadku $x_0 \in P_+$, otrzymując odpowiednie sterowanie postaci (3.54).

Analogicznie rozpatrzyć można przypadek $x_0 \in Q_-$. Odpowiednikiem sterowania (3.55) jest wtedy:

$$u^o(t) = -1, \quad \text{gdy } t \in [t_0, \infty). \quad (3.56)$$

Gdy $x_0 = x_k$, problem jest trywialny. Dla spójności zapisu, w przypadku tym określone będzie sterowanie postaci (3.56).

Niniejszym, każdemu stanowi początkowemu $x_0 \in \mathbb{R}^2$ zostało przyporządkowane jednoznacznie (!) sterowanie u^0 postaci (3.53), (3.54), (3.55) lub (3.56). Każde z nich przyjmuje wartości $+1$, -1 i ma co najwyżej jeden punkt nieciągłości oraz przeprowadza stan układu jednoznaczny C -rozwiązaniem z x_0 do x_k w skończonym czasie. Pokazane teraz będzie, że w każdym przypadku sterowanie to jest czasowo optymalne. Idea tej części dowodu oparta jest na pracy [Hejmo, Kloch; 1981].

Wykazana teraz będzie druga teza pomocnicza.

Lemat 2

Niech $t_0^* \in \mathbb{R}$, niech zbiór I będzie postaci $[t_0^*, \infty)$ lub $[t_0^*, t_m)$, przy czym $t_0^* < t_m$ oraz niech zbiór E będzie postaci $[e_1, e_2]$ lub $[-e_2, -e_1]$, gdzie $0 < e_1 < e_2$. Niech dana będzie funkcja $h: \mathbb{R} \times I \rightarrow E$ taka, że:

$$h(y(t), t) = f(y(t))v(t) + c \quad \text{dla } y(t) \in \mathbb{R} \text{ i } t \in I, \quad (3.57)$$

przy czym $c \in \mathbb{R}$, $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ jest funkcją przedziałami C^1 oraz $v: I \rightarrow \mathbb{R}$ funkcją ciągłą. Niech $y: I \rightarrow \mathbb{R}$ będzie C -rozwiązaniem równania różniczkowego:

$$\dot{y}(t) = h(y(t), t), \quad y(t_0^*) = y_0. \quad (3.58)$$

przy czym $y_0 \in \mathbb{R}$. Niech wreszcie $z: I \rightarrow \mathbb{R}$ będzie ustaloną funkcją absolutnie ciągłą. Jeżeli spełnione są warunki:

$$z(t_0^*) \leq y(t_0^*) \quad (3.59)$$

$$\dot{z}(t) \leq h(z(t), t) \quad \text{prawie wszędzie w } I, \quad (3.60)$$

to:

$$z(t) \leq y(t), \quad \text{gdy } t \in I. \quad (3.61)$$

Natomiast jeżeli:

$$z(t_0^*) \geq y(t_0^*) \quad (3.62)$$

$$\dot{z}(t) \geq h(z(t), t) \quad \text{prawie wszędzie w } I, \quad (3.63)$$

to:

$$z(t) \geq y(t), \quad \text{gdy } t \in I. \quad (3.64)$$

Dowód

Istnienie określonego w wypowiedzi lematu C-rozwiązania y i zapewnione jest tezą lematu 1.

Poniżej wykazana zostanie nierówność (3.61). Dowód nierówności (3.64) jest analogiczny.

Ze względu na postać zbioru E , zbiór tych wartości $t \in I$ dla których funkcja f jest nieciągła, jest skończony. Wystarczy więc udowodnić tezę przy założeniu ciągłości funkcji f , gdyż po „sklejeniu” stosownych rozwiązań dowiedziona nierówność pozostanie prawdziwa dla otrzymanego w ten sposób C-rozwiązania.

Przy tym dodatkowym założeniu niech dane będzie następujące równanie różniczkowe:

$$\dot{p}(t) = r(p(t), t), \quad p(t_0) = y_0, \quad (3.65)$$

przy czym funkcja $r : \mathbb{R} \times I \rightarrow E$ zdefiniowana jest wzorem:

$$r(p(t), t) = \begin{cases} h(p(t), t), & \text{gdy } p(t) \geq z(t) \\ h(z(t), t), & \text{gdy } p(t) \leq z(t). \end{cases} \quad (3.66)$$

Funkcja r jest ciągła, a więc istnieje określone na zbiorze I rozwiązanie klasyczne p równania (3.65) [Pelczar, Szarski; s. 85-86]. Na mocy tezy punktu 1 uwag z podrozdziału 2.1, jest ono również C-rozwiązaniem.

Najpierw wykazane zostanie, iż:

$$p(t) \geq z(t), \quad \text{gdy } t \in I. \quad (3.67)$$

Niech więc dla zaprzeczenia tej nierówności istnieje $t^{**} \in I$ takie, że:

$$p(t^{**}) < z(t^{**}). \quad (3.68)$$

Z ciągłości funkcji z oraz p wynika na podstawie zależności (3.59) i (3.65) istnienie $t^* \in [t_0, t^{**}]$ takiego, że:

$$p(t^*) = z(t^*) \quad (3.69)$$

oraz:

$$p(t) < z(t), \quad \text{gdy } t \in (t^*, t^{**}). \quad (3.70)$$

Z kolei zależności (3.60) oraz (3.65), (3.66) i (3.70) implikują, że:

$$\dot{p}(t) - \dot{z}(t) \geq h(z(t), t) - h(z(t), t) = 0 \quad \text{prawie wszędzie w } [t^*, t^{**}]. \quad (3.71)$$

Ponieważ funkcja $p-z$ jest absolutnie ciągła, to biorąc pod uwagę równanie (3.69) wnioskować można, iż [Łojasiewicz, s. 174]:

$$p(t) \geq z(t), \quad \text{gdy } t \in [t^*, t^{**}]. \quad (3.72)$$

co jest w sprzeczności z hipotezą (3.68). Nierówność (3.67) została więc dowiedziona.

Z zależności (3.65), (3.66) i (3.67) oraz zapewnionej tezą lematu 1 jednoznaczności C -rozwiązania równania (3.58) wynika, że $p \equiv y$, co dzięki warunkowi (3.67) dowodzi nierówności (3.61).

Niniejszym teza lematu 2 została udowodniona. ■

Najpierw rozważany będzie stan początkowy x_0 , któremu przyporządkowano sterowanie postaci (3.55). Zostanie teraz dowiedzione, że dla takiego stanu początkowego, sterowanie to jest czasowo optymalne.

Niech więc dla potrzeb dowodu przez zaprzeczenie, istnieje sterowanie $u^* \in U_d$ przeprowadzające rozważany stan początkowy C -rozwiązaniem x^* do zbioru docelowego w czasie t_k^* takim, że $t_k^* < t_k$. Z równania (3.12) wynika, że dla sterowania postaci (3.55), funkcja \dot{x}_2 jest dodatnia, a zatem absolutnie ciągła funkcja x_2 jest ściśle rosnąca [Łojasiewicz, s. 174]. W szczególności:

$$x_2(t_k^*) < x_2(t_k) = 0. \quad (3.73)$$

Z postaci zbioru U_d wynika, że:

$$\begin{aligned} \dot{x}_2^*(t) &= f(x_2^*(t))v(t) + u^*(t) \leq \\ &\leq f(x_2^*(t))v(t) + u^o(t), \quad \text{gdy } t \in [t_0, \infty). \end{aligned} \quad (3.74)$$

Stąd oraz z zależności $x_2^*(t_0) = x_{02} = x_2(t_0)$, na mocy przytoczonego powyżej lematu 2 stosowanego z podstawieniami $y \equiv x_2$ oraz $z \equiv x_2^*$, prawdziwa jest nierówność:

$$x_2^*(t) \leq x_2(t), \quad \text{gdy } t \in [t_0, \infty), \quad (3.75)$$

czyli w szczególności:

$$0 = x_2^*(t_k^*) \leq x_2(t_k^*). \quad (3.76)$$

Nierówności (3.73) i (3.76) stanowią sprzeczność, dowodzącą czasowoop-
tymalności sterowania postaci (3.55) dla rozważanego stanu początkowego x_0 .

Stan x_0 , któremu przyporządkowano sterowanie postaci (3.56), rozpatrzyć
można analogicznie (dodatkowy przypadek $x_0 = x_k$ jest trywialny). Sterowanie
to jest w tym przypadku czasowoop-
tymalne.

Rozważany teraz będzie stan początkowy x_0 , któremu przyporządkowano
sterowanie postaci (3.53). Niech więc dla potrzeb dowodu przez zaprzeczenie,
istnieje sterowanie $u^* \in U_d$ przeprowadzające rozważany stan początkowy x_0
C-rozwiazaniem x^* do zbioru docelowego w czasie t_k^* takim, że $t_k^* < t_k$.

Najpierw wykazane będą nierówności:

$$x_2(t) \leq x_2^*(t), \quad \text{gdy } t \in [t_0, \min(t_p, t_k^*)] \quad (3.77)$$

$$x_2(t) < x_2^*(t), \quad \text{gdy } t \in (t_p, t_k^*). \quad (3.78)$$

Jeżeli $t_k^* \leq t_p$, to wyrażenie (3.78) nie posiada oczywiście żadnej treści. Nierów-
ność (3.77) jest prawdziwa na podstawie ciągłości funkcji x_2 i x_2^* oraz tezy lematu
2, którego założenia spełnione są dzięki wynikającej z postaci zbioru U_d
zależności:

$$\begin{aligned} \dot{x}_2^*(t) &= f(x_2^*(t))v(t) + u^*(t) \geq \\ &\geq f(x_2^*(t))v(t) + u^o(t), \quad \text{gdy } t \in [t_0, \min(t_p, t_k^*)] \end{aligned} \quad (3.79)$$

i równania $x_2^*(t_0) = x_{02} = x_2(t_0)$.

Niech najpierw dla potrzeb dowodu nierówności (3.78) przeprowadzanego
przez zaprzeczenie, istnieje $t' \in (t_p, t_k^*)$ takie, że:

$$x_2^*(t') = x_2(t'). \quad (3.80)$$

Równania (3.12) oraz (3.53) implikują, iż dla $t \in [t', t_k^*)$ funkcja x_2 jest ściśle
rosnąca [Łojasiewicz, s. 174], a zatem:

$$x_2(t_k^*) < x_2(t_k) = 0. \quad (3.81)$$

Z postaci zbioru U_d wynika, że:

$$\begin{aligned} \dot{x}_2^*(t) &= f(x_2^*(t))v(t) + u^*(t) \leq \\ &\leq f(x_2^*(t))v(t) + u^o(t), \quad \text{gdy } t \in [t_p, \infty), \end{aligned} \quad (3.82)$$

a więc na mocy tezy lematu 2, dzięki równaniu (3.80), prawdziwa jest nierówność:

$$x_2^*(t) \leq x_2(t) \quad \text{dla } t \in [t', \infty), \quad (3.83)$$

czyli w szczególności:

$$0 = x_2^*(t_k^*) \leq x_2(t_k^*). \quad (3.84)$$

Nierówności (3.81) oraz (3.84) są sprzeczne.

Jeżeli natomiast istniałoby $t'' \in (t_p, t_k^*)$ takie, że:

$$x_2(t'') > x_2^*(t''), \quad (3.85)$$

to z nierówności (3.77) oraz własności funkcji ciągłych wynika istnienie $t' \in (t_p, t_k^*)$ spełniającego równanie (3.80), co jak pokazano, prowadzi do sprzeczności. Nierówności (3.77) i (3.78) zostały więc udowodnione.

Wynika z nich wprost, że:

$$x_2(t_k^*) \leq x_2^*(t_k^*) = 0. \quad (3.86)$$

Ponieważ:

$$x_2(t_k) = 0, \quad (3.87)$$

a funkcja x_2 jest najpierw ściśle malejąca, a potem ściśle rosnąca, to dzięki nierówności (3.86) prawdziwe jest, iż:

$$x_2(t) < 0, \quad \text{gdy } t \in (t_k^*, t_k), \quad (3.88)$$

a więc z równania (3.11) wynika, że:

$$x_1(t_k^*) > x_1(t_k) = x_{k1}. \quad (3.89)$$

Tymczasem zależności (3.11), (3.77) i (3.78) implikują, iż:

$$x_1(t) \leq x_1^*(t), \quad \text{gdy } t \in [t_0, t_k^*], \quad (3.90)$$

a więc w szczególności:

$$x_1(t_k^*) \leq x_1^*(t_k^*) = x_{k1}, \quad (3.91)$$

co jest sprzeczne z nierównością (3.89). Czasowo optymalność sterowania postaci (3.53) została więc udowodniona dla rozważanego stanu początkowego x_0 .

Niech wreszcie x_0 będzie takim stanem początkowym, któremu przyporządkowano sterowanie postaci (3.54). Dowód czasowo optymalności tego sterowania jest analogiczny do przedstawionego powyżej.

Zostało ostatecznie udowodnione, że przyporządkowane wcześniej dowolnemu $x_0 \in \mathbb{R}^2$ sterowanie u^o postaci (3.53)-(3.56) jest czasowo optymalne.

Ponieważ zmiana wartości funkcji (przełączenie sterowania) występuje tylko wtedy, gdy stan układu należy do zbioru Q będącego (domkniętym) obszarem, w dalszej części pracy będzie on nazywany obszarem przełączeń.

Zostanie teraz wykazane, że C -rozwiązania generowane w układzie (3.11)-(3.12) przez sterowanie u^o są również F -rozwiązaniami. Poza układem podstawowym, tzn. określonym w wypowiedzi lematu układem (3.11)-(3.12), rozpatrywany będzie również układ pomocniczy, różniący się od podstawowego jedynie postacią funkcji f . Niech $A = \{y_i \in \mathbb{R} : f \text{ jest nieciągła w } y_i, i = 1, \dots, m\}$. W układzie pomocniczym funkcja f zastąpiona będzie przez funkcję $f^* : \mathbb{R} \rightarrow [-1, 1]$ taką, że:

$$f^*(y) = \begin{cases} f(y), & \text{gdy } y \in \mathbb{R} \setminus A \\ \lim_{z \rightarrow y^+} f(z), & \text{gdy } y \in A. \end{cases} \quad (3.92)$$

Skończona moc zbioru A oraz istnienie granicy występującej we wzorze (3.92) wynikają z definicji funkcji przedziałami ciągłej.

Wystarczy pokazać, że:

- C -rozwiązania układów podstawowego i pomocniczego są tożsame,
- C -rozwiązanie układu pomocniczego jest również jego F -rozwiązaniem,
- F -rozwiązania obu układów są również tożsame.

Z równania (3.12) wynika, że gdy sterowanie określone jest wzorami (3.53)-(3.56), to zbiór $\{t \in T : x_2(t) \in A\}$ ma miarę zero, a więc wprost z definicji C - i F -rozwiązań wynikają tezy punktów a oraz c. Natomiast teza punktu 11 uwag z podrozdziału 2.1 implikuje b, gdyż jedynymi nieciągłościami względem $x(t)$ funkcji określającej dynamikę układu są zbiory postaci $\mathbb{R} \times \{y_i\}$, gdzie $y_i \in A$; wyznaczenie występujących w definicji funkcji obszarów ciągłej rodzin $\{M_{t,i}\}$ i $\{g_{t,i}\}$ jest zatem trywialne.

Tak więc C -rozwiązanie występujące w układzie jest również jego F -rozwiązaniem. Zgodnie z tezą punktu 3 uwag z podrozdziału 2.1 jest ono także K -rozwiązaniem.

Jednoznaczność K -rozwiązania generowanego w układzie (3.11)-(3.12) przez sterowanie u° wynika z lematu 1 stosowanego do równania (3.12) (w przypadku sterowania postaci (3.53) lub (3.54) osobno dla podrozdziałów $[t_0, t_p)$ i $[t_p, \infty)$), a także twierdzenia o jednoznaczności K -rozwiązania [Hajek, cz. II; s. 181], [Hajek, cz. I; s. 168] na mocy jednoznaczności rozwiązania klasycznego [Pelczar, Szarski; s. 66-67] stosowanych do równania (3.11). Jednoznaczność C - oraz F -rozwiązań prawdziwa jest natomiast dzięki tezom punktów 2 i 3 uwag z podrozdziału 2.1.

Niniejszym lemat o czasowo optymalnym sterowaniu stochastycznym na realizacjach został udowodniony.

3.4. DOWÓD TWIERDZENIA O CZASOWO OPTYMALNYM STEROWANIU STOCHASTYCZNYM

W niniejszym podrozdziale zostanie udowodnione twierdzenie o czasowo optymalnym sterowaniu stochastycznym, sformułowane w paragrafie 3.2.

Przy ustalonym $\omega \in \Omega$, teza twierdzenia została wykazana w poprzednim podrozdziale poprzez lemat o czasowo optymalnym sterowaniu stochastycznym na realizacjach. Należy więc udowodnić, że procesami stochastycznymi są określone w lemacie, indeksowane przez ω rodziny: deterministycznych sterowań czasowo optymalnych, generowanych przez nie rozwiązań i ich pochodnych. W dowodzie obowiązują nie zmniejszające ogólności rozważań założenia $b = 1$ oraz $c = 1$, wprowadzone w trakcie dowodzenia lematu.

Poniżej zostanie jeszcze uściślone uogólnienie na przestrzenie topologiczne pojęć znanych z teorii funkcji rzeczywistych. I tak, odwzorowanie przekształcające zbiór z określoną na nim σ -algebrą w przestrzeń topologiczną jest mierzalne, gdy przeciwobraz każdego zbioru otwartego (lub w tym przypadku równoważnie [Łojasiewicz, s. 74]: zbioru borelowskiego [Rudin, s. 21]) należy do σ -algebry. Odwzorowanie określone pomiędzy dwiema przestrzeniami topologicznymi jest borelowskie, gdy przeciwobraz każdego zbioru borelowskiego jest borelowski. Wprost z definicji wynika, że złożenie odwzorowań borelowskich jest borelowskie. Obłożenie odwzorowania mierzalnego odwzorowaniem borelowskim jest mierzalne [Rudin, s. 21-22]. Odwzorowanie ciągle jest borelowskie [Łojasiewicz, s. 77; poczynione w definicji zbioru borelowskiego założenie metryczności, nie jest w tym dowodzie wykorzystywane].

Niech (Ω, S, P) będzie przestrzenią probabilistyczną określoną w założeniach twierdzenia. Wtedy niech Ω' będzie zbiorem tych $\omega \in \Omega$, dla których spełnione są założenia lematu o czasowo optymalnym sterowaniu stochastycznym na realizacjach. Niech $\Omega'' = \Omega \setminus \Omega'$. Oczywiście $P(\Omega'') = 0$. Niech $U^\circ : \Omega \times T \rightarrow \{-1, +1\}$ będzie funkcją zdefiniowaną wzorem:

$$U^\circ(\omega, \cdot) \equiv \begin{cases} u^\circ : T \rightarrow \{-1, +1\} \text{ określone w lemacie o} \\ \text{czasowo optymalnym sterowaniu stochastycznym} \\ \text{na realizacjach dla } v \equiv V_\omega, & \text{gdy } \omega \in \Omega' \\ u : T \rightarrow \{+1\}, & \text{gdy } \omega \in \Omega'' \end{cases} \quad (3.93)$$

Wykazane teraz będzie, że tak określona funkcja jest procesem stochastycznym, tzn. że dla każdego $t \in T$, funkcja $U^\circ(\cdot, t)$ jest mierzalna względem S . Ponieważ przestrzeń probabilistyczna z założenia jest zupełna, to zerowej miary zbiór Ω'' nie wpływa na mierzalność i w tej części dowodu będzie pominięty.

Najpierw rozważany będzie przypadek $x_0 \in P_-$. Z dowodu lematu o czasowo optymalnym sterowaniu stochastycznym na realizacjach wynika, że:

$$t'' = \sup_{\omega \in \Omega} (t') < \infty, \quad (3.94)$$

gdzie t' jest czasem przecięcia zbioru K_{++} przez C -rozwiązanie układu (3.11)-(3.12) oznaczone przez x , z warunkiem początkowym $x(t_0) = x_0$, generowane przez sterowanie $u^\circ \equiv -1$, przy czym $v \equiv V_\omega$. Niech $J = [t_0, t'']$. Rozważana będzie funkcja $p : \Omega \times J \rightarrow \mathbb{R}^2$ taka, że:

$$p(\omega, t) = x(t). \quad (3.95)$$

Przy ustalonym $t \in J$, funkcja $p(\cdot, t)$ jest złożeniem następujących odwzorowań:

$$p_1 : \Omega \rightarrow C(J, \mathbb{R}) \quad p_1(\omega) = V_\omega \Big|_J \quad (3.96)$$

$$p_2 : C(J, \mathbb{R}) \rightarrow C(J, \mathbb{R}^2) \quad p_2(V_\omega \Big|_J) = x \Big|_J \quad (3.97)$$

$$p_3 : C(J, \mathbb{R}^2) \rightarrow \mathbb{R}^2 \quad p_3(x \Big|_J) = x \Big|_J(t), \quad (3.98)$$

gdzie C oznacza przestrzeń funkcji ciągłych z normą supremum [Musielak, s. 45].

Zostanie teraz wykazane, że odwzorowanie p_1 jest mierzalne. Ponieważ zbiór wielomianów o współczynnikach wymiernych jest ośrodkiem [Musielak, s. 16] przestrzeni $C(J, \mathbb{R})$ [Kuratowski, s. 61], [Łojasiewicz, s. 38; możliwość ograniczenia do zbioru wielomianów o współczynnikach wymiernych jest oczywista], to dla dowolnego zbioru otwartego $A \subset C(J, \mathbb{R})$ prawdziwe jest, że:

$$\begin{aligned}
 A &= \bigcup_{i=1}^{\infty} K(v_i, d_i) = \bigcup_{i=1}^{\infty} \bigcup_{j=1}^{\infty} \bar{K}(v_i, e_{i,j}) = & (3.99) \\
 &= \bigcup_{i=1}^{\infty} \bigcup_{j=1}^{\infty} \{v \in C(J, \mathbb{R}) : \max_{t \in J} (|v(t) - v_i(t)|) \leq e_{i,j}\} = \\
 &= \bigcup_{i=1}^{\infty} \bigcup_{j=1}^{\infty} \{v \in C(J, \mathbb{R}) : \max_{t \in J \cap \mathcal{Q}} (|v(t) - v_i(t)|) \leq e_{i,j}\} = \\
 &= \bigcup_{i=1}^{\infty} \bigcup_{j=1}^{\infty} \bigcap_{t \in J \cap \mathcal{Q}} \{v \in C(J, \mathbb{R}) : |v(t) - v_i(t)| \leq e_{i,j}\},
 \end{aligned}$$

gdzie K oznacza kulę otwartą, \bar{K} - kulę domkniętą oraz dla każdego $i \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, v_i jest restrykcją do zbioru J wielomianu o współczynnikach wymiernych, $d_i \in \mathbb{R}$ oraz $\{e_{i,j}\}$ jest indeksowanym przez $j \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ rosnącym ciągiem liczb rzeczywistych zbieżnym do d_i . Dzięki własnościom przeciwobrazu wynika stąd, że:

$$\begin{aligned}
 p_1^{-1}(A) &= & (3.100) \\
 &= \bigcup_{i=1}^{\infty} \bigcup_{j=1}^{\infty} \bigcap_{t \in J \cap \mathcal{Q}} p_1^{-1}(\{v \in C(J, \mathbb{R}) : |v(t) - v_i(t)| \leq e_{i,j}\}).
 \end{aligned}$$

Ponieważ V jest procesem stochastycznym, to dla ustalonych i, j oraz t , zbiór $p_1^{-1}(\{v \in C(J, \mathbb{R}) : |v(t) - v_i(t)| \leq e_{i,j}\})$ jest mierzalny. Z definicji σ -algebry dowodzi to mierzalności zbioru $p_1^{-1}(A)$. Odwzorowanie p_1 jest zatem mierzalne.

Z twierdzenia o ciągłej zależności rozwiązania klasycznego od warunków początkowych oraz funkcji określającej dynamikę układu [Pelczar, Szarski; s. 61] stosowanej odpowiednią (skończoną) ilość razy z uwagi na nieciągłości funkcji f , tezy punktu 1 uwag z podrozdziału 2.1 i zapewnionej tezą lematu 1 z poprzedniego podrozdziału jednoznaczności C -rozwiązania stosowanych do równania (3.12), a także ciągłej zależności rozwiązania klasycznego od funkcji określającej dynamikę układu [Pelczar, Szarski; s. 61], tez punktów 1 i 2 uwag z podrozdziału 2.1 oraz wynikającej z jednoznaczności rozwiązania klasycznego

[Pelczar, Szarski; s. 66-67] jednoznaczności K -rozwiązania [Hajek, cz. II; s. 181], [Hajek, cz. I; s. 168] stosowanych do równania (3.11), wynika ciągła zależność C -rozwiązania od funkcji określającej dynamikę układu, co implikuje ciągłość odwzorowania p_2 .

Ciągłość odwzorowania p_3 jest oczywista.

Z wykazanych powyżej własności odwzorowań p_1 , p_2 oraz p_3 wynika mierzalność funkcji $p(\cdot, t)$ dla dowolnie ustalonego $t \in J$. Z kolei, ciągłość funkcji $p(\omega, \cdot)$ dla każdego $\omega \in \Omega$ wynika wprost z definicji C -rozwiązania. Zostanie teraz wykazana mierzalność funkcji p względem σ -algebry produktowej [Billingsley, s. 227] w $\Omega \times J$.

Należy udowodnić, że dla dowolnego zbioru otwartego $D \subset \mathbb{R}^2$, zbiór $C = \{(\omega, t) \in \Omega \times J : p(\omega, t) \in D\}$ jest mierzalny w $\Omega \times J$. Ponieważ istnieją $d_i \in \mathcal{Q} \times \mathcal{Q}$ oraz $r_i \in \mathbb{R}$ takie, że:

$$D = \bigcup_{i=1}^{\infty} K(d_i, r_i), \quad (3.101)$$

zatem z definicji σ -algebry wystarczy to wykazać dla $D = K(d, r)$.

Niech $\omega^* \in \Omega$ będzie takie, że istnieje $t \in J$ oraz $(\omega^*, t) \in C$. Z ciągłości funkcji $p(\omega^*, \cdot)$ wynika, iż istnieją $t^* \in (J \cap \mathcal{Q})$ i $k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ takie, że $K(t^*, \frac{1}{k}) \subset J$ oraz dla każdego $t \in K(t^*, \frac{1}{k})$ spełnione jest $p(\omega^*, t) \in K(d, r)$.

Ustalając $(t^*, k) \in (J \cap \mathcal{Q}) \times \mathbb{N} \setminus \{0\}$ oraz $m \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ otrzymuje się równość:

$$\begin{aligned} E(t^*, k, m) &= \quad (3.102) \\ &= \left\{ \omega \in \Omega : \forall t \in K(t^*, \frac{1}{k}) \quad p(\omega, t) \in \bar{K}(d, r - \frac{1}{m}) \right\} = \\ &= \left\{ \omega \in \Omega : \forall t \in \bar{K}(t^*, \frac{1}{k}) \quad p(\omega, t) \in \bar{K}(d, r - \frac{1}{m}) \right\} = \\ &= \left\{ \omega \in \Omega : \forall t \in \mathcal{Q} \cap \bar{K}(t^*, \frac{1}{k}) \quad p(\omega, t) \in \bar{K}(d, r - \frac{1}{m}) \right\} = \\ &= \bigcap_{t \in \mathcal{Q} \cap \bar{K}(t^*, \frac{1}{k})} \left\{ \omega \in \Omega : p(\omega, t) \in \bar{K}(d, r - \frac{1}{m}) \right\}. \end{aligned}$$

Dla ustalonego t , zbiór $\{\omega \in \Omega : p(\omega, t) \in \bar{K}(d, r - \frac{1}{m})\}$ jest mierzalny, a więc

$E(t^*, k, m)$ jako przeliczalny iloczyn zbiorów mierzalnych, jest mierzalny w Ω .
Otwarty zbiór $K(t^*, \frac{1}{k})$ jest mierzalny w J . Z równości:

$$C = \bigcup_{\substack{t^* \in \mathcal{Q} \cap J \\ k, m \in \mathbb{N} \setminus \{0\}}} K(t^*, \frac{1}{k}) \times E(t^*, k, m) \quad (3.103)$$

wynika więc, iż zbiór C jako przeliczalna suma zbiorów mierzalnych jest mierzalny w $\Omega \times J$. Ostatecznie wykazane zostało, że funkcja p jest mierzalna.

Niech teraz $B = \{(\omega, t) \in \Omega \times J : x(t) \in Q_+\}$. Oczywiście jest, że $B = p^{-1}(Q_+)$. Ponieważ prawdziwa jest równość:

$$Q_+ = [int(Q_+) \cup (K_{++} \cup \{x_k\}) \cup (K_{+-} \cup \{x_k\})] \setminus \{x_k\}. \quad (3.104)$$

a zbiór $int(Q_+)$ jest otwarty oraz zbiory $(K_{++} \cup \{x_k\})$, $(K_{+-} \cup \{x_k\})$, $\{x_k\}$ są domknięte, to zbiór B jest mierzalny.

Niech teraz (ω, t) będzie ustalonym elementem zbioru B . Wtedy, niech y będzie C -rozwiązaniem układu (3.11)-(3.12) z warunkiem początkowym $y(0) = x(t)$, generowanym przez sterowanie $u \equiv +1$, przy czym $v(z) = V_\omega(t+z)$ dla $z \geq 0$.

Z lematu o czasowo optymalnym sterowaniu stochastycznym na realizacjach wynika, iż:

$$t'' = \sup_{\omega \in \Omega} (t') < \infty, \quad (3.105)$$

gdzie t' jest czasem przecięcia przez y osi x_1 . Rozważane będzie odwzorowanie $r^* : B \rightarrow C([0, t''], \mathbb{R}^2)$ takie, że:

$$r^*[\omega, t](z) = y(t+z) \quad \text{dla } z \in [0, t'']. \quad (3.106)$$

Zostało dowiedzione, iż dziedzina odwzorowania r^* jest mierzalna. Pozostały warunek mierzalności odwzorowania r^* można udowodnić analogicznie jak powyżej, składając odwzorowania r_1 i r_2 będące odpowiednikami p_1 i p_2 .

Niech nadto dane będzie odwzorowanie $r_3 : r^*(B) \rightarrow \mathbb{R}$ takie, że:

$$r_3(y) = y_1(t'). \quad (3.107)$$

przy czym zbiór $r^*(B)$ rozważany jest z topologią indukowaną [Engelking, s. 92] z przestrzeni $C([0, t''], \mathbb{R}^2)$. Z dowodu lematu o czasowo optymalnym sterowa-

niu stochastycznym na realizacjach wynika, że odwzorowanie r_3 jest ciągle, a więc odwzorowanie $r: B \rightarrow \mathbb{R}$ definiowane niniejszym jako złożenie $r_3 \circ r^*$ jest mierzalne.

Niech $B_+ \subset B$ oraz $B_- \subset B$ oznaczają zbiory tych elementów (ω, t) , dla których C -rozwiązania y będące ich obrazami poprzez odwzorowanie r^* , przecinają oś x_1 wewnątrz zbiorów odpowiednio P_+ oraz P_- . Z równości:

$$B \setminus (B_+ \cup B_-) = r^{-1}(\{x_{t_1}\}) \quad (3.108)$$

oraz mierzalności odwzorowania r wynika, że zbiór $B \setminus (B_+ \cup B_-)$ jest mierzalny w $\Omega \times J$.

Niech teraz $s: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ będzie funkcją zdefiniowaną wzorem:

$$s(\omega) = t_p, \quad (3.109)$$

gdzie t_p jest czasem zmiany wartości funkcji $U^o(\omega, \cdot) \equiv u^o$ postaci (3.53), przyporządkowanej w lemacie o czasowo optymalnym sterowaniu stochastycznym na realizacjach rozważanemu stanowi początkowemu, gdy $v \equiv V_\omega$. Wykresem funkcji s jest mierzalny zbiór $B \setminus (B_+ \cup B_-)$. Z twierdzenia Sainte-Beuve'a (dodatek B) stosowanego do odwzorowania jednowartościowego wynika więc, że funkcja ta jest mierzalna.

Niech ustalone będzie $t \in T$. Funkcja $U^o(\cdot, t)$ przyjmuje jedynie wartości $+1, -1$. W celu wykazania jej mierzalności wystarczy więc udowodnić mierzalność zbioru $U^o(\cdot, t)^{-1}(\{-1\})$. Z postaci sterowania określonego wzorem (3.53) wynika, że:

$$U^o(\cdot, t)^{-1}(\{-1\}) = s^{-1}((t, \infty)), \quad (3.110)$$

czyli mierzalność zbioru $U^o(\cdot, t)^{-1}(\{-1\})$ wynika wprost z mierzalności funkcji s . Ostatecznie, dla $x_0 \in P_-$ mierzalność funkcji $U^o(\cdot, t)$ dla dowolnego $t \in T$ została wykazana.

W przypadku $x_0 \in P_+$ dowód mierzalności funkcji $U^o(\cdot, t)$ dla każdego $t \in T$ jest analogiczny.

Niech teraz $x_0 \in Q_+$. Rozważana będzie funkcja $q: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ taka, że:

$$q(\omega) = x(t'), \quad (3.111)$$

gdzie x jest rozwiązaniem układu (3.11)-(3.12) z warunkiem początkowym $x(t_0) = x_0$, generowanym przez sterowanie $u \equiv +1$, przy czym $v \equiv V_\omega$ oraz t' jest czasem, w którym powyższe C -rozwiązanie przecina oś x_1 . Rozważając q jako złożenie odwzorowań analogicznych do p_1, p_2 oraz p_3 , wykazać można mierzalność funkcji q .

Niech teraz

$$\Omega_{-+} = q^{-1}((x_{k1}, \infty)) \quad (3.112)$$

$$\Omega_{+-} = q^{-1}((-\infty, x_{k1})). \quad (3.113)$$

Ze względu na mierzalność funkcji q , zbiory te są mierzalne.

Jeżeli $\omega \in \Omega_{-+}$, to rozważanemu stanowi początkowemu przyporządkowane zostało sterowanie postaci (3.53). Niech funkcja $s_{-+} : \Omega_{-+} \rightarrow \mathbb{R}$ będzie zdefiniowana wzorem:

$$s_{-+}(\omega) = t_p, \quad (3.114)$$

gdzie t_p jest czasem zmiany wartości sterowania postaci (3.53). Zostało wykazane, iż zbiór Ω_{-+} jest mierzalny. Dalsza część dowodu mierzalności funkcji s_{-+} jest analogiczna do przeprowadzonego powyżej dla funkcji s zdefiniowanej wzorem (3.109).

Jeżeli natomiast $\omega \in \Omega_{+-}$, to rozważanemu stanowi początkowemu przyporządkowane zostało sterowanie postaci (3.54). Niech teraz funkcja $s_{+-} : \Omega_{+-} \rightarrow \mathbb{R}$ będzie zdefiniowana wzorem:

$$s_{+-}(\omega) = t_p, \quad (3.115)$$

gdzie t_p jest czasem zmiany wartości sterowania postaci (3.54). Zbiór Ω_{+-} jest mierzalny. Dowód mierzalności funkcji s_{+-} jest ponownie analogiczny do przeprowadzonego powyżej dla funkcji s .

Niech będzie ustalone $t \in T$. Mierzalność zbioru $U^o(\cdot, t)^{-1}(\{-1\})$ wynika wprost ze wzoru:

$$U^o(\cdot, t)^{-1}(\{-1\}) = s_{-+}^{-1}((t, \infty)) \cup s_{+-}^{-1}([t_0, t]) \quad (3.116)$$

dzięki mierzalnościom funkcji występujących po prawej stronie równości. Tak więc dla $x_0 \in Q_+$ mierzalność funkcji $U^o(\cdot, t)$ dla dowolnego $t \in T$ została wykazana.

W przypadku $x_0 \in Q_-$ dowód jest analogiczny.

Przypadek $x_0 = x_k$ jest trywialny, gdyż $U^o(\cdot, t)^{-1}(\{-1\}) = \Omega$ dla każdego $t \in T$.

Tak więc zostało wykazane, że $U^o(\cdot, t)$ jest funkcją mierzalną dla każdego $t \in T$, a zatem U^o jest procesem stochastycznym. Niniejszym istnienie czasowoopimalnego sterowania stochastycznego pierwszego rodzaju, spełniającego wa-

runki zawarte w tezie twierdzenia, zostało udowodnione. Wykazane teraz będzie, że generuje ono C -rozwiązanie pierwszego rodzaju.

Niech dana będzie funkcja $X : \Omega \times T \rightarrow \mathbb{R}^2$ zdefiniowana wzorem:

$$X(\omega, \cdot) \equiv \begin{cases} x : T \rightarrow \mathbb{R}^2 - C\text{-rozwiązanie układu (3.11)-(3.12) z} \\ \text{warunkiem początkowym } x(t_0) = x_0, \text{ przy czym} \\ u^o \equiv U_\omega^o \text{ i } v \equiv V_\omega, \text{ gdy } \omega \in \Omega' \\ x : T \rightarrow \{0\}, \text{ gdy } \omega \in \Omega''. \end{cases} \quad (3.117)$$

Jest ona dobrze określona, co wynika z tezy lematu o czasowo optymalnym sterowaniu stochastycznym na realizacjach. Zostanie teraz wykazane, że funkcja X jest procesem stochastycznym. Ze względu na zupełność miary probabilistycznej, zerowej miary zbiór Ω'' nie wpływa na mierzalność i w tej części dowodu również będzie pominięty.

Przy dowolnie ustalonym $t \in T$ należy wykazać mierzalność funkcji $X(\cdot, t)$. Z dowodu lematu o czasowo optymalnym sterowaniu stochastycznym na realizacjach wynika, że:

$$t'' = \sup_{\omega \in \Omega} (t_k) < \infty, \quad (3.118)$$

gdzie t_k jest czasem osiągnięcia zbioru docelowego przez C -rozwiązanie układu (3.11)-(3.12) z warunkiem początkowym $x(t_0) = x_0$, gdy $u^o \equiv U_\omega^o$ oraz $v \equiv V_\omega$. Niech więc dla ustalonego $t \in T$ dane będzie $J = [t_0, \max(t, t'' + 1)]$. Wtedy funkcja $X(\cdot, t)$ jest złożeniem następujących odwzorowań:

$$z_1 : \Omega \rightarrow PC(J, \mathbb{R}) \times C(J, \mathbb{R}) \quad z_1(\omega) = (U_\omega^o \Big|_J, V_\omega \Big|_J) \quad (3.119)$$

$$z_2 : PC(J, \mathbb{R}) \times C(J, \mathbb{R}) \rightarrow C(J, \mathbb{R}^2) \quad (3.120)$$

$$z_2((U_\omega^o \Big|_J, V_\omega \Big|_J)) = x \Big|_J$$

$$z_3 : C(J, \mathbb{R}^2) \rightarrow \mathbb{R}^2 \quad z_3(x \Big|_J) = x \Big|_J(t), \quad (3.121)$$

gdzie PC oznacza przestrzeń funkcji przedziałami ciągłych z normą supremum.

Zostanie najpierw wykazana mierzalność złożenia $z_2 \circ z_1$. Niech dana będzie pomocnicza rodzina odwzorowań indeksowana przez $i \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ taka, że:

$$z_{1i} : \Omega \rightarrow C(J, \mathbb{R}) \times C(J, \mathbb{R}) \quad z_{1i}(\omega) = \left(U_i(\omega, \cdot), V_\omega \Big|_J \right), \quad (3.122)$$

przy czym funkcje $U_i : \Omega \times J \rightarrow \mathbb{R}$ zdefiniowane są wzorem:

$$U_i(\omega, \cdot) \equiv \begin{cases} \text{dla dowolnego } \omega \in \Omega: \\ \begin{cases} -1, & \text{gdy } t \in [t_0, t_p] \\ 2i(t - t_p) - 1, & \text{gdy } t \in [t_p, \frac{t_p + 1}{i}] \\ 1, & \text{gdy } t \geq \frac{t_p + 1}{i}, \end{cases} \\ \text{jeżeli } U_\omega^\circ \text{ jest postaci (3.53)} \\ \\ \begin{cases} 1, & \text{gdy } t \in [t_0, t_p] \\ -2i(t - t_p) + 1, & \text{gdy } t \in [t_p, \frac{t_p + 1}{i}] \\ -1, & \text{gdy } t \geq \frac{t_p + 1}{i}, \end{cases} \\ \text{jeżeli } U_\omega^\circ \text{ jest postaci (3.54)} \\ \\ U_\omega^\circ \Big|_J, \\ \text{jeżeli } U_\omega^\circ \text{ jest postaci (3.55) lub (3.56).} \end{cases} \quad (3.123)$$

Dla dowolnych $i \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ oraz $\omega \in \Omega$, funkcja $U_i(\omega, \cdot)$ jest więc ciągła. Zostanie teraz wykazane, że dla każdego $i \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ funkcja U_i jest procesem stochastycznym. Niech więc $t \in J$ będzie ustalone. Jeżeli $x_0 \in P_-$, to dla każdego $i \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ prawdziwa jest równość:

$$\{\omega \in \Omega : U_i(\omega, t) < d\} = \begin{cases} \Omega, & \text{gdy } d > 1 \\ s^{-1}\left(\left(\min\left(t_0, t - \frac{1+d}{2i}\right), \infty\right)\right), & \text{gdy } -1 < d \leq 1 \\ \phi, & \text{gdy } d \leq -1, \end{cases} \quad (3.124)$$

przy czym funkcja s zdefiniowana jest wzorem (3.109). Zostało udowodnione, że jest ona mierzalna, zatem funkcja $U_i(\cdot, t)$ jest mierzalna dla dowolnych $i \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ oraz $t \in J$. Analogicznie rozpatrzyć można przypadek $x_0 \in P_+$. Niech teraz $x_0 \in Q_+$. Wtedy dla każdego $i \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ prawdziwa jest równość:

$$\{\omega \in \Omega : U_i(\omega, t) < d\} = \begin{cases} \Omega, & \text{gdy } d > 1 \\ s_{-+}^{-1}\left(\left(\min(t_0, t - \frac{1+d}{2i}), \infty\right)\right) \cup \\ \cup s_{+-}^{-1}\left(\left[t_0, t - \frac{1-d}{2i}\right)\right), & \\ \text{gdy } -1 < d \leq 1 \\ \phi, & \text{gdy } d \leq -1, \end{cases} \quad (3.125)$$

przy czym funkcje s_{-+} i s_{+-} zdefiniowane są wzorami (3.104) i (3.105). Zostało udowodnione, że są one mierzalne, a więc funkcja $U_i(\cdot, t)$ jest mierzalna dla dowolnych $i \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ oraz $t \in J$. Analogicznie rozpatrzyć można przypadek $x_0 \in Q_-$. Przypadek $x_0 = x_k$ jest trywialny. Ostatecznie, dla dowolnych $i \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ oraz $t \in J$ zostało wykazane, że funkcja $U_i(\cdot, t)$ jest mierzalna, a więc funkcje U_i są procesami stochastycznymi, przy czym ich realizacje są ciągłe. Tak więc, analogicznie jak powyżej dla $p_2 \circ p_1$, udowodnić można, że złożenia $z_2 \circ z_{1i}$ ($i = 1, 2, \dots$) są mierzalne (dla przyjętej postaci funkcji sterujących U_i , nie zostało dowiedzione istnienie C-rozwiązania równania (3.12) na przedziałach $(t_p, \frac{t_p+1}{i})$), jednak w poniższym rozumowaniu wystarczające jest jego uzupeł-

nianie na tych przedziałach, funkcją stałą o wartości $x_2(t_p)$). Niech teraz A będzie dowolnym otwartym podzbiorem przestrzeni $C(J, \mathbb{R}^2)$. Z ograniczoneści funkcji $|\dot{x}_2(\cdot)|$ i twierdzenia o ciągłej zależności rozwiązania klasycznego od warunków początkowych oraz funkcji określającej dynamikę układu [Pelczar, Szarski; s. 61] stosowanej odpowiednią (skończoną) ilość razy ze względu na nieciągłość funkcji U_∞^0 oraz f , tezy punktu 1 uwag z podrozdziału 2.1 i jednoznaczności C-rozwiązania wynikającej z tezy przedstawionego w poprzednim podrozdziale lematu 1 (rozważanego dla przedziałów $[t_0, t_p]$ i $[\frac{t_p+1}{i}, \infty) \cap J$), stosowanych tdo równania (3.12), a także ciągłej zależności rozwiązania klasycznego od funkcji określającej dynamikę układu [Pelczar, Szarski; s. 61], tez punktów 1 i 2 uwag z podrozdziału 2.1 i prawdziwej dzięki jednoznaczności rozwiązania klasycznego [Pelczar, Szarski; s. 66-67] jednoznaczności K-rozwiązania [Hajek, cz. II; s. 181], [Hajek, cz. I; s. 168], stosowanych do równania (3.11), wynika ciągła zależność C-rozwiązania od funkcji określającej dynamikę układu, a więc zachodzi równość:

$$(z_2 \circ z_1)^{-1}(A) = \bigcup_{j=1}^{\infty} \bigcap_{i=j}^{\infty} (z_2 \circ z_{1i})^{-1}(A). \quad (3.126)$$

Dla każdego $i \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ zbiór $(z_2 \circ z_{1i})^{-1}(A)$ jest mierzalny, a więc z definicji σ -algebry wynika mierzalność zbioru $(z_2 \circ z_1)^{-1}(A)$, co implikuje mierzalność złożenia $z_2 \circ z_1$.

Ciągłość odwzorowania z_3 jest oczywista.

Ponieważ t ustalone zostało dowolnie, powyższe własności dowodzą mierzalności funkcji $X(\cdot, t)$ dla każdego $t \in T$, a więc X jest procesem stochastycznym.

Z określenia funkcji X wzorem (3.117) wynika wprost, że jest ona C -rozwiązaniem pierwszego rodzaju generowanym w układzie (3.9)-(3.10) przez sterowanie U° zdefiniowane wzorem (3.93). Dowód faktu, że funkcja określona analogicznie do wzoru (3.117) jest F - lub K -rozwiązaniem pierwszego rodzaju, jest identyczny.

Jednoznaczność C -rozwiązania pierwszego rodzaju wynika wprost z jednoznaczności rozwiązań deterministycznych przy ustalonym $\omega \in \Omega'$, gdyż każde inne C -rozwiązanie pierwszego rodzaju może się różnić od funkcji X zdefiniowanej wzorem (3.117) co najwyżej na zbiorze miary zero. Dowód jednoznaczności F - i K -rozwiązania pierwszego rodzaju jest analogiczny.

Ponieważ funkcje $[X_1, X_2]^T, V, U^\circ$ są procesami stochastycznymi, to istnienie pochodnej pierwszego rodzaju dla C -, F - i K -rozwiązania wynika wprost z równań układu (3.9)-(3.10) na podstawie własności funkcji mierzalnych [Kołodziej, s. 292-293], [Łojasiewicz, s. 77; uogólnienie z funkcji ciągłej na przedziałami ciągłą jest oczywiste].

Niniejszym twierdzenie o czasowo optymalnym sterowaniu stochastycznym zostało udowodnione.

3.5. PROCES STOCHASTYCZNY O PRAWIE WSZYSTKICH REALIZACJACH CIĄGLYCH I WSPÓLNIE OGRANICZONYCH

W rozważanym problemie występuje proces stochastyczny V o prawie wszystkich realizacjach ciągłych i wspólnie ograniczonych nierównościami:

$$|V_\omega(t)| \leq 1 \quad \text{dla } t \in T. \quad (3.127)$$

Na podstawie analitycznego opisu danego procesu stochastycznego nietrudno jest stwierdzić, czy spełnia on powyższe wymagania. Jednak w praktyce rzadko dysponuje się takim opisem. Najczęściej korzystając z formułowanych hipotez (np. stacjonarność, własność Markowa [Sobczyk, s. 66-67, 69]) określa się empirycznie rozkłady, jakie badany proces indukuje na przestrzeniach \mathbb{R}^n dla $n = 1, 2, \dots$. Biorąc pod uwagę błędy identyfikacji powstaje pytanie, czy w ogóle istnieje proces stochastyczny o wyznaczonych rozkładach. Z kolei jeżeli taki proces

istnieje, to czy spełnia on przyjęte założenia ciągłości i ograniczenia. Zagadnieniom tym poświęcony będzie niniejszy podrozdział.

Definicja

Niech Y będzie rzeczywistym procesem stochastycznym określonym na przestrzeni probabilistycznej (Ω, S, P) i przedziale T o niepustym wnętrzu. Rodzinę miar probabilistycznych $\{P_{t_1, t_2, \dots, t_n}; n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}, t_1, t_2, \dots, t_n \in T, t_i \neq t_j \text{ gdy } i \neq j\}$ określoną na (\mathbb{R}^n, B^n) wzorem:

$$P_{t_1, t_2, \dots, t_n}(B) = \quad (3.128)$$

$$= P(\{\omega \in \Omega : [Y(t_1, \omega), Y(t_2, \omega), \dots, Y(t_n, \omega)]^T \in B\}), B \subset B^n,$$

gdzie B^n jest σ -algebrą n -wymiarowych zbiorów borelowskich, nazywa się rozkładami skończenie wymiarowymi procesu stochastycznego Y . ■

Definicja

Niech T będzie przedziałem o niepustym wnętrzu oraz niech $\{P_{t_1, t_2, \dots, t_n}; n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}, t_1, t_2, \dots, t_n \in T, t_i \neq t_j \text{ gdy } i \neq j\}$ będzie rodziną miar probabilistycznych określonych na (\mathbb{R}^n, B^n) , przy czym B^n jest σ -algebrą n -wymiarowych zbiorów borelowskich. Warunki:

$$P_{t_{p(1)}, t_{p(2)}, \dots, t_{p(n)}}(B_{t_{p(1)}} \times B_{t_{p(2)}} \times \dots \times B_{t_{p(n)}}) = \quad (3.129)$$

$$= P_{t_1, t_2, \dots, t_n}(B_{t_1} \times B_{t_2} \times \dots \times B_{t_n})$$

$$P_{t_1, t_2, \dots, t_{(n-1)}, t_n}(B_{t_1} \times B_{t_2} \times \dots \times B_{t_{(n-1)}} \times \mathbb{R}) = \quad (3.130)$$

$$= P_{t_1, t_2, \dots, t_{(n-1)}}(B_{t_1} \times B_{t_2} \times \dots \times B_{t_{(n-1)}})$$

określone dla każdego $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, dowolnych różnych $t_1, t_2, \dots, t_n \in T$, dowolnych 1-wymiarowych zbiorów borelowskich $B_{t_1}, B_{t_2}, \dots, B_{t_n}$ oraz permutacji $p: \{1, 2, \dots, n\} \rightarrow \{1, 2, \dots, n\}$, nazywane są warunkami zgodności. ■

Oczywiste jest, że spełnienie warunków zgodności stanowi warunek konieczny istnienia procesu stochastycznego, którego rozkładami skończenie wymiarowymi jest określona rodzina miar probabilistycznych. Przedstawione poniżej twierdzenie stanowi, że jest to również warunek wystarczający.

Twierdzenie (Kolmogorowa o rozkładach zgodnych)

Niech T będzie przedziałem o niepustym wnętrzu oraz niech $\{P_{t_1, t_2, \dots, t_n}; n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}, t_1, t_2, \dots, t_n \in T, t_i \neq t_j \text{ gdy } i \neq j\}$ będzie spełniającą warunki zgodności rodziną miar probabilistycznych określonych na (\mathbb{R}^n, B^n) , przy czym B^n jest σ -algebrą n -wymiarowych zbiorów borelowskich. Wtedy istnieje rzeczywisty proces stochastyczny, określony na pewnej przestrzeni probabilistycznej (Ω, S, P) oraz przedziale T , którego rozkładami skończenie wymiarowymi jest zadana rodzina miar probabilistycznych.

Dowód znajduje się w pracy [Wentzell, s. 110-113]. Realizacjami skonstruowanego tam procesu stochastycznego są wszystkie funkcje z przestrzeni \mathbb{R}^T . ■

Twierdzenie

Niech Y będzie rzeczywistym procesem stochastycznym określonym na przestrzeni probabilistycznej (Ω, S, P) oraz przedziale T o niepustym wnętrzu. Jeżeli istnieją dodatnie stałe c_1, c_2 i c_3 takie, że dla dowolnych $t^*, t^{**} \in T$ prawdziwe jest, iż:

$$E(|Y_{t^*} - Y_{t^{**}}|^{c_1}) \leq c_2 |t^* - t^{**}|^{1+c_3}, \quad (3.131)$$

gdzie E jest wartością oczekiwaną, to istnieje wtedy proces stochastycznie równoważny procesowi Y , mający prawie wszystkie realizacje ciągłe.

Dowód znajduje się w pracy [Wentzell, s. 121-123]. ■

Należy podkreślić, że procesy stochastycznie równoważne mają te same rozkłady skończenie wymiarowe.

Podsumowując, jeżeli dana jest (została wyznaczona empirycznie) taka rodzina miar probabilistycznych, że:

- spełnione są warunki zgodności (3.129) i (3.130),
- dla każdego $t \in T$ rozkłady 1-wymiarowe spełniają warunek $P_t([-1, 1]) = 1$,
- dla dowolnych $t^*, t^{**} \in T$ rozkłady 2-wymiarowe spełniają warunek (3.131), to istnieje proces stochastyczny o prawie wszystkich realizacjach ciągłych i ograniczonych nierównościami (3.127) oraz zadanych (wyznaczonych) rozkładach skończenie wymiarowych.

Warunek a jest tak mało rygorystyczny, że traktować go należy raczej jako sprawdzian poprawności określenia miar probabilistycznych. Warunki b oraz c dotyczące odpowiednio 1- i 2-wymiarowych rozkładów są wzajemnie niezależne.

3.6. SZCZEGÓLNY PRZYPADEK MIARY PROBABILISTYCZNEJ

W poniższym podrozdziale rozważany będzie problem czasowo optymalnego sterowania stochastycznego w szczególnym przypadku, gdy miara probabilistyczna P związana z procesem stochastycznym V spełnia warunek $P(\{\omega \in \Omega : \forall t \in T V(\omega, t) = w\}) = 1$, przy czym $w \in [-1, 1]$, czyli gdy jedyną występującą w rzeczywistości realizacją procesu stochastycznego V jest stała realizacja o ustalonej wartości w .

Jeśli $U \equiv \text{const} = u^* \in \{-1, 1\}$ oraz $V_\omega \equiv \text{const} = w \in [-1, 1]$, to wartości rozwiązań układu (3.7)-(3.8) są punktami $[x_1, x_2]^T \in \mathbb{R}^2$ spełniającymi równanie:

$$x_1 = c \frac{x_2^2 - x_{02}^2}{2[b u^* - a w \operatorname{sgn}(x_2)]} + x_{01}. \quad (3.132)$$

Niech przy ustalonym x_k dany będzie podział przestrzeni \mathbb{R}^2 na niepuste, rozłączne zbiory zdefiniowane następująco (rys. 3.4):

$$Q_-^* = \{[x_1, x_2]^T : \text{spełnia równanie (3.132) przy } u^* = -1, \\ x_{01} = x_{k1}, x_{02} = x_{k2} \text{ oraz } 0 < x_2\} \quad (3.133)$$

$$Q_+^* = \{[x_1, x_2]^T : \text{spełnia równanie (3.132) przy } u^* = +1, \\ x_{01} = x_{k1}, x_{02} = x_{k2} \text{ oraz } x_2 < 0\} \quad (3.134)$$

$$P_-^* = \{[x_1, x_2]^T : \text{istnieje } [x_1^*, x_2]^T \in Q^*, \text{ przy czym } x_1^* < x_1\} \quad (3.135)$$

$$P_+^* = \{[x_1, x_2]^T : \text{istnieje } [x_1^*, x_2]^T \in Q^*, \text{ przy czym } x_1 < x_1^*\} \quad (3.136)$$

$$\{x_k\}, \quad (3.137)$$

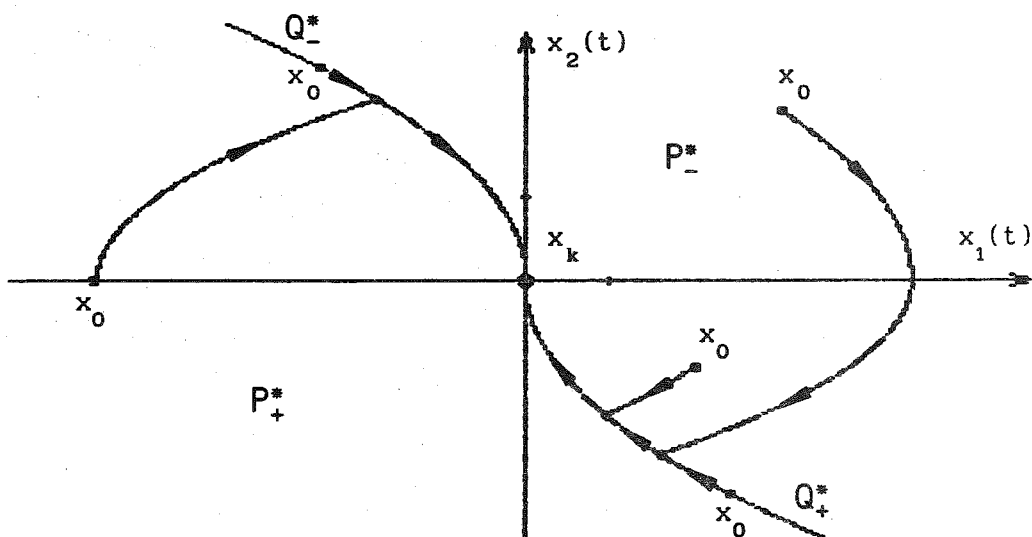
gdzie $Q^* = (Q_-^* \cup \{x_k\} \cup Q_+^*)$. Z dowodu lematu o czasowo optymalnym sterowaniu stochastycznym na realizacjach wynika, że przy rozważanej w niniejszym podrozdziale szczególnej mierze probabilistycznej, otrzymane w twierdzeniu czasowo optymalne sterowanie stochastyczne pierwszego rodzaju U^o można równoważnie określić w układzie zamkniętym zależnością:

$$U(\omega, t) = U^o(\omega, t) = \begin{cases} +1, & \text{gdy } X(\omega, t) \in (P_+^* \cup Q_+^*) \\ -1, & \text{gdy } X(\omega, t) \in (P_-^* \cup Q_-^*) \end{cases} \quad (3.138)$$

dla każdego $\omega \in \Omega$ oraz $t \in [t_0, t_k]$, przy czym t_k jest czasem osiągnięcia zbioru docelowego postaci $(x_{k1}, 0)$, gdzie $x_{k1} \in \mathbb{R}$, gdy $V_\omega \equiv w$.

Warto zauważyć, że zdefiniowana równaniem (3.138) funkcja określająca zależność sterowania U od stanu X , czyli tzw. funkcja regulatora, jest deterministyczna.

Ze względu na to, że zmiana znaku realizacji funkcji sterującej U (przełączenie sterowania) następuje tylko wtedy, gdy stan układu znajduje się na krzywej Q^* (rys. 3.4), nazywana ona będzie krzywą przełączeń. Występujący w rozważanym dotychczas ogólnym przypadku obszar przełączeń Q jest jej uogólnieniem.



Rys.3.4. Przykładowy podział przestrzeni \mathbb{R}^2 na zbiory Q_-^* , Q_+^* , P_-^* , P_+^* , $\{x_k\}$ oraz reprezentatywne trajektorie w rozważanym szczególnym przypadku miary probabilistycznej

4. SUBOPTYMALNY REGULATOR STOCHASTYCZNY

4.1. SFORMUŁOWANIE PROBLEMU

W niniejszym podrozdziale zostanie sformułowany problem suboptymalnego regulatora stochastycznego. Koncepcja tego regulatora będzie wnioskiem o charakterze aplikacyjnym z udowodnionego w poprzednim rozdziale twierdzenia o czasowo optymalnym sterowaniu stochastycznym.

Poza szczególnymi przypadkami, praktyczna realizacja układu generującego czasowo optymalne sterowanie stochastyczne pierwszego rodzaju U^o napotyka na duże trudności. Wartość tego sterowania jest bowiem uzależniona od czynnika losowego $\omega \in \Omega$, nieznanego a priori. Jednakże dzięki faktom dowiedzionym w twierdzeniu o czasowo optymalnym sterowaniu stochastycznym, prezentowany materiał jest dogodną podstawą do tworzenia technicznych rozwiązań struktur suboptymalnych, w których zależność ta jest wyeliminowana.

Na przykład: dowiedziono, że U^o jest procesem stochastycznym o wartościach ograniczonych, a zatem istnieje jego wartość oczekiwana [Sobczyk, s. 58; wartość przeciętna], która jako funkcja deterministyczna może być użyta w procesie sterowania suboptymalnego.

Inny przykład: w dowodzie twierdzenia o czasowo optymalnym sterowaniu stochastycznym wykazano, że dla ustalonego $x_0 \in (P_- \cup P_+)$ czas zmiany znaku poszczególnych realizacji procesu U^o jest zmienną losową. Jej wartość oczekiwana może być czasem zmiany znaku sterowania suboptymalnego $(-1, +1)$ lub $(+1, -1)$, będącego wtedy funkcją deterministyczną. Podobnie sformalizować można przypadek $x_0 \in (Q_- \cup Q_+)$.

Zaproponowana w tej pracy struktura suboptymalna oparta będzie na najprostszej spośród nietrywialnych, łatwiej do empirycznego uzyskania charakterystyce procesu stochastycznego V , tj. na rozkładzie zmiennej losowej będącej jego całką na ograniczonym przedziale.

Podobnie jak w przypadku rozwiązania równań różniczkowych losowych, stosowane będzie bliskie intuicji, dogodne do interpretacji pojęcie całki obliczanej na realizacjach, tzw. całki pierwszego rodzaju, zdefiniowanej poniżej.

Definicja

Niech dany będzie rzeczywisty proces stochastyczny Y określony na przestrzeni probabilistycznej (Ω, S, P) oraz niepustym przedziale I . Zmienna losowa $y : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ taka, że:

$$y(\omega) = \int_I Y_\omega(t) dt \quad \text{dla prawie każdego } \omega \in \Omega, \quad (4.1)$$

nazywana będzie całką pierwszego rodzaju procesu stochastycznego Y . ■

Twierdzenie

Rzeczywisty proces stochastyczny V określony na przestrzeni probabilistycznej (Ω, \mathcal{S}, P) oraz niepustym i ograniczonym przedziale I , o prawie wszystkich realizacjach ciągłych i ograniczonych nierównościami $|V_\omega(t)| \leq 1$ dla $t \in I$, posiada całkę pierwszego rodzaju.

Dowód

Rozważana będzie najpierw funkcja $V^* : \Omega \times I \rightarrow \mathbb{R}$ zdefiniowana wzorem:

$$V^*(\omega, \cdot) \equiv \begin{cases} V(\omega, \cdot), & \text{gdy } \omega \in \Omega' \\ 0, & \text{gdy } \omega \in \Omega'' \end{cases} \quad (4.2)$$

gdzie Ω' jest zbiorem tych $\omega \in \Omega$, dla których spełnione są założenia ciągłości i ograniczenia realizacji V_ω , natomiast $\Omega'' = \Omega \setminus \Omega'$. Ze względu na równość $P(\Omega'') = 0$ oraz zupełność miary P , funkcja V^* jest również procesem stochastycznym.

Co więcej, funkcja V^* jest mierzalna względem σ -algebry produktowej w $\Omega \times I$. Wynika to z faktu, że funkcja $V^*(\cdot, t)$ jest mierzalna dla każdego $t \in I$ oraz funkcja $V^*(\omega, \cdot)$ jest ciągła dla każdego $\omega \in \Omega$ (w podrozdziale 3.4 zostało wykazane, że spełniająca takie założenia funkcja p jest mierzalna względem σ -algebry produktowej).

Ze względu na ograniczenie $|V^*(\omega, t)| \leq 1$ prawdziwe dla każdego $\omega \in \Omega$ oraz $t \in I$, funkcja V^* jest sumowalna. Z twierdzenia Fubiniego [Łojasiewicz, s. 146] wynika więc wprost istnienie całki pierwszego rodzaju procesu stochastycznego V^* . Ponieważ $P(\Omega'') = 0$, to jest ona również całką pierwszego rodzaju procesu stochastycznego V . ■

W proponowanej strukturze suboptymalnej dokonane będzie uproszczenie modelu układu sterowanego. Realizacja V_ω zastąpiona zostanie stałą realizacją o wartości równej średniej w sensie całki pierwszego rodzaju, tzn.:

$$V(\omega, t) \cong v(\omega) = \frac{1}{m(I)} v^*(\omega) \quad \text{dla } \omega \in \Omega \text{ i } t \in T, \quad (4.3)$$

gdzie $I \subset T$ jest ograniczonym przedziałem o niepustym wnętrzu, a v^* oznacza całkę pierwszego rodzaju procesu stochastycznego V określoną na przedziale I . Powyższa koncepcja oparta jest na fizycznych własnościach oporów ruchu.

Należy podkreślić, że ze względu na czynnik losowy w postaci zmiennej losowej v , dynamika układu nadal opisywana być musi losowym równaniem

różniczkowym. Tak sformułowany problem traktować można jako szczególny, chociaż nietrywialny, przypadek rozważanego w poprzednim rozdziale problemu czasowo optymalnego sterowania stochastycznego, a mianowicie gdy miara probabilistyczna P posiada własność $P(\{\omega \in \Omega : V_\omega \text{ jest funkcją stałą}\}) = 1$. Teza twierdzenia o czasowo optymalnym sterowaniu stochastycznym pozostaje prawdziwa, a sterowanie U° jest nadal zależne od czynnika losowego.

Praktyka sterowania optymalnego skłania natomiast do przyjęcia koncepcji zamkniętej struktury sterującej z deterministyczną funkcją regulatora.

Problem suboptymalnego regulatora stochastycznego

Niech $0 \leq a < b$, $c > 0$ oraz $t_0 \in \mathbb{R}$. Niech (Ω, S, P) będzie przestrzenią probabilistyczną oraz niech $T = [t_0, \infty)$. Niech $x_0, x_k \in \mathbb{R}^2$ reprezentują stany początkowy i docelowy. Niech v będzie rzeczywistą zmienną losową określoną na przestrzeni probabilistycznej (Ω, S, P) , przy czym $P(\{\omega \in \Omega : v(\omega) \in [-1, 1]\}) = 1$. Niech wreszcie dane będzie losowe równanie różniczkowe określające dynamikę układu poddanego działaniu sterowania U :

$$\dot{X}_1(\omega, t) = X_2(\omega, t) \quad (4.4)$$

$$\dot{X}_2(\omega, t) = \frac{1}{c} [b U(\omega, t) - a v(\omega) \operatorname{sgn}(X_2(\omega, t))]. \quad (4.5)$$

Należy określić funkcję (deterministyczną) $R_s : \mathbb{R}^2 \rightarrow [-1, 1]$, zwaną funkcją suboptymalnego regulatora stochastycznego taką, że sterowanie:

$$U(\omega, t) = R_s(X(\omega, t)) \quad \text{dla } \omega \in \Omega \text{ i } t \in T \quad (4.6)$$

przeprowadza prawie wszystkie realizacje procesu stochastycznego X z punktu x_0 do x_k , przy czym wartość oczekiwana czasu trwania tego procesu jest bliska minimalnej. ■

W odniesieniu do podstawowego w tej pracy problemu czasowo optymalnego sterowania stochastycznego, określona powyżej zmienna losowa v interpretowana jest jako średnia w sensie całki pierwszego rodzaju, występującego tam procesu stochastycznego V . Istnienie tej całki zostało dowiedzione powyżej, natomiast warunek $P(\{\omega \in \Omega : v(\omega) \in [-1, 1]\}) = 1$ wynika wprost z jej definicji i własności procesu V .

W teorii miary przyjmuje się $0 \cdot \infty = 0$ [Rudin, s. 27]. Jeżeli więc dla podzbioru Ω zerowej miary P , stan układu nie osiąga zbioru docelowego (czyli

można zdefiniować, że w tym przypadku czas osiągnięcia zbioru docelowego równa się ∞), to fakt ten nie wpłynie na wartość oczekiwaną osiągnięcia zbioru docelowego.

Funkcja suboptymalnego regulatora stochastycznego R_s zostanie określona w dwóch następujących podrozdziałach. Rozważania te będą podsumowane w twierdzeniu o suboptymalnym regulatorze stochastycznym, sformułowanym i udowodnionym w kolejnym podrozdziale.

4.2. SYNTEZA SUBOPTIMALNEGO REGULATORA STOCHASTYCZNEGO W PRZYPADKU ZBIORU DOCELOWEGO POSTACI $[x_{k1}, 0]^T$

W podrozdziale tym zostanie określona, zdefiniowana równaniem (4.6) funkcja suboptymalnego regulatora stochastycznego R_s , w dominującym w praktyce sterowania czasowo optymalnego przypadku, gdy zbiór docelowy jest postaci $[x_{k1}, 0]^T$, gdzie $x_{k1} \in \mathbb{R}$. Nastąpi to w oparciu o treść rozdziału 3, bowiem przy takiej postaci zbioru docelowego prawdziwe jest twierdzenie o czasowo optymalnym sterowaniu stochastycznym oraz rozważania zawarte w podrozdziale 3.6, dotyczące szczególnego przypadku miary probabilistycznej. Wykorzystane też będą elementy teorii decyzji omówione w podrozdziale 2.4.

Niech będą dane:

- a) losowy układ dynamiczny (3.7)-(3.8) rozważany w rozdziale 3 w problemie czasowo optymalnego sterowania stochastycznego,
- b) losowy układ dynamiczny (4.4)-(4.5) rozważany obecnie w problemie suboptymalnego regulatora stochastycznego,
- c) losowy układ dynamiczny rozważany w podrozdziale 3.6, tzn. układ (3.7)-(3.8), gdy miara probabilistyczna P związana z procesem stochastycznym V spełnia warunek $P(\{\omega \in \Omega : \forall t \in T V(\omega, t) = w\}) = 1$, przy czym $w \in [-1, 1]$ jest ustalone.

Drugi układ jest szczególnym, choć nietrywialnym, przypadkiem pierwszego. Trzeci układ jest natomiast szczególnym, z punktu widzenia probabilistyki trywialnym, przypadkiem dwóch pierwszych. Skonstruowane dla pierwszego układu czasowo optymalne sterowanie stochastyczne pierwszego rodzaju U° obejmuje więc wszystkie trzy układy. Jednakże wymagania określone w problemie suboptymalnego regulatora stochastycznego, sterowanie to spełnia tylko w przypadku trzeciego układu, gdy obszar przełączeń Q sprowadza się do krzywej przełączeń Q° .

Skonstruowana poniżej suboptymalna struktura sterująca opierać się będzie na uproszczeniu obszaru przełączeń Q do krzywej przełączeń wzorowanej na Q° .

Funkcja regulatora czasowo optymalnego definiowana dla układu losowego (4.4)-(4.5) wzorem (4.6), określana jest przez równanie (3.138), a więc również przez (3.133)-(3.137) i wreszcie (3.132). Występujący w ostatnim równaniu parametr w , w układzie losowym (4.4)-(4.5) będący przeciw wartością zmiennej losowej o rozkładzie spełniającym w ogólnym przypadku miary probabilistycznej jedynie warunek $P(\{\omega \in \Omega : v(\omega) \in [-1,1]\}) = 1$, a więc a priori nie znany z prawdopodobieństwem 1, wyznaczany będzie w oparciu o teorię decyzji. I tak, wartość parametru przyjęta w równaniach regulatora (oznaczana dalej przez $W \in [-1,1]$) traktowana będzie jako decyzja, a ustalona wartość zmiennej losowej v występująca w układzie (oznaczana nadal przez $w \in [-1,1]$) – jako stan natury. Wartości funkcji strat są określone dla $(W, w) \in [-1,1] \times [-1,1]$ i mają związek z czasem osiągnięcia zbioru docelowego, gdy w równaniach regulatora przyjęto wartość W , a w układzie występuje wartość w .

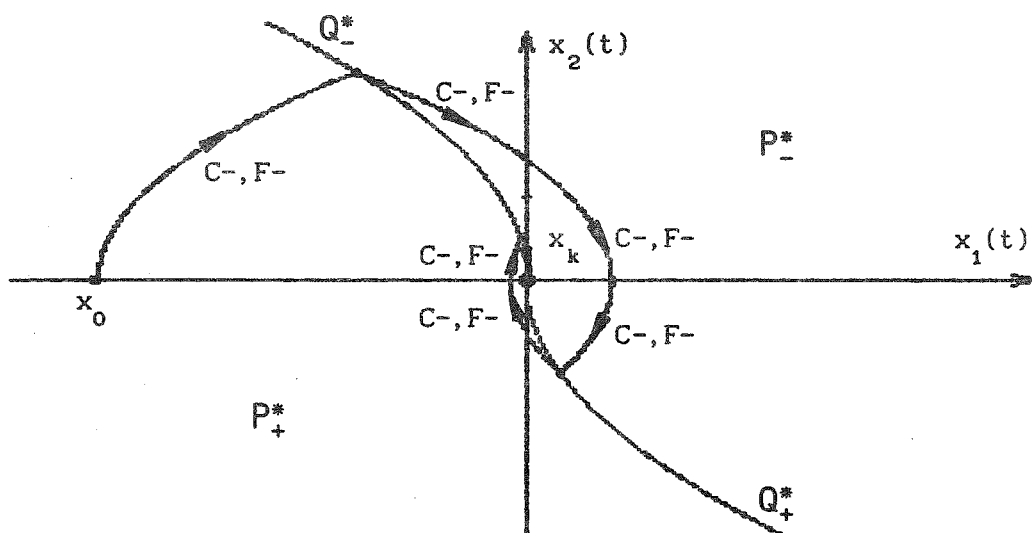
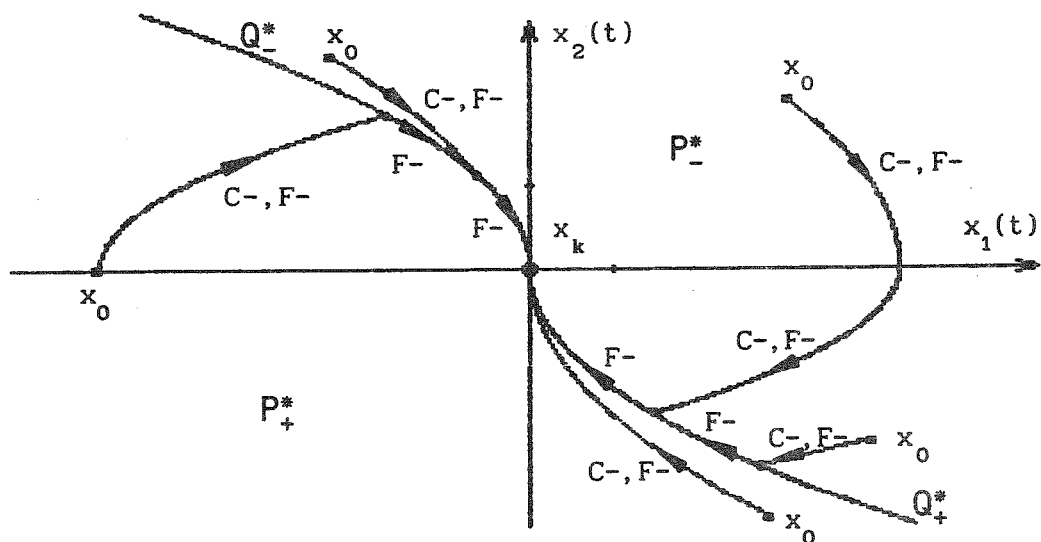
Omówiona teraz zostanie procedura wyznaczenia wartości parametru W . Najpierw rozpatrywana będzie wrażliwość układu deterministycznego, powstałego z układu losowego (4.4)-(4.5) przez ustalenie elementu $\omega \in \Omega$ tak, że $v(\omega) = w$, na wartość parametru W występującą w równaniach regulatora. Kształty trajektorii i krzywej przełączeń wynikają bezpośrednio ze wzoru (3.132), z podstawieniem odpowiednio w oraz W .

Przypadek $W = w$ został rozważony w podrozdziale 3.6. Sterowanie jest wtedy czasowo optymalne (!). Stan układu sprowadzany jest do zbioru docelowego w skończonym czasie, jednoznacznym C -rozwiązaniem, będącym również jednoznacznym F -rozwiązaniem.

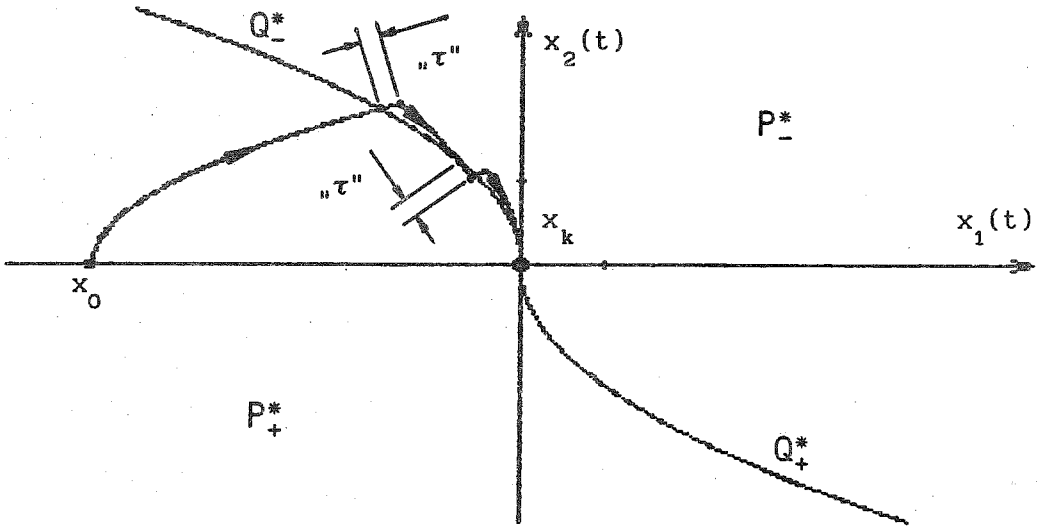
Na rysunku 4.1 pokazana jest trajektoria reprezentatywna dla przypadku $W > w$. Na skutek występujących oscylacji trajektorii wokół zbioru docelowego, w układzie pojawiają się przeregulowania. W pracy [Hejmo, Kloch; 1989] omawiającej układy deterministyczne pokazano, iż trajektorie są jednoznaczными C -rozwiązaniami oraz, że stan układu osiąga zbiór docelowy w skończonym czasie. Dowód, iż są one również jednoznaczными F -rozwiązaniami, jest analogiczny do dowodu przeprowadzonego w podrozdziale 3.3, przy czym dla każdego $t \in T$ brzegami występujących tam zbiorów $M_{t,i}$ są oś x_1 i krzywa Q^* .

Na rysunku 4.2 przedstawione są trajektorie reprezentatywne dla przypadku $W < w$. Do chwili przecięcia krzywej przełączeń występuje jednoznaczne C -potem tylko F -rozwiązanie (jednoznaczne); zbiór docelowy osiągniany jest w skończonym czasie [Hejmo, Kloch; 1989]. Dowód, że C -rozwiązanie jest równocześnie jednoznacznym F -rozwiązaniem, jest identyczny z opisanym powyżej.

W układach z opóźnieniem $\tau > 0$, C -rozwiązanie nie kończy się w chwili przecięcia przez trajektorię krzywej przełączeń. Występuje tu szereg przełączeń generujących tzw. trajektorię poślizgową (rys. 4.3). F -rozwiązanie występujące w

Rys.4.1. Trajektoria reprezentatywna dla przypadku $W > w$ Rys.4.2. Trajektorie reprezentatywne dla przypadku $W < w$

układzie bez opóźnienia, można interpretować jako granicę w normie supremum C -rozwiązań stanowiących trajektorie poślizgowe, przy $\tau \rightarrow 0$. Oczywiście im większa jest różnica między wartościami W oraz w , tym czas osiągnięcia przez układ zbioru docelowego trajektorią poślizgową jest większy.



Rys.4.3. Trajektoria poślizgowa

Podobnie jest w przypadku $W > w$, tzn. gdy występują oscylacje: im większa jest różnica między wartościami W oraz w , tym większy jest czas osiągnięcia zbioru docelowego.

Tak więc przyjęcie wartości W zarówno mniejszej, równej, jak i większej od w , pozwala sprowadzić stan rozważanego układu deterministycznego, F -rozwiązaniem do zbioru docelowego w skończonym czasie. Czas osiągnięcia zbioru docelowego jest jednak uzależniony od różnicy między wartościami W oraz w . W układzie mogą wystąpić przeregulowania, które w praktyce są często niedopuszczalne. Wynikają stąd następujące sugestie wyznaczenia wartości parametru W .

Jeżeli w sterowanym układzie przeregulowania są niedopuszczalne, to dobór wartości parametru W należy przeprowadzić w oparciu o regułę minimum, przyjmując dla $W > w$ nieskończoną wartość funkcji strat. Jeżeli natomiast można dopuścić przeregulowania, to warto wtedy stosować regułę Bayesa, pozwalającą uzyskać minimum wartości oczekiwanej strat, czyli czasu osiągnięcia zbioru docelowego. Postać funkcji strat i jej parametry uzyskać można na drodze symulacji cyfrowej lub empirycznie.

Przykład

Niech v będzie zmienną losową, która posiada funkcję gęstości h [Billingsley, s. 256]. Twierdzenie Radona-Nikodyma [Łojasiewicz, s. 203-205] dostarcza na to następującego warunku wystarczającego: $P(\{\omega \in \Omega : v(\omega) \in E\}) = 0$ dla dowolnego zbioru $E \subset \mathbb{R}$ zerowej miary Lebesgue'a.

Co więcej, niech nośnik funkcji [Alexiewicz, s. 399] gęstości będzie postaci $[w_{\min}, w_{\max}] \subset [-1, 1]$ (w takim przypadku należy więc przyjąć $N = D = [w_{\min}, w_{\max}]$). Poza tym, niech w zbiorze $\text{int}(N)$ funkcja h będzie ciągła oraz spełnia warunek $h(x) > 0$.

Funkcja strat $s : D \times N \rightarrow \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ określona będzie wzorem:

$$s(d, n) = s(W, w) = \begin{cases} -e(W - w), & \text{gdy } W - w \leq 0 \\ f(W - w), & \text{gdy } W - w \geq 0, \end{cases} \quad (4.7)$$

przy czym e oraz f są liczbami rzeczywistymi dodatnimi lub jeden z tych elementów jest równy ∞ . Przyjmuje się wtedy, że $0 \cdot \infty = 0$.

Przy ustalonym W , z równań (2.20) i (2.23) wynika, iż:

$$s_m(W) = \max(\{-e(W - w_{\max}), f(W - w_{\min})\}) \quad (4.8)$$

$$s_b(W) = \int_{w_{\min}}^W f(W - w) h(w) dw - \int_W^{w_{\max}} e(W - w) h(w) dw. \quad (4.9)$$

Jeżeli $f = \infty$, to z równania (4.8) otrzymuje się, że infimum funkcji s_m po zbiorze D realizowane jest przez:

$$W = w_{\min}. \quad (4.10)$$

Dla potrzeb następnego podrozdziału warto jeszcze zauważyć, że jeżeli $e = \infty$, to infimum funkcji s_m realizowane jest przez:

$$W = w_{\max}. \quad (4.11)$$

Natomiast z równania (4.9) wynika, iż:

$$s_b(W) = e W \int_{w_{\max}}^W h(w) dw - e \int_{w_{\max}}^W w h(w) dw + f W \int_{w_{\min}}^W h(w) dw - \\ - f \int_{w_{\min}}^W w h(w) dw. \quad (4.12)$$

Funkcja s_b jest różniczkowalna w zbiorze D [Leya, s. 289]. Jej pochodna dana jest wzorem:

$$\frac{ds_b(W)}{dW} = e \int_{w_{\max}}^W h(w) dw + f \int_{w_{\min}}^W h(w) dw. \quad (4.13)$$

Jest ona również różniczkowalna i druga pochodna wynosi:

$$\frac{d^2 s_b(W)}{dW^2} = (e + f) h(W). \quad (4.14)$$

Funkcja ta jest dodatnia w $\text{int}(D)$, a więc ciągła funkcja s_b jest w zbiorze D wypukła. Jeśli więc istnieje element $W \in D$ taki, że $\frac{ds_b(W)}{dW} = 0$, to w punkcie tym funkcja s_b osiąga minimum.

Warunek zerowej wartości pochodnej funkcji s_b jest równoważny równaniu:

$$\int_{w_{\min}}^W h(w) dw = \frac{e}{e+f}. \quad (4.15)$$

Ponieważ:

$$0 < \frac{e}{e+f} < 1, \quad (4.16)$$

to istnieje jedyny element $W \in \text{int}(D)$ spełniający równanie (4.15), czyli punkt, w którym funkcja s_b osiąga minimum w zbiorze D .

Jeżeli więc w sterowanym układzie przeregulowania są niedopuszczalne i wartość parametru W określona ma być zgodnie z regułą minimaksu przy $f = \infty$, to wartość parametru W otrzymuje się ze wzoru (4.10). Wynik jest zgodny z intuicją, gdyż parametr W przyjmujący wartość minimalną, a więc zapewniającą warunek $W \leq w$, zabezpiecza przed przeregulowaniami.

Jeżeli natomiast przeregulowania są dopuszczalne, a więc wartość parametru W określana jest za pomocą reguły Bayesa, to otrzymać ją można korzystając z równania (4.15). Jest ono równoważne zależności:

$$\frac{\int_{w_{\min}}^W h(w) dw}{\int_{w_{\min}}^{w_{\max}} h(w) dw} = \frac{f}{e}. \quad (4.17)$$

Wzór ten jest dogodny do interpretacji: wartość parametru W wyznaczona jest tak, iż iloraz prawdopodobieństw, że zmienna losowa v przyjmie wartość większą i mniejszą od W , jest równy $\frac{f}{e}$, co jest zgodne z intuicją, biorąc pod uwagę przyjętą postać funkcji strat (4.7).

W obu przypadkach wartość parametru W określona jest jednoznacznie i należy do zbioru D . ■

Przykład

Niech rozkład zmiennej losowej v będzie jednostajny w zbiorze $N = [w_{min}, w_{max}] \subset [-1, 1]$, przy czym $w_{min} < w_{max}$ (w przeciwnym przypadku układ byłby w rzeczywistości deterministyczny). Funkcja gęstości h określona jest więc wzorem:

$$h(w) = \begin{cases} \frac{1}{w_{max} - w_{min}} & \text{dla } w \in [w_{min}, w_{max}] \\ 0 & \text{w przeciwnym przypadku,} \end{cases} \quad (4.18)$$

a więc spełnia założenia poprzedniego przykładu. Zbiór decyzji D oraz funkcja strat s pozostają nie zmienione w stosunku do poprzedniego przykładu.

Jeżeli wartość parametru W określona ma być w oparciu o regułę minimumu $f = \infty$, to otrzymuje się ją ze wzoru (4.10).

Jeżeli wykorzystywana ma być reguła Bayesa, to kryterium (4.15) po podstawieniu zależności (4.18) sprowadza się do równania:

$$W = w_{min} + \frac{e}{e + f} (w_{max} - w_{min}). \quad (4.19)$$

Jakkolwiek rozkład jednostajny ma bardzo uproszczoną postać, to poza łatwym do empirycznego określenia nośnikiem funkcji gęstości, nie zależy od żadnego parametru. Wartości określone przez wzory (4.10) i (4.19) wyznaczone mogą być za pomocą prostych operacji obliczeniowych. ■

Przykład

Niech zmienna losowa v ma rozkład beta rozpięty na zbiorze $N = [w_{min}, w_{max}] \subset [-1, 1]$ (ponownie $w_{min} < w_{max}$), o parametrach $p > 1$, $r > 1$. Funkcja gęstości wyraża się więc wzorem:

$$h(w) = \begin{cases} k(w - w_{\min})^{p-1}(w_{\max} - w)^{r-1} & \text{dla } w \in [w_{\min}, w_{\max}] \\ 0 & \text{w przeciwnym przypadku,} \end{cases} \quad (4.20)$$

gdzie k jest stałą taką, że całka z funkcji h jest równa 1 (jej wartość zostanie obliczona poniżej). Zbiór decyzji D i funkcja strat s pozostają nie zmienione.

Transformacje:

$$Z = mW + n \quad (4.21)$$

$$z = mw + n, \quad (4.22)$$

gdzie $m = \frac{1}{(w_{\max} - w_{\min})}$ oraz $n = -\frac{w_{\min}}{w_{\max} - w_{\min}}$ pozwalają zastąpić przedział $[w_{\min}, w_{\max}]$ przez $[0,1]$, standardowy dla rozkładu beta. W nowych zmiennych, zbiory N, D oraz funkcje s, h przyjmują postać:

$$N^* = D^* = [0,1] \quad (4.23)$$

$$s^*(d, n) = s^*(Z, z) = \begin{cases} -e^*(Z - z), & \text{gdy } Z - z \leq 0 \\ f^*(Z - z), & \text{gdy } Z - z \geq 0, \end{cases} \quad (4.24)$$

gdzie $e^* = \frac{e}{m}$, $f^* = \frac{f}{m}$ oraz:

$$h^*(z) = \begin{cases} \frac{k}{m^{p+r-2}} z^{p-1}(1-z)^{r-1} & \text{dla } z \in [0,1] \\ 0 & \text{w przeciwnym przypadku.} \end{cases} \quad (4.25)$$

Można teraz obliczyć wartość stałej k , ponieważ $\frac{k}{m^{p+r-2}}$ jest odwrotnością wartości funkcji beta definiowanej przez całkę Eulera [Fichtenholz, s. 643]:

$$\text{beta}(p, r) = \int_0^1 y^{p-1}(1-y)^{r-1} dy. \quad (4.26)$$

Określenie wartości parametru W oparte na zasadzie minimum przy $f = \infty$ dane jest wzorem (4.10).

W przypadku reguły Bayesa, z równania (4.15) otrzymuje się wprost:

$$\int_0^z z^{p-1}(1-z)^{r-1} dz = \frac{e}{e+f} \int_0^1 z^{p-1}(1-z)^{r-1} dz \quad (4.27)$$

lub jeśli znana jest wartość funkcji beta:

$$\int_0^z z^{p-1}(1-z)^{r-1} dz = \frac{e}{e+f} \text{beta}(p, r). \quad (4.28)$$

Stosując transformację odwrotną do (4.21), można otrzymać poszukiwaną wartość parametru W .

Występująca w równaniach (4.27) i (4.28) funkcja podcałkowa $z^{p-1}(1-z)^{r-1}$ jest przykładem tzw. różniczki dwumiennej. Poza szczególnymi przypadkami nie istnieje jej funkcja pierwotna [Fichtenholz, s. 40-41]. Stosując w trakcie rozwiązywania równania (4.27) metody numeryczne obliczania wartości całki oznaczonej oparte na jej addytywności jako funkcji zbioru [Kołodziej, s. 306] (np. metodę trapezów [Kącki, s. 244-246]), można zachować wyniki pośrednie powstałe w trakcie dodawania kolejnych wartości (np. pól trapezów) przy obliczaniu wartości całki na zbiorze $[0,1]$, które potem mogą być wykorzystane do wyznaczania wartości całki na zbiorze $[0,Z]$. Jest to warte zanotowania ze względu na czasochłonność numerycznych obliczeń wartości całek oznaczonych.

Rozkład beta, poza nośnikiem funkcji gęstości zależny od dwóch parametrów, znacznie lepiej estymuje rzeczywistość niż rozkład jednostajny. Jego stosowanie stwarza jednak szereg dodatkowych trudności. Potrzeba określenia estymat parametrów p oraz r zwiększa stopień trudności w trakcie procesu identyfikacji. Samo obliczenie ich wartości na podstawie próby nie jest jednoznaczne (problemami tymi zajmuje się estymacja punktowa [Pawłowski, s. 59-107]). Wreszcie, kryterium (4.15) przyjmuje tu postać skomplikowaną dla procedur obliczeniowych. ■

Pośrednim między rozkładami jednostajnym i beta jest rozkład trójkątny [Bobrowski 1980, s. 227], zależny poza nośnikiem funkcji gęstości od jednego parametru. W procesie identyfikacji i estymacji wartości tego parametru występują podobne trudności jak w przypadku rozkładu beta. Jednak kryterium (4.15) przyjmuje tu postać równania warunkowego, którego każdy wariant wymaga, podobnie jak w przypadku rozkładu jednostajnego, jedynie prostych operacji obliczeniowych.

Przykład

Rozważany będzie losowy układ dynamiczny określony w problemie suboptimalnego regulatora stochastycznego, przy czym przyjmuje się następujące wartości parametrów:

$$a = 0,5 \quad (4.29)$$

$$b = 1 \quad (4.30)$$

$$c = 1 \quad (4.31)$$

$$x_k = [0, 0]^T \quad (4.32)$$

oraz funkcję strat daną wzorem (4.7), przy czym:

$$e = 1 \quad (4.33)$$

$$f = 4. \quad (4.34)$$

Przyjęte również będzie, iż:

$$w_{min} = 0,2 \quad (4.35)$$

$$w_{max} = 0,7. \quad (4.36)$$

Jeżeli wartość parametru W ustalona ma być w oparciu o regułę minimaksu, to ze wzoru (4.10) otrzymuje się, że:

$$W = 0,2. \quad (4.37)$$

Na podstawie tych danych można również określić wartość parametru W zgodnie z regułą Bayesa, zakładając jednostajny rozkład zmiennej losowej v . Z równania (4.19) wynika wtedy, iż:

$$W = 0,3. \quad (4.38)$$

Aby otrzymać wartość parametru W w oparciu o rozkład beta, należy dodatkowo określić estymaty parametrów tego rozkładu. Niech, dla uproszczenia obliczeń, wynoszą one:

$$p = 2 \quad (4.39)$$

$$r = 3. \quad (4.40)$$

Występująca w równaniu (4.27) funkcja podcałkowa posiada w tym szczególnym przypadku funkcję pierwotną i kryterium to sprowadza się do wyznaczenia pierwiastka równania:

$$15Z^4 - 40Z^3 + 30Z^2 - 1 = 0, \quad (4.41)$$

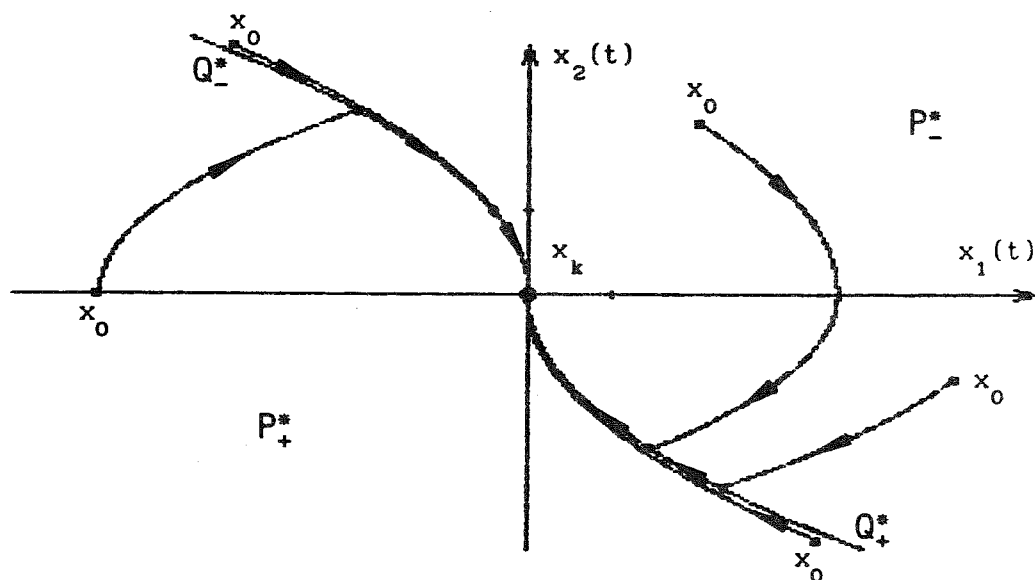
jedynego w przedziale $[0,1]$, co można sprawdzić korzystając z twierdzenia Sturma [Opiał, s. 248-251]. Jego wartość jest w przybliżeniu równa 0,212, a więc z równania (4.21) otrzymuje się, iż:

$$W = 0,31. \quad (4.42)$$

Podsumowując, dla układu rozpatrywanego w tym przykładzie, z równań (3.132)-(3.134) wynika, że:

$$Q_-^* = \{ [x_1, x_2]^T \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x_2 \text{ i } x_1 = \frac{x_2^2}{-2 - 0,5W} \} \quad (4.43)$$

$$Q_+^* = \{ [x_1, x_2]^T \in \mathbb{R}^2 : x_2 \leq 0 \text{ i } x_1 = \frac{x_2^2}{2 + 0,5W} \}. \quad (4.44)$$



Rys.4.4. Określona w przykładzie funkcja suboptymalnego regulatora stochastycznego R_s oraz reprezentatywne trajektorie występujące w układzie

Pozostałe zbiory P_-^* oraz P_+^* otrzymać można łatwo ze wzorów (3.135) i (3.136). Sterowanie suboptymalne skonstruowane w układzie zamkniętym, wyznaczone jest równaniem (3.138).

Niniejszym, określona została przykładowo, poszukiwana w problemie suboptymalnego regulatora stochastycznego funkcja R_s . Dla wartości parametru W otrzymanej we wzorze (4.38) przy założeniu rozkładu jednostajnego, funkcję tę ilustruje rysunek 4.4. Zaznaczone są tam również reprezentatywne trajektorie otrzymane dla $v(\omega) = w = 0,45$. ■

W praktyce rozkłady jednostajny i beta można traktować jako komplementarne. Obliczenia oparte na rozkładzie jednostajnym stosowane powinny być, gdy brak jest dostatecznej ilości wiarygodnych danych lub czasu na przeprowadzenie obliczeń. W sprzyjających warunkach warto używać rozkładu beta, dokładniej estymującego rzeczywistość.

4.3. SYNTEZA SUBOPTIMALNEGO REGULATORA STOCHASTYCZNEGO W PRZYPADKU ZBIORU DOCELOWEGO POSTACI $[x_{k1}, x_{k2}]^T$, GDZIE $x_{k2} \neq 0$

W poniższym podrozdziale zostanie określona, zdefiniowana równaniem (4.6) funkcja regulatora suboptymalnego R_s w przypadku, gdy zbiór docelowy jest postaci $[x_{k1}, x_{k2}]^T$, przy czym $x_{k1} \in \mathbb{R}$ i $x_{k2} \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Udowodnione w rozdziale 3 twierdzenie o czasowo optymalnym sterowaniu stochastycznym nie obejmuje bezpośrednio tego przypadku, ale stwarza możliwość skonstruowania struktury suboptymalnej dzięki występującym analogiom do omawianego w poprzednim podrozdziale przypadku $x_{k2} = 0$.

Rozważany będzie przypadek $x_{k2} > 0$. Przypadek $x_{k2} < 0$ jest analogiczny. Analitycznie uzyskać go można przez zmianę zmiennych:

$$\begin{aligned} x_1^*(t) &= -x_1(t), & x_2^*(t) &= -x_2(t), & u^*(t) &= -u(t), \\ v^*(t) &= -v(t), \end{aligned} \tag{4.45}$$

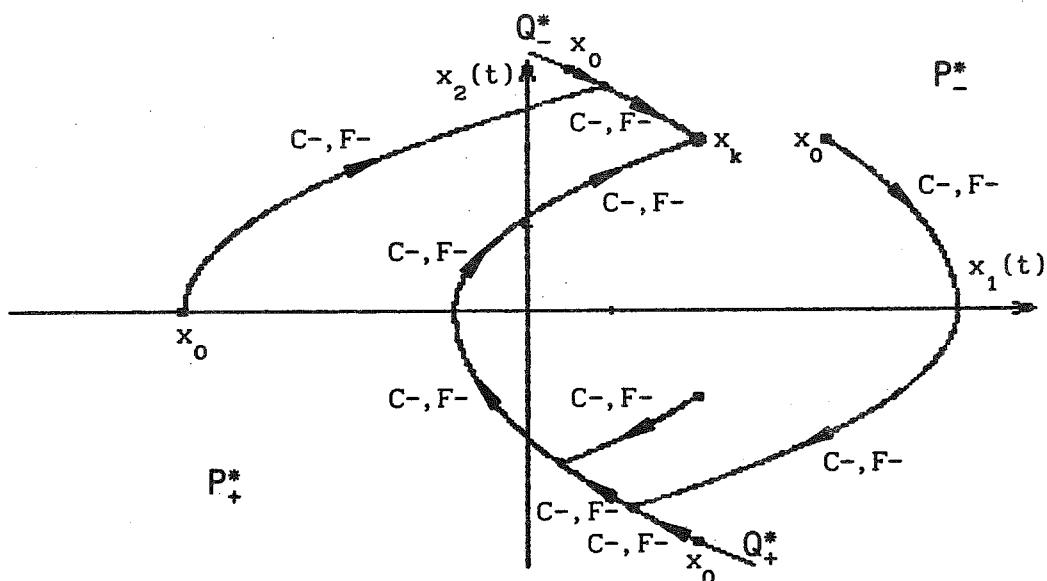
gdzie $t \in T$.

Trajektorie układu, tak jak w przypadku $x_{k2} = 0$, opisywane są przez równanie (3.132), zatem przenosząc na rozważany przypadek wyniki poprzedniego podrozdziału, funkcja suboptymalnego regulatora stochastycznego R_s definiowana dla układu losowego (4.4)-(4.5) równaniem (4.6), określona będzie tu również wzorem (3.138), a więc także (3.133)-(3.137) i (3.132). Podobnie, wartość

występującego w ostatnim wzorze parametru W wyznaczana będzie w oparciu o teorię decyzji, przy tej samej interpretacji zbiorów decyzji D i stanów natury N oraz funkcji strat s . Jednakże procedura wyznaczenia wartości parametru W będzie odmienna niż w przypadku $x_{k2} = 0$, gdyż różne jest zachowanie się układu gdy $W \neq w$.

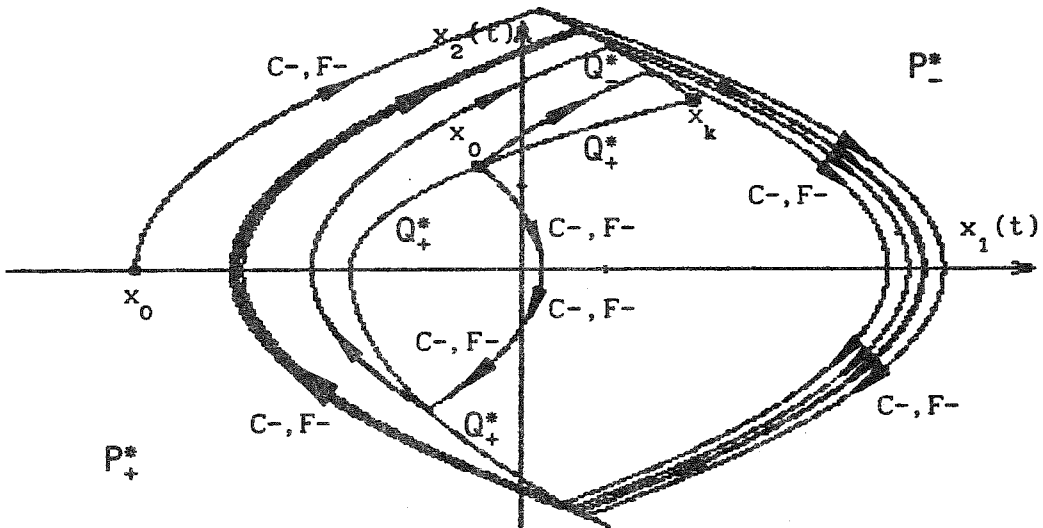
Rozpatrywana teraz będzie wrażliwość układu deterministycznego powstałego z (4.4)-(4.5) przez ustalenie elementu $\omega \in \Omega$ tak, że $v(\omega) = w$, na wartość parametru W występującą w równaniach regulatora. Kształty trajektorii i krzywej przełączeń wynikają bezpośrednio z równania (3.132) po podstawieniu odpowiednio w oraz W .

W przypadku $W = w$ (rys. 4.5), podobnie jak dla $x_{k2} = 0$, określone sterowanie jest czasowo optymalne (!). Fakt ten warty jest szczególnego podkreślenia, gdyż jest podstawą stosowanej analogii do przypadku $x_{k2} = 0$. Stan układu sprowadzany jest C -rozwiązaniem do krzywej przełączeń i będąc odtąd stałe w niej zawarty, osiąga zbiór docelowy również C -rozwiązaniem w skończonym czasie. Rozwiązania te mogą być niejednoznaczne.



Rys.4.5. Trajektorie reprezentatywne dla przypadku $W = w$

Gdy $W > w$ (rys. 4.6), w układzie ustala się cykl graniczny obejmujący zbiór docelowy. Zbiór ten nie jest osiągnięty. W układzie występują C -rozwiązania, także niejednoznaczne.

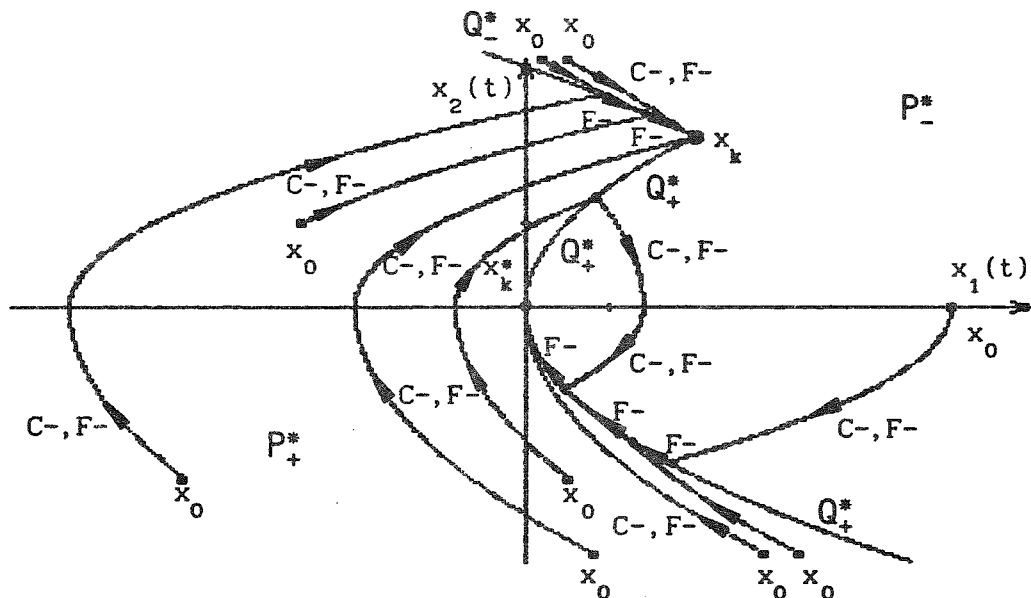


Rys.4.6. Trajektorie reprezentatywne dla przypadku $W > w$

I wreszcie, w przypadku $W < w$ (rys. 4.7), tylko część trajektorii osiąga w skończonym czasie zbiór docelowy. Do chwili przecięcia z krzywą przełączeń występuje tu $C-$, potem F -rozwiązanie. Pozostałe trajektorie osiągają jedynie punkt końcowy x^* , leżący na przecięciu osi x_1 i krzywej przełączeń. Stan układu nie osiąga wtedy zbioru docelowego. Do czasu przecięcia przez trajektorię krzywej przełączeń w dolnej półpłaszczyźnie przestrzeni stanów, występuje $C-$ potem F -rozwiązanie. Rozwiązania te są jednoznaczne.

Powyższe fakty zostały wykazane w pracy [Hejmo 1987], rozważającej układy deterministyczne. Dowód, że C -rozwiązania są również F -rozwiązaniami, jest analogiczny do opisanego w poprzednim podrozdziale.

Przypadek $W = w$ jest w praktyce trudny do uzyskania. Tymczasem przyjęcie wartości parametru W zarówno większej, jak i mniejszej niż w , uniemożliwia osiągnięcie zbioru docelowego z dowolnego stanu początkowego, z powodu występowania cyklu (rys. 4.6) lub istnienia punktu końcowego (rys. 4.7). W proponowanej strukturze suboptymalnej krzywa przełączeń Q^* zostanie więc podzielona na trzy części. Punktami podziałowymi będą zbiór docelowy i punkt przecięcia z osią x_1 . Dla każdej części zostanie wyznaczona według innych reguł wartość parametru W , który dla poszczególnych części jest zdefiniowany poniżej jako W_1 , W_2 i W_3 . Na osi x_1 zachowana będzie ciągłość krzywej przełączeń.



Rys.4.7. Trajektorie reprezentatywne dla przypadku $W < w$

Jeżeli wartość parametru W_1 , tzn. determinującego część krzywej przełączeń Q_-^* , czyli Q^* dla $x_2 \in [x_{k2}, \infty)$, jest większa od w , to w układzie powstaje cykl graniczny i zbiór docelowy nie jest przez układ osiągnięty. Jeżeli natomiast wartość parametru W_1 jest mniejsza od w , to stan układu jest sprowadzany do zbioru docelowego w skończonym czasie. Aby uniknąć powstawania takiego cyklu, można stosować tu zasadę minimaksu przy nieskończonej wartości funkcji strat dla $W > w$.

Zbyt mała wartość parametru W_2 , determinującego część Q_+^* dla $x_2 \in [0, x_{k2}]$, powoduje wystąpienie punktu końcowego. Zbyt duża natomiast, pozwala sprowadzić stan układu do części określonej przez parametr W_1 , który jak pokazano powyżej, można ustalić tak, że stan układu osiąga zbiór docelowy w procesie sterowania suboptymalnego. Ponieważ istnienie punktu końcowego przekreśla użyteczność systemu, konieczne jest tu skorzystanie z reguły minimaksu przy nieskończonej wartości funkcji strat dla $W < w$.

I wreszcie, zarówno zbyt mała jak i zbyt duża wartość parametru W_3 , determinującego część krzywej przełączeń Q_+^* dla $x_2 \in (-\infty, 0]$, jest dopuszczalna, gdyż pozwala sprowadzić stan układu do części określanych przez parametry W_1 i W_2 , dające się ustalić tak, że spełniony jest warunek osiągnięcia

celu w procesie sterowania suboptymalnego. Można tu więc stosować regułę Bayesa.

Tak skonstruowany układ istotnie sprowadza stan układu F -rozwiązaniem z dowolnego stanu początkowego do zbioru docelowego, jednak z punktu widzenia zastosowań warto nieco inaczej spojrzeć na problem doboru wartości parametru W_1 . W praktyce, ze względu na występujące przybliżenia, np. w estymacji stanu, wystarczające staje się sprowadzenie stanu w pobliże zbioru docelowego. W tym przypadku można stosować przy określeniu wartości parametru W_1 regułę Bayesa. Możliwe jest wtedy pojawienie się warunków do występowania cyklu, chociaż po ewentualnym pierwszym obiegu wokół zbioru docelowego, stan układu sprowadzony zostanie do dostatecznie małego otoczenia tego zbioru. Niskie prawdopodobieństwo tych niekorzystnych, chociaż dopuszczalnych zjawisk, jak i wielkość tego otoczenia, można uzyskać kształtując odpowiednio funkcję strat.

Tak więc dla krzywej przełączeń Q^* ustalonej według powyższych reguł, przy dowolnym $x_0 \in \mathbb{R}^2$ w rozważanym tu układzie deterministycznym występuje F -rozwiązanie sprowadzające stan układu w skończonym czasie do zbioru docelowego lub uwzględniając ostatnią uwagę, w jego pobliże.

Przykład

Ponownie, jak w pierwszym przykładzie poprzedniego podrozdziału, niech v będzie zmienną losową, która posiada funkcję gęstości h taką, że jej nośnik jest postaci $[w_{min}, w_{max}] \subset [-1, 1]$ (tak więc $N = D = [w_{min}, w_{max}]$). Poza tym, niech w zbiorze $int(N)$ funkcja h będzie ciągła i spełnia warunek $h(x) > 0$. Funkcja strat s pozostaje bez zmian i określona jest wzorem (4.7).

Jeżeli wartość parametru W_1 wyznaczona ma być zgodnie z regułą minimaksu przy $f = \infty$, to otrzymuje się ją ze wzoru (4.10). Jeżeli natomiast wartość parametru W_1 określona ma być za pomocą reguły Bayesa, to otrzymać ją można korzystając z równania (4.15).

Wartość parametru W_2 wyznaczana jest przy użyciu reguły minimaksu dla $e = \infty$, a więc ze wzoru (4.11).

I wreszcie, wartość parametru W_3 określona powinna być zgodnie z regułą Bayesa, czyli w oparciu o równanie (4.15).

Wartości parametrów W_1, W_2, W_3 określane są więc jednoznacznie i należą do zbioru D . ■

Przykład

Podobnie jak w ostatnim przykładzie poprzedniego podrozdziału, rozważany będzie na koniec losowy układ dynamiczny określony w problemie regulatora suboptymalnego, przy czym:

$$a = 0,5 \quad (4.46)$$

$$b = 1 \quad (4.47)$$

$$c = 1 \quad (4.48)$$

$$x_k = [2,2]^T \quad (4.49)$$

$$w_{min} = 0,2 \quad (4.50)$$

$$w_{max} = 0,7. \quad (4.51)$$

Dla określenia wartości parametru W_1 przyjęto następujące wartości funkcji strat postaci (4.7):

$$e = 1 \quad (4.52)$$

$$f = 9, \quad (4.53)$$

natomiast dla określenia wartości parametru W_3 :

$$e = 1 \quad (4.54)$$

$$f = 3. \quad (4.55)$$

Jeżeli wartość parametru W_1 ustalona ma być w oparciu o regułę minimaksu przy $f = \infty$, to ze wzoru (4.10) wynika, że:

$$W_1 = 0,2. \quad (4.56)$$

Jeżeli natomiast wartość tego parametru określona ma być zgodnie z regułą Bayesa, to zakładając jednostajny rozkład zmiennej losowej v , z równania (4.19) otrzymać można, iż:

$$W_1 = 0,25. \quad (4.57)$$

Z kolei wartość parametru W_2 otrzymywana jest z wykorzystaniem reguły minimaksu przy $e = \infty$, a więc wzór (4.11) implikuje, że:

$$W_2 = 0,7. \quad (4.58)$$

I wreszcie, wyznaczenie wartości parametru W_3 następuje w oparciu o regułę Bayesa, a zatem przy założonym powyżej rozkładzie jednostajnym, z równania (4.19) otrzymuje się, iż:

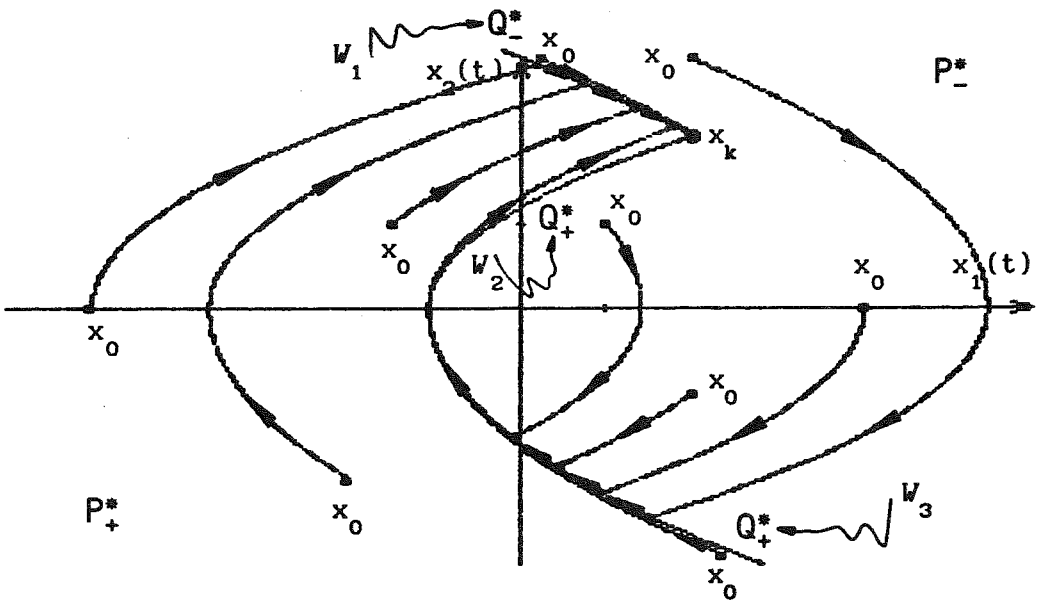
$$W_3 = 0,32. \quad (4.59)$$

Podsumowując, dla problemu rozpatrywanego w tym przykładzie, z równań (3.132)-(3.134) wynika, że:

$$Q_-^* = \{[x_1, x_2]^T \in \mathbb{R}^2 : 2 \leq x_2 \text{ i } x_1 = \frac{x_2^2 - 4}{-2 - 0,5W_1} + 2\} \quad (4.60)$$

$$Q_+^* = \{[x_1, x_2]^T \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x_2 \leq 2 \text{ i } x_1 = \frac{x_2^2 - 4}{2 - 0,5W_2} + 2\} \cup \quad (4.61)$$

$$\cup \{[x_1, x_2]^T \in \mathbb{R}^2 : x_2 \leq 0 \text{ i } x_1 = \frac{x_2^2}{2 + 0,5W_3} - \frac{4}{2 - 0,5W_2} + 2\}.$$



Rys.4.8. Określona w przykładzie funkcja suboptymalnego regulatora stochastycznego R_s oraz reprezentatywne trajektorie występujące w układzie

Przy określaniu drugiego członu wzoru (4.61) wykorzystane zostało założenie ciągłości krzywej przełączeń Q^* na osi x_1 (jako x_0 w równaniu (3.132) przyjęto punkt $[x_1, x_2]^T \in \mathbb{R}^2$ uzyskany z pierwszego członu po podstawieniu $x_2 = 0$). Zbiory P_-^* oraz P_+^* wyznaczyć można wprost ze wzorów (3.135) i (3.136). Sterowanie suboptymalne zdefiniowane jest równaniem (3.138).

Niniejszym określona została poszukiwana w problemie czasowo optymalnego regulatora stochastycznego funkcja R_s . Dla parametrów W_1 , W_2 oraz W_3 określonych wzorami (4.57), (4.58) i (4.59), ilustruje ją rysunek 4.8. Zaznaczone są tam również reprezentatywne trajektorie otrzymane dla $v(\omega) = w = 0,45$. ■

4.4. TWIERDZENIE O SUBOPTYMALNYM REGULATORZE STOCHASTYCZNYM

Podobnie jak dla problemu czasowo optymalnego sterowania stochastycznego, zostanie poniżej przedstawione twierdzenie będące rozwiązaniem problemu suboptymalnego regulatora stochastycznego.

Twierdzenie (o suboptymalnym regulatorze stochastycznym)

Niech $0 \leq a < b$, $c > 0$ oraz $t_0 \in \mathbb{R}$. Niech (Ω, S, P) będzie przestrzenią probabilistyczną oraz niech $T = [t_0, \infty)$. Niech $x_0, x_k \in \mathbb{R}^2$ reprezentują stan początkowy i docelowy. Niech v będzie rzeczywistą zmienną losową określoną na (Ω, S, P) , przy czym $P(\{\omega \in \Omega : v(\omega) \in [-1, 1]\}) = 1$. Niech wreszcie dane będzie losowe równanie różniczkowe określające dynamikę układu poddanego działaniu sterowania U :

$$\dot{X}_1(\omega, t) = X_2(\omega, t) \quad (4.62)$$

$$\dot{X}_2(\omega, t) = \frac{1}{c} [b U(\omega, t) - a v(\omega) \operatorname{sgn}(X_2(\omega, t))]. \quad (4.63)$$

Jeżeli sterowanie U określone jest w układzie zamkniętym przez (deterministyczną) funkcję suboptymalnego regulatora stochastycznego $R_s : \mathbb{R}^2 \rightarrow [-1, 1]$ taką, że:

$$U(\omega, t) = \begin{cases} -1, & \text{gdy } X(\omega, t) \in (P_-^* \cup Q_-^*) \\ 0, & \text{gdy } X(\omega, t) \in \{x_k\} \\ +1, & \text{gdy } X(\omega, t) \in (P_+^* \cup Q_+^*), \end{cases} \quad \text{dla } \omega \in \Omega \text{ i } t \in T \quad (4.64)$$

gdzie zbiory Q_+ , Q_- , P_- oraz P_+ określone są według reguł podanych w podrozdziałach 4.2 i 4.3 (przy czym wartość parametru W_1 określona jest poprzez regułę minimaksu), to generuje ono w układzie F -rozwiązanie pierwszego rodzaju. Prawie wszystkie realizacje tego rozwiązania przeprowadzają w procesie sterowania suboptymalnego stan układu z x_0 do x_k . Ponadto, jeżeli $x_{k2} = 0$, to jest ono jednoznaczne. Powyższe F -rozwiązanie pierwszego rodzaju jest również K -rozwiązaniem pierwszego rodzaju, jednoznacznym gdy $x_{k2} = 0$. Obydwa rozwiązania posiadają pochodną pierwszego rodzaju.

Dowód przedstawiony jest w podrozdziale 4.5. ■

W wypowiedzi twierdzenia określony został w sposób pośredni następujący warunek początkowy losowego równania różniczkowego (4.62)-(4.63):

$$X(\omega, t_0) = X_0(\omega) \quad \text{dla prawie wszystkich } \omega \in \Omega, \quad (4.65)$$

gdzie X_0 jest 2-wymiarową zmienną losową określoną na (Ω, S, P) o rozkładzie jednopunktowym skoncentrowanym w punkcie x_0 .

Jeżeli wartość parametru W_1 określona jest zgodnie z regułą Bayesa, to teza powyższego twierdzenia pozostaje prawdziwa, przy czym prawie wszystkie realizacje rozwiązania przeprowadzane są w otoczenie punktu x_k .

Podobnie jak twierdzenie o czasowo optymalnym sterowaniu stochastycznym, powyższe twierdzenie prawdziwe jest po uogólnieniu występującej w równaniu (4.63) funkcji sgn do dowolnej funkcji $f: \mathbb{R} \rightarrow [-1, 1]$ przedziałami C^1 takiej, że $yf(y) \geq 0$ dla $y \in \mathbb{R}$ (ze względu na aplikacyjny charakter tego rozdziału, reguły doboru wartości parametru regulatora zostały jednak sformułowane w podrozdziałach 4.2 i 4.3 dla funkcji sgn).

We wzorze (4.64) zdefiniowane zostało, że $U(x_k) = 0$. Przyjęcie takiej wartości jest przemawiające do technicznej intuicji, ze względu na możliwość utrzymania stanu w zbiorze docelowym w przypadku $x_{k2} = 0$ (gdy $x_{k2} \neq 0$ nie jest to w ogóle możliwe, co wynika wprost z równania (4.62)).

Układ rozważany w powyższym twierdzeniu, w przeciwieństwie do układu z twierdzenia o czasowo optymalnym sterowaniu stochastycznym, nie posiada C -rozwiązania pierwszego rodzaju. Jest oczywiste, że gdy rozważa się wrażliwość układu na przybliżenia modelu, zagadnienie może nie mieć już tak „regularnego” charakteru.

W dodatku C została przedstawiona prosta metoda oszacowania rzędu wielkości różnicy między czasami osiągnięcia zbioru docelowego, gdy sterowanie jest czasowo optymalne oraz gdy generowane jest przez suboptymalny regulator stochastyczny zdefiniowany wzorem (4.64).

4.5. DOWÓD TWIERDZENIA O SUBOPTYMALNYM REGULATORZE STOCHASTYCZNYM

W niniejszym podrozdziale zostanie udowodnione twierdzenie o suboptymalnym regulatorze stochastycznym, sformułowane w poprzednim paragrafie.

Niech Ω'' będzie takim podzbiorem zbioru Ω , że gdy $\omega \in \Omega''$, to spełniony jest warunek $v(\omega) \in \mathbb{R} \setminus [-1, 1]$. Ponieważ $P(\Omega'') = 0$, to podzbiór ten może być pominięty w dalszych rozważaniach ze względu na zupełność miary probabilistycznej P oraz definicje: rozwiązań pierwszego rodzaju, ich jednoznaczności i pochodnej pierwszego rodzaju.

Analogicznie jak w dowodzie twierdzenia o czasowo optymalnym sterowaniu stochastycznym, zakłada się, że $b = 1$ i $c = 1$. Nie zmniejsza to ogólności rozważań ze względu na możliwość zmiany zmiennych określonej wzorami (3.15) i (3.16).

Niech $w \in [-1, 1]$ będzie ustaloną wartością zmiennej losowej v . Rozpatrywany będzie zbiór A_w zdefiniowany jak następuje:

$$A_w = \{[x_1, x_2, y_1, y_2]^T \in \mathbb{R}^4 : y \in F[g](x, t)\}, \quad (4.66)$$

gdzie F jest operatorem Filippowa, natomiast g jest funkcją określającą dynamikę układu (4.62)-(4.64). Zbiór A_w przyjmuje postać:

$$\begin{aligned} A_w = & \{[x_1, x_2, x_2, y_2]^T : x_2 > 0, x \in P_+^*, y_2 = +1 - aw\} \cup \quad (4.67) \\ & \cup \{[x_1, x_2, x_2, y_2]^T : x_2 < 0, x \in P_+^*, y_2 = +1 + aw\} \cup \\ & \cup \{[x_1, x_2, x_2, y_2]^T : x_2 = 0, x \in P_+^*, y_2 \in [+1 - a|w|, +1 + a|w|]\} \cup \\ & \cup \{[x_1, x_2, x_2, y_2]^T : x_2 > 0, x \in P_-^*, y_2 = -1 + aw\} \cup \\ & \cup \{[x_1, x_2, x_2, y_2]^T : x_2 < 0, x \in P_-^*, y_2 = -1 - aw\} \cup \\ & \cup \{[x_1, x_2, x_2, y_2]^T : x_2 = 0, x \in P_-^*, y_2 \in [-1 - a|w|, -1 + a|w|]\} \cup \\ & \cup \{[x_1, x_2, x_2, y_2]^T : x_2 > 0, x \in Q^*, y_2 \in [-1 + a|w|, +1 + a|w|]\} \cup \\ & \cup \{[x_1, x_2, x_2, y_2]^T : x_2 < 0, x \in Q^*, y_2 \in [-1 - a|w|, +1 - a|w|]\} \cup \\ & \cup \{[x_1, x_2, x_2, y_2]^T : x_2 = 0, x \in Q^*, y_2 \in [-1 - a|w|, +1 + a|w|]\}, \end{aligned}$$

a więc jest sumą skończonej ilości rozmaitości [Duda, s. 386], których parametryzacja zależy w sposób ciągły od w , czyli funkcja $p: [-1, 1] \times \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}$ zdefiniowana wzorem:

$$p(w, [x_1, x_2, y_1, y_2]^T) = \text{dist}(A_w, [x_1, x_2, y_1, y_2]^T), \quad (4.68)$$

gdzie dist oznacza odległość zbioru od punktu [Duda, s. 199], jest funkcją ciągłą.

Niech dla każdego ustalonego $t \in T$ określone będzie odwzorowanie $r_t: [-1, 1] \times L_{loc}^\infty(T, \mathbb{R}^2) \rightarrow \mathbb{R}$ (definicja przestrzeni funkcyjnych lokalnych sprecyzowana została w dodatku D) takie, że:

$$r_t(w, y) = p(w, x_{01} + \int_{t_0}^t y_1(z) dz, x_{02} + \int_{t_0}^t y_2(z) dz), \quad (4.69)$$

$$\limsup_{q \rightarrow 0^+} \frac{1}{2q} \int_{t-q}^{t+q} y_1(t+z) dz, \quad \limsup_{q \rightarrow 0^+} \frac{1}{2q} \int_{t-q}^{t+q} y_2(t+z) dz.$$

Odwzorowania:

$$y_1 \rightarrow x_{01} + \int_{t_0}^t y_1(z) dz \quad (4.70)$$

$$y_2 \rightarrow x_{02} + \int_{t_0}^t y_2(z) dz \quad (4.71)$$

$$y_1 \rightarrow \limsup_{q \rightarrow 0^+} \frac{1}{2q} \int_{t-q}^{t+q} y_1(t+z) dz \quad (4.72)$$

$$y_2 \rightarrow \limsup_{q \rightarrow 0^+} \frac{1}{2q} \int_{t-q}^{t+q} y_2(t+z) dz \quad (4.73)$$

są ciągłe, gdyż w przestrzeni $L_{loc}^\infty(T, \mathbb{R}^2)$ prawdziwe jest, że [Musielak, s. 52-53]:

$$f_k \rightarrow f \text{ wtedy i tylko wtedy gdy } |f_k|_m \rightarrow f \text{ dla } m = 1, 2, \dots \quad (4.74)$$

(warto tu przypomnieć, iż warunkiem wystarczającym ciągłości operatora liniowego jest jego ciągłość w punkcie 0 [Musielak, s. 121-122]). Ciągłość odwzorowań (4.70)-(4.73) oraz p , implikuje z kolei ciągłość odwzorowania r_t . W powyższym zapisie przez całkę na przedziale $[t-q, t+q]$ należy rozumieć całkę na zbiorze $[t-q, t+q] \cap T$. Wtedy też $2q$ oznacza jego miarę.

I wreszcie, niech odwzorowanie $r : [-1, 1] \times L_{loc}^\infty(T, \mathbb{R}^2) \rightarrow \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ określone będzie wzorem:

$$r(w, y) = \sup_{t \in T} r_t(w, y). \quad (4.75)$$

Jako obwiednia górna odwzorowań ciągłych, odwzorowanie r jest półciągłe z dołu, a więc borelowskie [Łojasiewicz, s. 56-61; ostatni fakt wynika wprost z twierdzenia Baire'a].

Udowodnione teraz będą dwie tezy pomocnicze.

Lemat 1

Niech I będzie ograniczonym przedziałem o niepustym wnętrzu. Wtedy przestrzeń $L^\infty(I, \mathbb{R}^2)$ jest borelowskim podzbiorem przestrzeni $L^1(I, \mathbb{R}^2)$.

Dowód

Ponieważ dla $h \in L^1(I, \mathbb{R}^2)$ oraz dowolnie ustalonych $d < e \in I$, odwzorowanie $h \rightarrow \int_d^e \|h(x)\| dx$ jest ciągłe, to dla każdego $k \in \mathbb{N}$, zbiór:

$$D_{d, e, k} = \left\{ h \in L^1(I, \mathbb{R}^2) : \int_d^e \|h(x)\| dx \leq k(e - d) \right\} \quad (4.76)$$

jest domknięty w przestrzeni $L^1(I, \mathbb{R}^2)$. Z definicji σ -algebry zbiorów borelowskich wynika więc, iż wystarczy udowodnić, że:

$$L^\infty(I, \mathbb{R}^2) = \bigcup_{k \in \mathbb{N}} \bigcap_{d < e \in \mathcal{Q} \cap I} D_{d, e, k}. \quad (4.77)$$

Inkluzja „ \subset ” jest oczywista. Niech więc dla potrzeb dowodu inkluzji przeciwnej prowadzonego przez zaprzeczenie, istnieją $h \in L^1(I, \mathbb{R}^2) \setminus L^\infty(I, \mathbb{R}^2)$ oraz $k^* \in \mathbb{N}$ takie, że $h \in D_{d, e, k^*}$ dla dowolnych $d < e \in (\mathcal{Q} \cap I)$.

Ponieważ $h \notin L^\infty(I, \mathbb{R}^2)$, to w szczególności dla k^* istnieje zbiór $A \subset I$ dodatniej miary Lebesgue'a m taki, że $\|h(x)\| > k^*$ dla $x \in A$. Wynika stąd, że:

$$\int_A \|h(x)\| dx > k^* m(A). \quad (4.78)$$

Z charakteryzacji zbiorów mierzalnych w sensie Lebesgue'a [Kołodziej, s. 287-288] wynika, iż istnieje zbiór $B \subset A$ typu F_σ taki, że $m(A \setminus B) = 0$, czyli:

$$\int_B \|h(x)\| dx > k^* m(A). \quad (4.79)$$

Oznaczając jego składowe przez B_i ($i = 1, 2, \dots$), można zdefiniować $B_i^* = B_1 \cup B_2 \cup \dots \cup B_i$ dla $i = 1, 2, \dots$. Otrzymuje się wtedy wstępującą rodzinę zbiorów taką, że:

$$B = \bigcup_{i=1}^{\infty} B_i^*. \quad (4.80)$$

Z twierdzenia Lebesgue'a o przejściu zmajoryzowanym [Łojasiewicz, s. 136] wynika, iż istnieje liczba $i^* \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ taka, że:

$$\int_{B_{i^*}^*} \|h(x)\| dx > k^* m(A), \quad (4.81)$$

a więc również:

$$\int_{\text{int}(B_{i^*}^*)} \|h(x)\| dx > k^* m(A). \quad (4.82)$$

Każdy otwarty podzbiór przestrzeni \mathbb{R} może być przedstawiony jako suma przeliczalnej, wstępującej rodziny domkniętych przedziałów o końcach wymiernych oraz ich skończonych i rozłącznych sum. W szczególności istnieje wstępująca rodzina C_j ($j = 1, 2, \dots$) domkniętych przedziałów o końcach wymiernych oraz ich skończonych i rozłącznych sum taka, że:

$$\text{int}(B_{i^*}^*) = \bigcup_{j=1}^{\infty} C_j. \quad (4.83)$$

Z twierdzenia Lebesgue'a o przejściu zmajoryzowanym wynika, iż istnieje liczba $j^* \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ taka, że:

$$\int_{C_{j^*}} \|h(x)\| dx > k^* m(A). \quad (4.84)$$

Ponieważ $m(C_{j^*}) \leq m(A)$, to powyższa nierówność jest sprzeczna z faktem, iż dla dowolnych $d < e \in (\mathbb{Q} \cap I)$ zachodzi $h \in D_{d, e, k^*}$, co kończy dowód lematu. ■

Lemat 2

Niech $t_0 \in \mathbb{R}$ oraz $T = [t_0, \infty)$. Wtedy przestrzeń $L_{loc}^{\infty}(T, \mathbb{R}^2)$ jest borelowskim podzbiorem przestrzeni $L_{loc}^1(T, \mathbb{R}^2)$.

Dowód

Ponieważ własność (4.74) jest prawdziwa również w przestrzeni $L^1_{loc}(T, \mathbb{R}^2)$ [Musielak, s. 52-53], to dla każdego $m \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ odwzorowanie restrykcji $o_m : L^1_{loc}(T, \mathbb{R}^2) \rightarrow L^1([t_0, t_0 + m], \mathbb{R}^2)$ jest ciągle, a więc borelowskie.

$L^\infty_{loc}(T, \mathbb{R}^2)$ jest oczywiście podprzestrzenią przestrzeni $L^1_{loc}(T, \mathbb{R}^2)$, zatem prawdziwe jest, że:

$$\begin{aligned} L^\infty_{loc}(T, \mathbb{R}^2) &= \\ &= \left\{ h \in L^1_{loc}(T, \mathbb{R}^2) : \forall m \in \mathbb{N} \setminus \{0\} \quad h \Big|_{[t_0, t_0 + m]} \in L^\infty([t_0, t_0 + m], \mathbb{R}^2) \right\} = \\ &= \left\{ h \in L^1_{loc}(T, \mathbb{R}^2) : \forall m \in \mathbb{N} \setminus \{0\} \quad o_m(h) \in L^\infty([t_0, t_0 + m], \mathbb{R}^2) \right\} = \\ &= \bigcap_{m=1}^{\infty} o_m^{-1}(L^\infty([t_0, t_0 + m], \mathbb{R}^2)). \end{aligned} \quad (4.85)$$

Z przedstawionego powyżej lematu 1 wynika, że dla każdego $m \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, $L^\infty([t_0, t_0 + m], \mathbb{R}^2)$ jest borelowskim podzbiorem przestrzeni $L^1([t_0, t_0 + m], \mathbb{R}^2)$, a zatem $o_m^{-1}(L^\infty([t_0, t_0 + m], \mathbb{R}^2))$ jest borelowskim podzbiorem przestrzeni $L^1_{loc}(T, \mathbb{R}^2)$. Tak więc jak wynika ze wzoru (4.85), przestrzeń $L^\infty_{loc}(T, \mathbb{R}^2)$ jako przeliczalny iloczyn zbiorów borelowskich, jest borelowskim podzbiorem przestrzeni $L^1_{loc}(T, \mathbb{R}^2)$, co kończy dowód lematu. ■

Niech teraz dane będzie odwzorowanie $q : \Omega \times L^\infty_{loc}(T, \mathbb{R}^2) \rightarrow \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ zdefiniowane wzorem:

$$q(\omega, y) = r(v(\omega), y). \quad (4.86)$$

Jako obłożenie odwzorowania mierzalnego odwzorowaniem borelowskim jest ono mierzalne, a więc zbiór $q^{-1}(0)$ jest zbiorem mierzalnym w $\Omega \times L^\infty_{loc}(T, \mathbb{R}^2)$. Ponieważ, jak wynika z udowodnionego powyżej lematu 2 oraz definicji σ -algebry produktowej, $\Omega \times L^\infty_{loc}(T, \mathbb{R}^2)$ jest borelowskim podzbiorem $\Omega \times L^1_{loc}(T, \mathbb{R}^2)$, to $q^{-1}(0)$ jest również zbiorem mierzalnym jako podzbiór przestrzeni $\Omega \times L^1_{loc}(T, \mathbb{R}^2)$.

Zbiór $q^{-1}(0)$ jest równocześnie wykresem odwzorowania wielowartościowego $E : \Omega \rightarrow P(L^1_{loc}(T, \mathbb{R}^2))$ takiego, że $E(\omega)$ jest zbiorem elementów $y \in L^1_{loc}(T, \mathbb{R}^2)$ spełniających warunek, iż funkcja $x : T \rightarrow \mathbb{R}^2$ określona wzorem:

$$t \mapsto [x_{01} + \int_{t_0}^t y_1(z) dz, x_{02} + \int_{t_0}^t y_2(z) dz]^T \quad (4.87)$$

jest F -rozwiązaniem układu (4.62)-(4.64) sparametryzowanego wartością zmiennej losowej v na elemencie ω (w powyższym zapisie $P(Y)$ oznacza rodzinę podzbiorów zbioru Y).

Jak wynika z faktów cytowanych w podrozdziałach 4.2 oraz 4.3, dla każdego $\omega \in \Omega$, w układzie (4.62)-(4.64) występuje F -rozwiązanie przeprowadzające stan układu z x_0 do x_t w procesie sterowania suboptymalnego. Jako funkcja ciągła rozwiązanie to jest elementem przestrzeni $L_{loc}^1(T, \mathbb{R}^2)$, czyli dla każdego $\omega \in \Omega$ prawdziwe jest, że $E(\omega) \neq \emptyset$.

$L_{loc}^1(T, \mathbb{R}^2)$ jest przestrzenią polską (dodatek B), co wynika z własności (4.74) i cech przestrzeni $L^1([t_0, t_0 + m], \mathbb{R}^2)$ dla $m = 1, 2, \dots$ [Rudin, s. 75-77]. Z twierdzenia Sainte-Beuve'a (dodatek B) wynika zatem istnienie selektora mierzalnego odwzorowania E , czyli mierzalnego odwzorowania $e : \Omega \rightarrow L_{loc}^1(T, \mathbb{R}^2)$ takiego, że $e(\omega) = y$ spełnia warunek, iż funkcja $x : T \rightarrow \mathbb{R}^2$ określona wzorem (4.87) jest F -rozwiązaniem układu (4.62)-(4.64) sparametryzowanego wartością zmiennej losowej v na elemencie ω .

Przy powyższych oznaczeniach rozważana będzie funkcja $X : \Omega \times T \rightarrow \mathbb{R}^2$ zdefiniowana wzorem:

$$X(\omega, t) = x_\omega(t) \quad \text{dla } \omega \in \Omega \text{ i } t \in T, \quad (4.88)$$

przy czym x_ω oznacza funkcję x określoną w poprzednim akapicie dla ustalonego ω . Zostanie teraz wykazane, że X jest procesem stochastycznym. Niech więc ustalone będzie $t \in T$ oraz $m \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ takie, że $t \in [t_0, t_0 + m]$. Funkcja $X(\cdot, t)$ jest złożeniem następujących odwzorowań:

$$e : \Omega \rightarrow L_{loc}^1(T, \mathbb{R}^2) \quad e(\omega) = y \quad (4.89)$$

$$e_1 : L_{loc}^1(T, \mathbb{R}^2) \rightarrow L^1([t_0, t_0 + m], \mathbb{R}^2) \quad (4.90)$$

$$e_1(y) = y \Big|_{[t_0, t_0 + m]}$$

$$e_2 : L^1([t_0, t_0 + m], \mathbb{R}^2) \rightarrow C([t_0, t_0 + m], \mathbb{R}^2) \quad (4.91)$$

$$e_2(y \Big|_{[t_0, t_0 + m]}) = x \Big|_{[t_0, t_0 + m]}$$

$$e_3 : C([t_0, t_0 + m], \mathbb{R}^2) \rightarrow \mathbb{R}^2 \quad (4.92)$$

$$e_3(x \Big|_{[t_0, t_0 + m]}) = x \Big|_{[t_0, t_0 + m]}(t),$$

przy czym e , x oraz y są określone w poprzednim akapicie. Zostało pokazane, że odwzorowanie e jest mierzalne. Własność (4.75) implikuje, że odwzorowanie e_1 jest ciągle. Z nierówności:

$$\begin{aligned} \|e_2[y^*](s) - e_2[y^{**}](s)\| &= \left\| \int_{t_0}^s (y^*(z) - y^{**}(z)) dz \right\| \leq \\ &\leq \int_{t_0}^s \|y^*(z) - y^{**}(z)\| dz \leq \int_{t_0}^{t_0+m} \|y^*(z) - y^{**}(z)\| dz \end{aligned} \quad (4.93)$$

prawdziwej dla każdego $s \in [t_0, t_0 + m]$ wynika, że:

$$\begin{aligned} \|e_2(y^*) - e_2(y^{**})\|_{C([t_0, t_0 + m], \mathbb{R}^2)} &\leq \\ &\leq \|y^* - y^{**}\|_{L^1([t_0, t_0 + m], \mathbb{R}^2)}. \end{aligned} \quad (4.94)$$

co implikuje ciągłość odwzorowania e_2 . Ciągłość odwzorowania e_3 jest oczywista. Wykazane powyżej własności odwzorowań e , e_1 , e_2 oraz e_3 implikują mierzalność funkcji $X(\cdot, t)$ dla dowolnego $t \in T$. Funkcja X jest więc procesem stochastycznym. Z definicji (4.88) wynika wprost, że jest ona poszukiwanym F -rozwiązaniem pierwszego rodzaju, co kończy dowód jego istnienia.

W przypadku $x_{t_2} = 0$, z faktów cytowanych w podrozdziale 4.2 wynika jednoznaczność deterministycznych F -rozwiązań otrzymanych dla prawie każdego ustalonego $\omega \in \Omega$; implikuje to jednoznaczność F -rozwiązania pierwszego rodzaju.

Fakt, że F -rozwiązanie pierwszego rodzaju jest również K -rozwiązaniem pierwszego rodzaju, wynika z tezy punktu 3 uwag z podrozdziału 2.1.

Jeżeli $x_{t_2} = 0$, to wartości operatorów F i K są sobie równe. W tym przypadku jednoznaczność F -rozwiązania pierwszego rodzaju implikuje więc jednoznaczność K -rozwiązania pierwszego rodzaju.

Funkcja suboptymalnego regulatora stochastycznego R_s zdefiniowana równaniem (4.64) jest oczywiście borelowska. Istnienie pochodnej pierwszego rodzaju dla F - oraz K -rozwiązania wynika więc wprost z równań układu (4.62)-(4.63) na podstawie własności funkcji mierzalnych [Kołodziej, s. 292-293], [Łojasiewicz s.

77; uogólnienie z funkcji ciągłej na funkcje przedziałami ciągłe, a więc w szczególności na funkcję *sgn*, jest oczywiste].

Niniejszym teza twierdzenia o suboptymalnym regulatorze stochastycznym została udowodniona.

4.6. SUGESTIE DLA PRAKTYCZNYCH ROZWIĄZAŃ

W poniższym podrozdziale zawartych zostanie szereg sugestii, które mogą być wykorzystane w trakcie syntezy proponowanej struktury suboptymalnej. W szczególności podane będą uwagi dotyczące estymacji rozkładu zmiennej losowej v oraz projektowania warstwy adaptacji.

Dokonane w podrozdziale 4.1 uproszczenie układu rozważanego w problemie czasowo optymalnego sterowania stochastycznego, oparte zostało na całej pierwszej części, ze względu na bliską intuicji interpretację. Tymczasem w teorii procesów stochastycznych najczęściej używa się pojęcia całki średniokwadratowej (drugiego rodzaju) [Bobrowski 1987, s. 100-101], z uwagi na możliwość stosowania dogodnego aparatu przestrzeni Hilberta L^2 . Dla procesu stochastycznego o prawie wszystkich realizacjach ciągłych i wspólnie ograniczonych, całki te są jednak równoważne [Wentzel, s. 52-53], dzięki czemu możliwe będzie powoływanie się w dalszej części tego podrozdziału na fakty prawdziwe dla całek średniokwadratowych.

Podstawą określenia równań suboptymalnego regulatora stochastycznego są dane dotyczące rozkładu zmiennej losowej v , będącej średnią na ograniczonym przedziale I w sensie całki procesu stochastycznego V (wzór (4.3)). Największa trudność występuje przy pierwszym przebiegu, gdy nie dysponuje się jeszcze wiarygodnymi pomiarami. Można wtedy założyć maksymalnie duży, choć uzasadniony z fizycznego punktu widzenia, nośnik miary probabilistycznej [Billingsley, s. 33] (np. w przykładach z podrozdziałów 4.2 i 4.3 przyjmując $w_{min} = 0$ i $w_{max} = 1$) oraz w przypadku reguły Bayesa najmniej korzystny rozkład (wprost z odpowiednich definicji wynika, że reguła Bayesa jest wtedy równoważna regule minimaksu, a ta poza nośnikiem miary nie wymaga znajomości żadnych innych danych).

Dysponując nawet niewielką ilością pomiarów, można już określić nośnik miary, szczególnie że dla zwiększenia skuteczności działania reguły decyzyjnej minimaksu używanej przecież przy określaniu najbardziej krytycznych parametrów, wskazane jest brać tu pod uwagę poszczególne uzyskane empirycznie wartości procesu stochastycznego V , bez uśredniania po zbiorze I . Nośnik miary jest wystarczającą ilością danych, gdy stosowana jest reguła minimaksu lub reguła Bayesa przy założeniu jednostajnego rozkładu. W przypadku bardziej

złożonych, lepiej opisujących rzeczywistość rozkładów, estymaty ich parametrów można otrzymać korzystając np. z metody momentów [Pawłowski, s. 76-81], przy czym wartość oczekiwana i ewentualnie wariancja, wyznaczone mogą być w oparciu o następujące wzory:

$$E\left[\int_I V(\omega, t) dt\right] = \int_I E[V(\omega, t)] dt \quad (4.95)$$

$$E\left[\left(\int_I V(\omega, t) dt - E\left[\int_I V(\omega, t) dt\right]\right)^2\right] = \iint_{II} R(t', t'') dt' dt'' \quad (4.96)$$

gdzie E oznacza wartość oczekiwaną (procesu stochastycznego lub zmiennej losowej), a R funkcję korelacyjną [Sobczyk, s. 59]. Wzór (4.95) wynika wprost z twierdzenia Fubiniego [Łojasiewicz, s. 143], natomiast wzór (4.96) udowodniony jest w pracy [Sobczyk, s. 90-91]. Całki znajdujące się po prawej stronie tych równości są już w praktyce całkami Riemanna. Przy wyznaczaniu funkcji E i R ważne jest zagadnienie ergodyczności procesu stochastycznego [Papoulis, s. 340]. Dogodne kryteria na ergodyczność wartości oczekiwanej i funkcji korelacyjnej podane są w pracy [Papoulis, s. 341-344].

Dysponując odpowiednią (około 20) ilością pomiarów wartości zmiennej losowej v , parametry jej rozkładu można już estymować bez korzystania ze wzorów (4.95)-(4.96) [Pawłowski, s. 59-107]. Z kolei wartości zmiennej losowej v otrzymać można empirycznie drogą bezpośrednich pomiarów analogowych lub obliczając na podstawie uzyskanych poszczególnych wartości procesu V . W tej sytuacji warto rozważyć problem optymalnej (w sensie średniokwadratowym) liniowej estymacji, opisany w pracy [Papoulis, s. 400-402, 412].

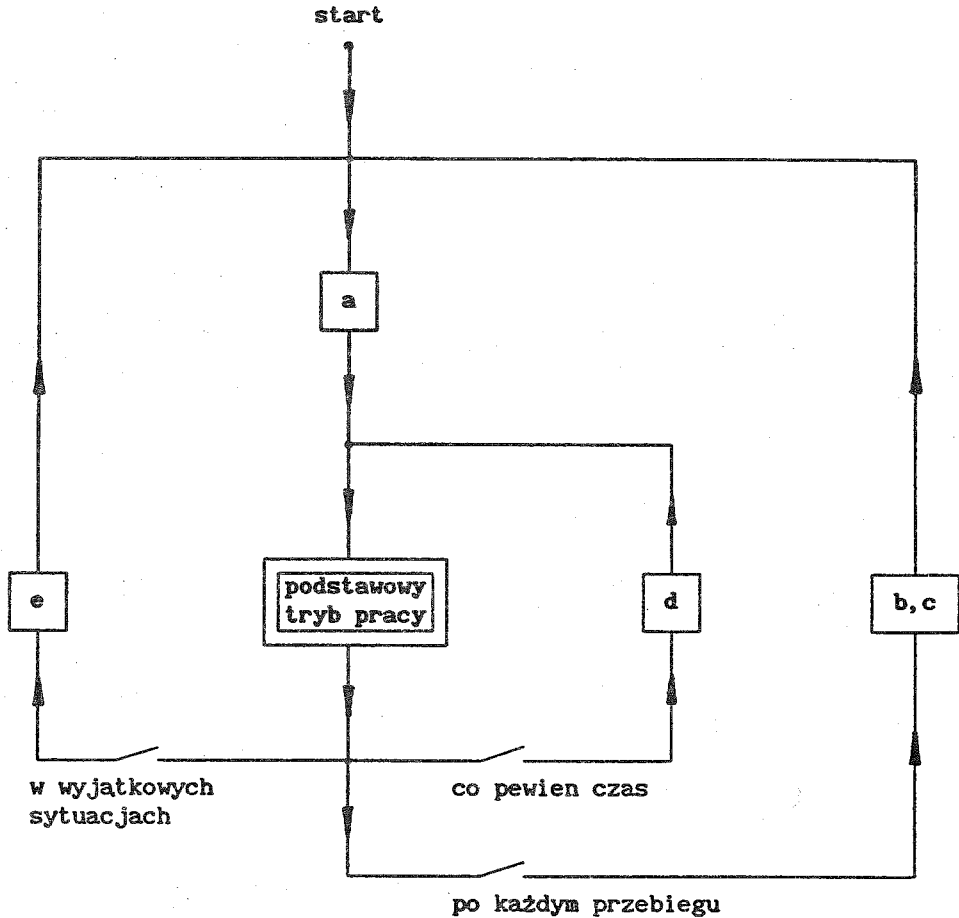
Należy jeszcze dokonać uściślenia występującej we wzorze (4.3) miary przedziału uśredniania I . Ze względu na fizyczną interpretację dokonywanego uproszczenia, wielkość ta powinna być zbliżona do czasów przemieszczania się stanu po poszczególnych częściach trajektorii poślizgowej oraz jego przejścia między tymi częściami. Analiza rysunków 4.4 oraz 4.8 wskazuje, że wielkość ta wynosi 20-50% czasu osiągnięcia zbioru docelowego. Mniejsza wartość jest o tyle dogodniejsza, że pozwala na zebranie większej ilości danych.

Na koniec omówiona będzie koncepcja warstwy adaptacji struktury sterującej. W skonstruowanej strukturze realizować się ona może poprzez

- a) omówione powyżej zmiany metody estymacji rozkładu zmiennej losowej v ,
- b) uzupełnianie danych,
- c) uaktualnianie danych (najnowsze pomiary wprowadzać można przyporządkowując im większe wagi),
- d) zmianę parametrów funkcji strat,
- e) restart w przypadku niepoprawnego działania systemu (np. powstawania cykli) lub dezaktualizacji danych po długiej przerwie albo wymianie podzespołu.

Zmiany opisane w punktach a-d przeprowadzane być powinny w przerwach między kolejnymi operacjami sterowania.

Działanie warstwy adaptacji ilustruje poniższy schemat.



5. SYMULACJA CYFROWA

W celu sprawdzenia poprawności działania skonstruowanej struktury sterującej, opracowany został cyfrowy program symulacyjny. Jest on zapisany na dyskietce dołączonej do pracy [Kulczycki]. Niniejszy podrozdział zawiera krótkie omówienie tego programu oraz uzyskanych za jego pomocą wyników.

Sterowanym obiektem jest układ dynamiczny, który omawiany w podrozdziale 3.1 stanowił punkt wyjścia do przeprowadzonych w tej pracy rozważań. Jego dynamika opisana jest równaniem różniczkowym:

$$\dot{x}_1(t) = x_2(t), \quad x_1(0) = x_{01} \quad (5.1)$$

$$\dot{x}_2(t) = \frac{1}{c} [b u(t) - a z(x_2(t), t)], \quad x_2(0) = x_{02}, \quad (5.2)$$

gdzie $0 \leq a < b$, $c > 0$ oraz $|z(x_2(t), t)| \leq 1$.

Reprezentująca opory ruchu funkcja z jest sumą dwóch składowych: deterministycznej z_d i losowej z_l .

Składowa deterministyczna, postaci:

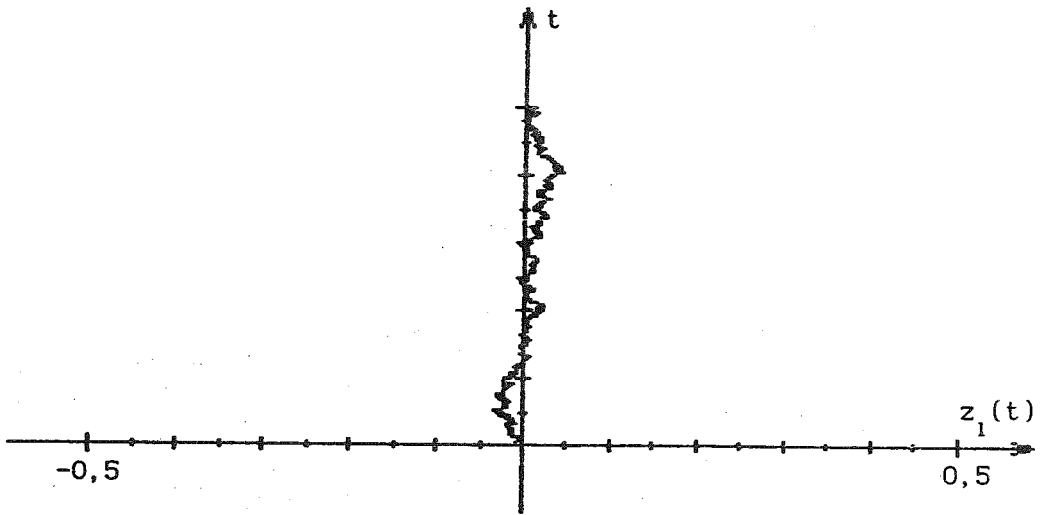
$$z_d(x_2(t)) = w(|x_2(t)|) \operatorname{sgn}(x_2(t)), \quad (5.3)$$

przy czym w jest wielomianem, oparta została na doświadczalnie uzyskanej charakterystyce oporów ruchu jednego z mechanizmów walcarki nawrotnej (rys. 3.1).

Składowa losowa z_l , o amplitudzie ok. 10% maksymalnej wartości składowej deterministycznej, reprezentuje błędy pomiarowe oraz zależność funkcji z od innych niż $x_2(t)$ czynników, np. $x_1(t)$ lub t (rys. 5.1).

W celu umożliwienia symulacji F -rozwiązania, do sterowanego obiektu wprowadzone zostało programowo opóźnienie $\tau > 0$. Należy zauważyć, że w trakcie numerycznego rozwiązywania równań różniczkowych, opóźnienie takie występuje w sposób naturalny, lecz nie kontrolowany, ze względu na niezerowy krok dyskretyzacji h . Aby wyeliminować tę niedokładność symulacji cyfrowej, czas zmiany wartości sterowania określany jest z dokładnością $\frac{h}{100}$, podczas gdy programowe opóźnienie τ zadawane jest w jednostkach $\frac{h}{10}$.

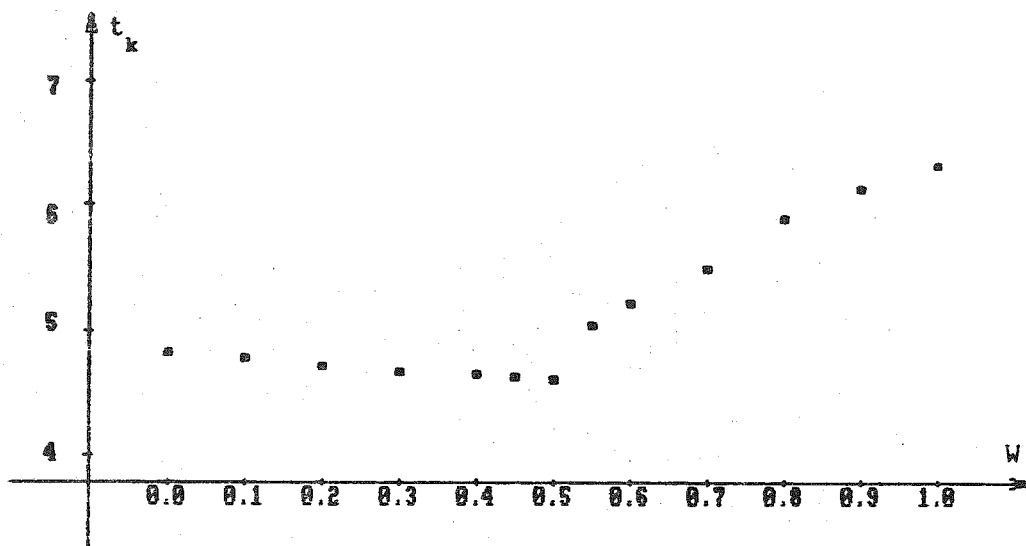
Ze względu na to opóźnienie, stan układu może być sprowadzony do zbioru docelowego jedynie z pewną dokładnością. Na podstawie przybliżonej analizy kształtów trajektorii przyjęto, że dokładność ta wynosi $\|x_0\| \tau \frac{b}{c}$. Ponieważ dla $x_{k2} \neq 0$, wartość parametru W_1 wyznaczana będzie w oparciu o regułę Bayesa, to zgodnie z przytoczonymi w poprzednim podrozdziale uwagami, w przypadku tym powinna być ona powiększona.



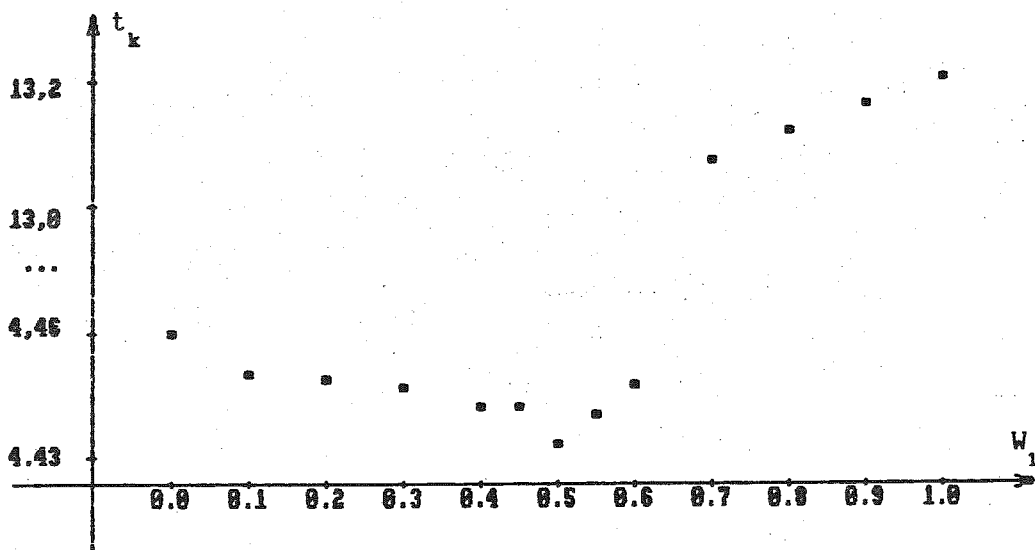
Rys.5.1. Przykładowy przebieg składowej losowej modelu oporów ruchu

Ostatecznie w prezentowanych obliczeniach założono następujące wartości parametrów układu (5.1)-(5.2): $a = 0,5$, $b = c = 1$ oraz krok numerycznego rozwiązywania równania różniczkowego (metodą Rungego-Kutty) $h = 0,01$, opóźnienie $\tau = 0,1 \cdot h = 0,001$, długość przedziału uśredniania $125 \cdot h = 1,25$, dokładność osiągnięcia zbioru docelowego $0,01$ w przypadku $x_{k2} = 0$ oraz $0,05$ w przypadku $x_{k2} \neq 0$ (przy $\|x_0\| \leq 10$).

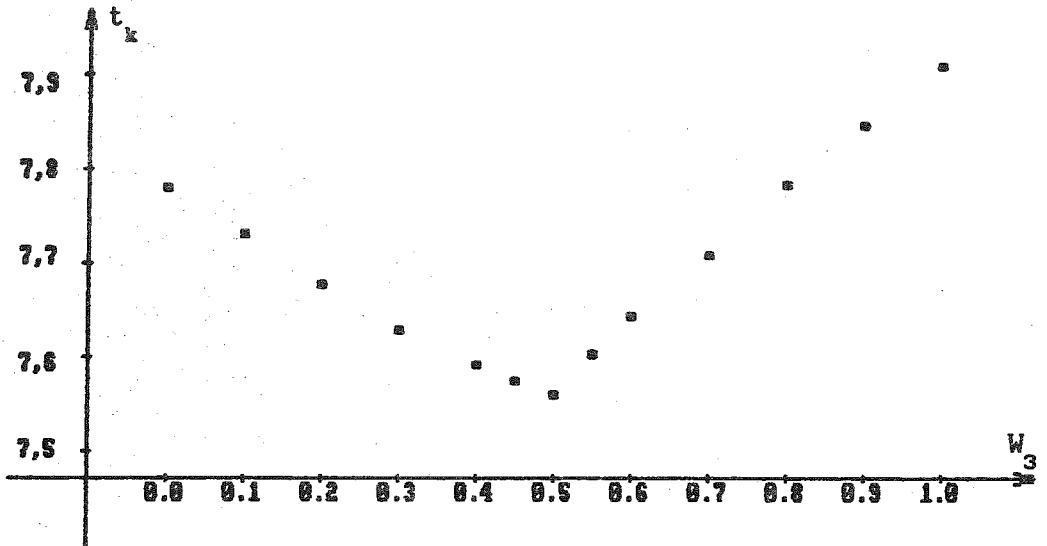
Najpierw przedstawione będą wyniki uzyskane w trakcie badań nad uwiarygodnieniem postaci funkcji strat s zdefiniowanej dla potrzeb przykładów wzorem (4.7) i określeniem wartości występujących tam parametrów e oraz f . W tym celu, przy braku składowej losowej, przyjęto we wzorze (5.3) $w = \text{const} = 0,5$. Przypadek $x_{k2} = 0$ (przykładowo przyjęto $x_0 = [-5,0]^T$ oraz $x_k = [0,0]^T$) ilustruje rysunek 5.2, gdzie pokazane są wartości osiągnięcia zbioru docelowego dla poszczególnych wartości $W = 0, 0,1, 0,2, \dots, 1$ oraz dodatkowo $W = 0,45, 0,55$. Kształt tak uzyskanego wykresu uzasadnia przyjęcie w przykładach funkcji strat postaci (4.7). Oczywiście minimalny czas osiągnięcia zbioru docelowego otrzymano przy $W = w = 0,5$. Porównując ilorazy różnic czasów osiągnięcia zbioru docelowego i czasu minimalnego, kolejno dla $W = 0,5 \pm 0,05$, $W = 0,5 \pm 0,1$, $W = 0,5 \pm 0,2$ (jako bliskim występującej w układzie wartości $w = 0,5$) oraz biorąc ich średnią arytmetyczną, uzyskano $e = 1$ oraz $f = 22,47$. Analogiczne wyniki dla przypadku $x_{k2} \neq 0$ pokazane są



Rys.52. Czasy osiągnięcia zbioru docelowego uzyskane w trakcie badań nad funkcją strat w przypadku zbioru docelowego postaci $[x_k, 0]$



Rys.53. Czasy osiągnięcia zbioru docelowego uzyskane w trakcie badań nad funkcją strat w przypadku zbioru docelowego postaci $[x_{k1}, x_{k2}]^T$, gdzie $x_{k2} \neq 0$ (parametr W_1)



Rys.5.4. Czasy osiągnięcia zbioru docelowego uzyskane w trakcie badań nad funkcją strat w przypadku zbioru docelowego postaci $[x_{k1}, x_{k2}]^T$, gdzie $x_{k2} \neq 0$ (parametr W_3)

na rysunkach 5.3 oraz 5.4 (przykładowo przyjęto $x_0 = [5,0]^T$ oraz $x_k = [2,2]^T$). Dla wyznaczania wartości parametru W_1 uzyskano $e = 1$, $f = 187,45$, natomiast dla W_3 otrzymano $e = 1$, $f = 2,55$. Warto zwrócić uwagę, że uzyskane dla wyznaczania wartości parametru W_1 , $e = 1$ oraz $f = 187,45$ sprawiają, iż wyniki otrzymywane przy określaniu tej wartości za pomocą reguły Bayesa i minimum będą podobne, co jest zgodne z uwagami poczynionymi w podrozdziale 4.3. Również dzięki postaci kryterium (4.15) możliwe było przyjęcie, dla uproszczenia, wartości $e = 1$.

Obecnie przedstawione będą wyniki głównej części obliczeń symulacji cyfrowej, sprawdzającej zachowanie się układu dynamicznego (5.1)-(5.2) poddanego działaniu skonstruowanego w tej pracy suboptymalnego regulatora stochastycznego, według schematu opisanego w podrozdziale 4.6.

Tak więc w przypadku, gdy $x_{k2} \neq 0$ lub $x_{k2} = 0$ i przeregulowania są dopuszczalne, przyjęto następujący sposób postępowania:

- w trakcie dwóch pierwszych przebiegów wartość parametru dobierana jest według reguły minimum, przy czym nośnikiem funkcji gęstości zmiennej losowej v jest przedział $[0,1]$,
- po drugim przebiegu stosowana jest już reguła Bayesa przy założeniu jednostajnego rozkładu zmiennej losowej v ; wartość parametru W_2 wy-

znaczana jest zgodnie z regułą minimaksu; w obu przypadkach stosowany jest nośnik funkcji gęstości otrzymany empirycznie,

- po uzyskaniu 20 pomiarów wartości zmiennej losowej v , rozkład jednostajny zastępowany jest już rozkładem beta.

Natomiast w pozostałym przypadku, gdy $x_{k2} = 0$ i przeregulowania są niedopuszczalne, stosowana była reguła minimaksu, przy czym przyjmowano:

- w trakcie dwóch pierwszych przebiegów nośnik funkcji gęstości zmiennej losowej v postaci $[0,1]$,
- po drugim przebiegu nośnik uzyskany na drodze empirycznej.

Stanami początkowymi i docelowymi były na przemian: $x_0 = [-5,0]^T$ i $x_k = [0,0]^T$ (reprezentujące przypadek $x_{k2} = 0$) oraz $x_0 = [5,0]^T$ i $x_k = [2,2]^T$ (reprezentujące $x_{k2} \neq 0$).

Najpierw omówiony będzie przypadek, gdy $x_{k2} \neq 0$ lub $x_{k2} = 0$ i przeregulowania są dopuszczalne.

Jak wspomniano, w trakcie dwóch pierwszych przebiegów algorytm stosował metodę minimaksu przy nośniku funkcji gęstości zmiennej losowej v postaci $[0,1]$. Czasy osiągnięcia zbioru docelowego, ilości przełączeń oraz wartości parametru regulatora W (lub $W_1/W_2/W_3$) były odpowiednio następujące:

$$\begin{array}{ccc} 4,688 & 309 & 0 \\ 8,672 & 414 & 0/1/0. \end{array} \quad (5.4)$$

Duża ilość przełączeń występująca na trajektorii poślizgowej wskazuje na niezbyt precyzyjne określenie wartości parametrów regulatora. Jest to jednak zrozumiałe, gdyż w początkowych przebiegach algorytm nie dysponował jeszcze wiarygodnymi danymi. Najważniejsze jest to, że nawet w tak niekorzystnej sytuacji, stan układu został sprowadzony do zbioru docelowego w procesie sterowania suboptymalnego. W szczególności, w przypadku $x_{k2} \neq 0$ nie wystąpił punkt końcowy, czy też niepożądany cykl graniczny.

Po tych dwóch przebiegach wartość parametru regulatora określana już była według reguły Bayesa w oparciu o rozkład jednostajny. Otrzymano następujące wyniki:

$$\begin{array}{ccc} 4,566 & 79 & 0,239 \\ 7,592 & 10 & 0,224/0,627/0,336. \end{array} \quad (5.5)$$

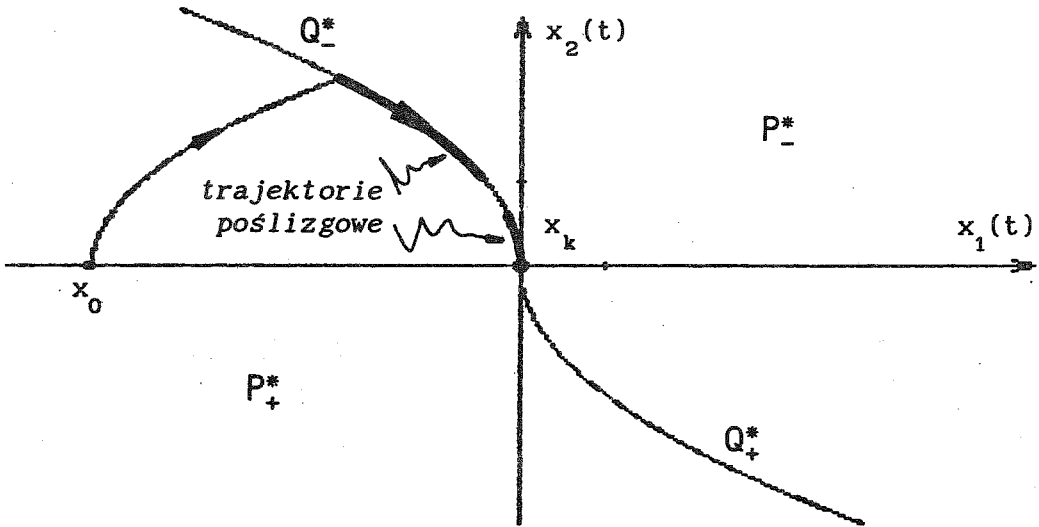
Zwraca uwagę mniejsza niż poprzednio ilość przełączeń. W drugim z powyższych przebiegów, w dolnej półpłaszczyźnie przestrzeni stanów występowały przez

pewien czas warunki do powstawania cyklu, pokazanego na rysunku 4.6. Co najważniejsze, czasy osiągnięcia zbioru docelowego zostały zmniejszone.

W trakcie powyższych czterech przebiegów uzyskanych zostało ponad 20 pomiarów wartości zmiennej losowej v . W następnych przebiegach rozkład jednostajny mógł więc być zastąpiony rozkładem beta. Otrzymano następujące wyniki:

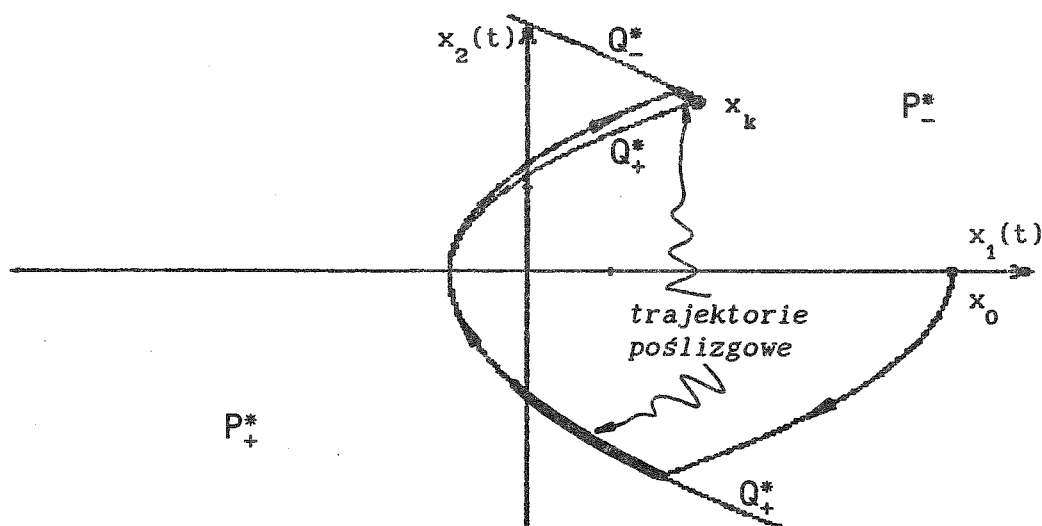
4,541	35	0,276	
7,587	18	0,260/0,627/0,310.	(5.6)

Czasy osiągnięcia zbioru docelowego są ponownie mniejsze od poprzednich. Uzyskane trajektorie pokazane zostały na rysunkach 5.5 i 5.6.



Rys.5.5. Trajektorie uzyskane dla wartości parametru $W: 0,276$

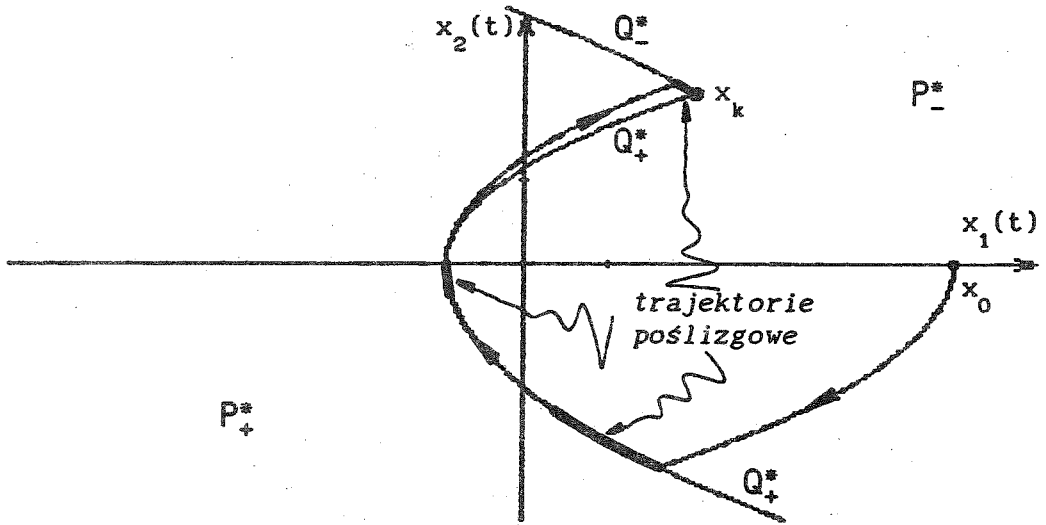
Warto zwrócić uwagę na przedostatnią trajektorię (rys. 5.5). Po osiągnięciu krzywej przełączeń, stan układu przesuwa się wzdłuż tej krzywej; najpierw występuje trajektoria poślizgowa, potem przez pewien czas pojawiają się warunki do powstania oscylacji pokazanych na rysunku 4.1 i wreszcie, ma miejsce ponowna trajektoria poślizgowa, sprowadzająca stan układu do zbioru docelowego. Można więc uznać, że wartość parametru $W = 0,276$ została dobrana przez



Rys.5.6. Trajektorja uzyskana dla wartości parametrów $W_1/W_2/W_3 : 0,260/0,627/0,310$

algorytm prawidłowo, gdyż jej zwiększenie spowodowałoby powstanie niekorzystnych oscylacji, natomiast zmniejszenie powiększyłoby długość trajektorii poślizgowych oraz ilość występujących na niej przełączeń.

W przeciwieństwie, w ostatnim przebiegu (rys. 5.6) wartość parametru $W_3 = 0,310$, pomimo że mniejsza niż uzyskana w oparciu o rozkład jednostajny (0,336 w (5.5)), jest jeszcze nieco za duża, gdyż do chwili osiągnięcia osi x_1 trajektorja powinna być podobna do poprzedniej, zilustrowanej na rysunku 5.5. Gdyby wyznaczona została wartość $W_3 = 0,280$, to trajektorja posiadałaby już charakterystykę podobną do trajektorji pokazanej na rysunku 5.5, a czas osiągnięcia zbioru docelowego zostałby jeszcze nieco zmniejszony do wartości 7,582 (rys. 5.7). Jednak pomimo tej niedoskonałości dobór parametru regulatora należy uznać za poprawny. Wszelkim rozważaniom probabilistycznym jest bowiem nieodłączna podstawowa ich cecha: ekstremalizacja wartości oczekiwanej nie musi gwarantować osiągnięcia tego ekstremum dla poszczególnych elementów $\omega \in \Omega$. Natomiast zbyt częste występowanie przebiegów o podobnej charakterystyce powinno, poprzez działanie warstwy adaptacji, spowodować zmianę wartości parametrów e oraz f wykorzystywanych przy wyznaczaniu wartości parametru W_3 .



Rys.5.7. Trajektorja uzyskana dla wartości parametrów $W_1, W_2/W_3 : 0,260/0,627/0,280$

I wreszcie omówiony teraz będzie pozostały przypadek, gdy $x_{k2} = 0$ i przeregulowania w sterowanym układzie są niedopuszczalne. Po dwóch pierwszych przebiegach, których wyniki są identyczne z zapisanymi w (5.4), nośnik funkcji gęstości zmiennej losowej v postaci $[0,1]$ został zastąpiony nośnikiem uzyskanym na drodze empirycznej. Otrzymało wtedy:

$$\begin{array}{ccc}
 4,575 & 95 & 0,221 \\
 7,633 & 110 & 0,221 / 0,627 / 0,221,
 \end{array}
 \tag{5.7}$$

przy czym drugi przebieg, nie spełniający obowiązujących tu założeń (x_{k2} jest bowiem różne od zera) zamieszczono jedynie dla porównania z wynikami (5.4)-(5.6). Zgodnie z wymaganiami przeregulowania nie wystąpiły. Również, jak można było przewidzieć, wyniki (5.7) są pośrednimi między (5.4) i (5.5). W szczególności czas osiągnięcia zbioru docelowego jest mniejszy niż wtedy, gdy nośnikiem funkcji gęstości zmiennej losowej v był przedział $[0,1]$, natomiast większy, gdy nie będąc ograniczony założeniem braku przeregulowań, algorytm mógł stosować regułę Bayesa, nawet z rozkładem jednostajnym.

Podsumowując: duża ilość przeprowadzonych obliczeń symulacyjnych potwierdziła teoretyczne rozważania i wykazała prawidłowe działanie skonstruowa-

nego w tej pracy suboptymalnego regulatora stochastycznego. Zbiór docelowy osiągnięty był w każdym przypadku z zadaną dokładnością rzędu 0,1-0,5% normy stanu początkowego, w czasie bliskim minimalnemu i zbliżającym się do niego w trakcie powiększania ilości pomiarów. Jeżeli założono, że przeregulowania są niedopuszczalne, to w trakcie procesu regulacyjnego przeregulowania nie występowały.

6. PODSUMOWANIE

W prezentowanej pracy rozważany był problem czasowo optymalnego sterowania stochastycznego losowym nieciągłym układem dynamicznym:

$$\dot{X}(\omega, t) = X_2(\omega, t) \quad (6.1)$$

$$\dot{X}(\omega, t) = \frac{1}{c} [b U(\omega, t) - a V(\omega, t) \operatorname{sgn}(X_2(\omega, t))], \quad (6.2)$$

przy czym U jest sterowaniem. Przyjęte zostało, że:

- $0 \leq a < b$,
- $c > 0$,
- $|U(\omega, t)| \leq 1$,
- $|V(\omega, t)| \leq 1$ oraz funkcja $V(\omega, \cdot)$ jest ciągła.

Występujące w równaniu (6.2) wyrażenie:

$$a V(\omega, t) \operatorname{sgn}(X_2(\omega, t)), \quad (6.3)$$

gdzie V jest ustalonym procesem stochastycznym, stanowi nieciągły model oporów ruchu.

Z praktycznego punktu widzenia, w rozważanym zagadnieniu czasowo optymalnego sterowania stochastycznego najkorzystniejsze byłoby określenie funkcji U zależnej jedynie od t oraz ewentualnie od $X_1(t)$ i $X_2(t)$, realizującej minimum wartości oczekiwanej czasu osiągnięcia zbioru docelowego. Tak sformułowane zagadnienie nie rokuje jednak nadziei na rozwiązanie. W prezentowanej pracy zostało więc zaproponowane tzw. czasowo optymalne sterowanie stochastyczne pierwszego rodzaju. Zapewnia ono realizację minimum wartości oczekiwanej czasu osiągnięcia zbioru docelowego, jednakże jest zależne dodatkowo od czynnika losowego. Zależność ta sprawia, że czasowo optymalne sterowanie stochastyczne pierwszego rodzaju jest trudne do bezpośredniego zastosowania, ale stanowi dogodną podstawę do tworzenia technicznych rozwiązań struktur suboptymalnych, w których zależność funkcji sterującej od

czynnika losowego została wyeliminowana. Należy zaznaczyć, iż stosowanie struktur suboptymalnych jest powszechne w praktyce optymalnego sterowania stochastycznego.

I tak, w twierdzeniu o czasowo optymalnym sterowaniu stochastycznym zostało wykazane istnienie czasowo optymalnego sterowania stochastycznego pierwszego rodzaju w rozważanym układzie. Dowiedzono też, że jego realizacje przyjmują wartości $+1$, -1 i mają co najwyżej jeden punkt nieciągłości. Udowodniono ponadto, że sterowanie to generuje w układzie jednoznaczne i równe sobie C -, F - oraz K -rozwiązanie pierwszego rodzaju, posiadające pochodną pierwszego rodzaju.

W oparciu o powyższe twierdzenie, zdefiniowana i szczegółowo rozważona została suboptymalna struktura sterująca określona w układzie zamkniętym, przy deterministycznej funkcji regulatora. Jej konstrukcja oparta była na elementach teorii decyzji. Dla układu z tak skonstruowanym regulatorem stochastycznym, zostało wykazane istnienie równych sobie F - oraz K -rozwiązania pierwszego rodzaju, jednoznacznych w przypadku gdy $x_{k2} = 0$, posiadających pochodną pierwszego rodzaju. Działanie takiej struktury sterującej zostało sprawdzone za pomocą cyfrowego programu symulacyjnego. Jego wyniki potwierdziły poprawne działanie skonstruowanego suboptymalnego regulatora stochastycznego dla dowolnej, występującej w praktyce charakterystyki oporów ruchu, także w obecności zakłóceń.

Przedstawiony materiał może być przeniesiony na inne elementy analizy wrażliwości układu sterowania czasowo optymalnego na przybliżenia charakterystyk i występujących w nich parametrów, np. stałej inercji układu napędowego. Może też być łatwo rozszerzony, np. o zagadnienie ograniczeń prędkości i przyspieszenia oraz — co jest jednak dość żmudne — uogólniony na dowolny układ dynamiczny drugiego rzędu. I wreszcie, tezy sformułowane w tej pracy pozostają prawdziwe, gdy równanie (6.2) zostanie uogólnione do losowej inkluzji różniczkowej:

$$\dot{X}_2(\omega, t) \in \frac{1}{c} [b U(\omega, t) - a V(\omega, t) \text{SGN}(X_2(\omega, t))], \quad (6.4)$$

gdzie $\text{SGN} : \mathbb{R} \rightarrow P(\mathbb{R})$ jest wielowartościową funkcją zdefiniowaną wzorem:

$$\text{SGN}(x) = \begin{cases} \text{sgn}(x), & \text{gdy } x \neq 0 \\ S, & \text{gdy } x = 0, \end{cases} \quad (6.5)$$

przy czym $S \subset (-\frac{b}{a}, \frac{b}{a})$; model taki uwzględnia dodatkowo tarcie statyczne.

DODATEK A

W dodatku tym przedstawiony będzie przykład ilustrujący wspomniane w podrozdziale 2.1 trudności, jakie stwarza w zagadnieniach sterowania optymalnego brak uniwersalnego pojęcia rozwiązania równania różniczkowego z nieciągłą prawą stroną.

Przykład

Rozważany będzie układ, którego dynamika opisywana jest równaniem różniczkowym:

$$\dot{x}_1(t) = x_2(t) + u_1(t) \quad (\text{A.1})$$

$$\dot{x}_2(t) = -x_1(t) + u_2(t). \quad (\text{A.2})$$

Poszukiwane jest sterowanie, które przeprowadza stan układu (A.1)-(A.2) ze stanu początkowego takiego, że $0 < \|x_0\| \leq 2$, do zbioru docelowego $x_k = [0,0]^T$ i minimalizuje wartość funkcjonału jakości:

$$J(u) = \int_{t_0}^{t_k} [(x_1(t) - 1)^2 + x_2(t)^2 - 1]^2 [u_1(t)^2 + u_2(t)^2] dt, \quad (\text{A.3})$$

gdzie t_k oznacza czas osiągnięcia zbioru docelowego.

Jeżeli $u(t) = [0,0]^T$, to równania (A.1)-(A.2) przyjmują postać:

$$\dot{x}_1(t) = x_2(t) \quad (\text{A.4})$$

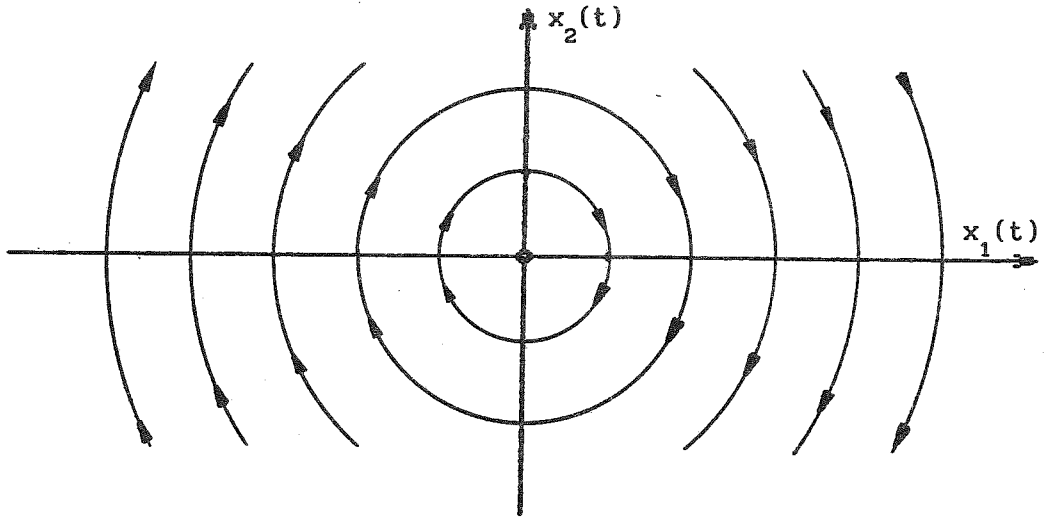
$$\dot{x}_2(t) = -x_1(t). \quad (\text{A.5})$$

Trajektorie tego układu pokazane są na rysunku A.1.

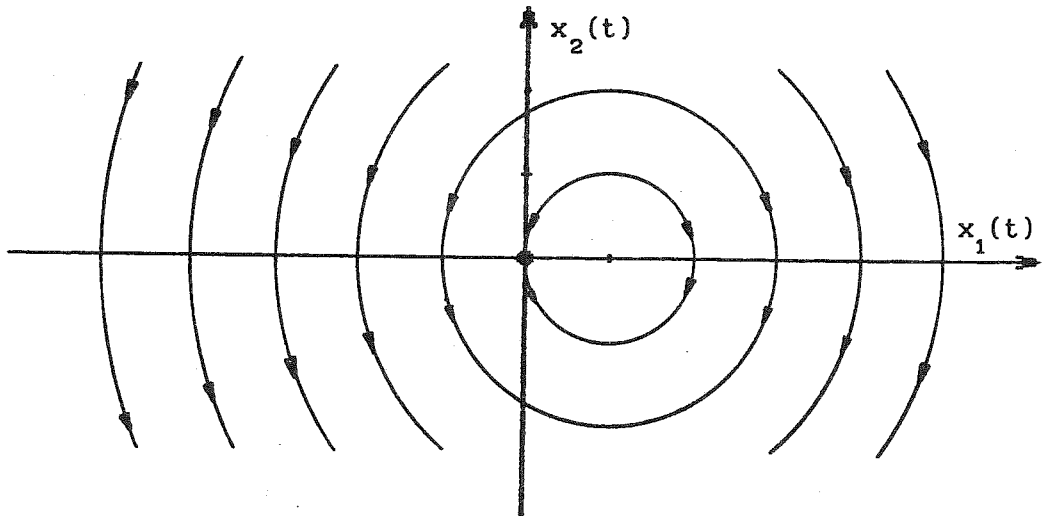
Jeżeli natomiast sterowanie zdefiniowane zostanie w układzie zamkniętym wzorem:

$$u(x(t)) = \begin{bmatrix} u_1(x(t)) \\ u_2(x(t)) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2x_2(t) \\ 2x_1(t) - 1 \end{bmatrix}, \quad (\text{A.6})$$

to równania (A.1)-(A.2) przyjmują postać:



Rys.A1. Trajektorie układu dynamicznego (A.1)-(A.2), gdy $u(t) = [0,0]^T$



Rys.A2. Trajektorie układu dynamicznego (A.1)-(A.2), gdy $u(x(t)) = [-2x_2(t), 2x_1(t) - 1]^T$

$$\dot{x}_1(t) = -x_2(t) \quad (\text{A.7})$$

$$\dot{x}_2(t) = x_1(t) - 1. \quad (\text{A.8})$$

Trajektorie takiego układu pokazane są na rysunku A.2.

Niech dane będzie następujące sterowanie określone w układzie zamkniętym:

$$u^*(x(t)) = \begin{bmatrix} u_1^*(x(t)) \\ u_2^*(x(t)) \end{bmatrix} = \begin{cases} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}, & \text{gdy } x(t) \notin O \\ \begin{bmatrix} -2x_2(t) \\ 2x_1(t) - 1 \end{bmatrix}, & \text{gdy } x(t) \in O, \end{cases} \quad (\text{A.9})$$

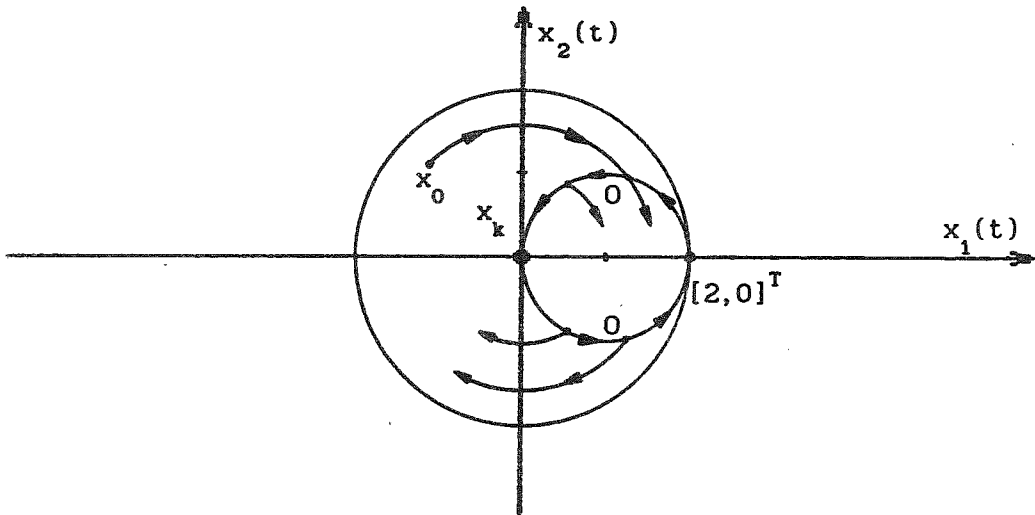
przy czym O oznacza okrąg opisany równaniem $(x_1(t) - 1)^2 + x_2(t)^2 = 1$. Jeżeli stan układu nie znajduje się na okręgu O , to jak wynika z rysunku A.1, występujące w powyższym wzorze sterowanie $u^*(x(t)) = [0, 0]^T$ przeprowadza stan układu do tego okręgu w skończonym czasie. Jeżeli natomiast stan układu znajduje się na okręgu O , to zgodnie z rysunkiem A.2, sterowanie $u^*(x(t)) = [-2x_2(t), 2x_1(t) - 1]^T$ przeprowadza go po tym okręgu do zbioru docelowego również w skończonym czasie. Można stąd sądzić, że $J(u^*) = 0$, a ponieważ J jest funkcjonałem nieujemnym, to sterowanie u^* określone wzorem (A.9) minimalizuje wartość funkcjonału jakości (A.3).

Rozważane teraz będzie zachowanie się układu dynamicznego (A.1)-(A.2) poddanego działaniu określonego wyżej sterowania (A.9) (rys. A.3).

Jeżeli $x_0 \in O$, a więc dla prawie wszystkich warunków początkowych, rozwiązanie klasyczne nie jest określone na przedziale $[t_0, t_k]$, ponieważ w chwili przecięcia okręgu O pochodna lewostronna rozwiązania musiałaby być różna od pochodnej prawostronnej, a więc warunek klasy C^1 wymagany od rozwiązania klasycznego nie byłby spełniony.

Wspomniana wyżej trajektoria, która przeprowadza stan układu do okręgu O , a następnie po tym okręgu do zbioru docelowego, reprezentuje C -rozwiązanie. Jednak trajektoria przeprowadzająca stan układu do okręgu O i przecinająca go, także reprezentuje C -rozwiązanie, ponieważ rozwiązanie to może nie spełniać równania różniczkowego na zerowej miary podzbiorze przedziału $[t_0, t_k]$. Również z tego powodu, jeżeli stan układu porusza się po okręgu O , to w każdym momencie może go opuścić. Powyższe elementy mogą się powtarzać w dowolnych konfiguracjach (rys. A.3).

Na kształt F -rozwiązania nie ma wpływu postać funkcji określającej dynamikę układu na zerowej miary podzbiorach przestrzeni stanów, czyli w szczególności na okręgu O , a zatem sterowanie określone wzorem (A.9) jest równoważne w



Rys.A.3. Trajektorie układu dynamicznego (A.1)-(A.2) poddanego działaniu sterowania (A.9)

tym przypadku sterowaniu $u(t) = [0, 0]^T$. Trajektorie reprezentujące F -rozwiązania układu (A.1)-(A.2) poddanego działaniu sterowania (A.9) pokazane są zatem na rysunku A.2.

Tak więc, w rozważanym przypadku każde F -rozwiązanie jest C -rozwiązaniem, ale zależność przeciwna nie jest prawdziwa. Oczywiście każde C -rozwiązanie jest również K -rozwiązaniem. Jednak postać operatora Krasowskiego w punkcie $[2, 0]^T$ wskazuje, że K -rozwiązanie może także „zatrzymać” się w tym punkcie, a potem „ruszyć” w dowolnym momencie. Ponieważ istnieje możliwość powrotu stanu układu do tego punktu, powyższe może się wielokrotnie powtarzać (rys. A.3). ■

Szczegółowa analiza problemu rozwiązania równania różniczkowego (A.1)-(A.2) wskazuje, że sterowania określonego wzorem (A.9) nie można jednak uznać za optymalne, gdyż generowane przez to sterowanie rozwiązanie klasyczne nie istnieje, F -rozwiązanie nie przeprowadza stanu układu do zbioru docelowego, natomiast C - i K -rozwiązania nie są jednoznaczne, a więc funkcjonal jakości (A.3) byłby wtedy funkcją wieloznaczną.

DODATEK B

W niniejszym dodatku przedstawione zostanie twierdzenie Sainte-Beuve'a, które jest wielokrotnie wykorzystywane w prezentowanych dowodach.

Definicja

Przestrzeń topologiczna nazywana jest przestrzenią polską, jeżeli jest ośrodkowa oraz metryzowalna [Alexiewicz, s. 31] w sposób zupełny [Alexiewicz, s. 32]. ■

Zbiór liczb rzeczywistych jest oczywiście przestrzenią polską.

Definicja

Niech dane będą zbiory X i Y oraz odwzorowanie wielowartościowe $H : X \rightarrow P(Y) \setminus \{\emptyset\}$, gdzie $P(Y)$ jest rodziną podzbiorów zbioru Y . Selektorem odwzorowania H nazywane jest odwzorowanie (jednowartościowe) $h : X \rightarrow Y$ takie, że $h(x) \in H(x)$ dla każdego $x \in X$. ■

Twierdzenie (Sainte-Beuve'a)

Niech (Ω, S, P) będzie przestrzenią probabilistyczną i niech Y będzie przestrzenią polską. Niech $H : \Omega \rightarrow P(Y) \setminus \{\emptyset\}$ będzie odwzorowaniem wielowartościowym takim, że jego wykres $graph(H) = \{(\omega, y) \in \Omega \times Y : y \in H(\omega)\}$ jest mierzalny w sensie topologii produktowej w $\Omega \times Y$. Wtedy odwzorowanie H ma selektor mierzalny.

Dowód znajduje się w pracy [Sainte-Beuve, s. 120-121]. Przestrzeń polska jest oczywiście przestrzenią Suslina [Sainte-Beuve, s. 112-113]. ■

W przypadku odwzorowania jednowartościowego, twierdzenie Sainte-Beuve'a stanowi, że odwzorowanie $H : \Omega \rightarrow Y$ o wykresie mierzalnym jest mierzalne.

DODATEK C

W dodatku tym przedstawiona będzie prosta metoda oszacowania rzędu wielkości różnicy między czasami osiągnięcia zbioru docelowego, gdy sterowanie jest czasowo optymalne oraz gdy generowane jest przez skonstruowany w tej pracy suboptymalny regulator stochastyczny.

Niech będzie ustalone $\omega \in \Omega$. Ze wzoru (4.5) wynika, że:

$$\int_{t_0}^{t_k} |\dot{X}_2(\omega, t)| dt = \frac{1}{c} \int_{t_0}^{t_k} |b U(\omega, t) - a V(\omega, t) \operatorname{sgn}(X_2(\omega, t))| dt. \quad (C.1)$$

gdzie t_k jest czasem osiągnięcia zbioru docelowego. Występujące po prawej stronie tego równania wyrażenie:

$$a V(\omega, t) \operatorname{sgn}(X_2(\omega, t)) \quad (\text{C.2})$$

może być w proponowanej uproszczonej metodzie pominięte, gdyż proces sterowania suboptymalnego „ma charakter symetryczny” (rys. 4.4 i 4.8), a więc w sensie wartości bezwzględnej wyrażenie (C.2) w podobnym stopniu odejmuje się od wyrażenia:

$$b U(\omega, t) \quad (\text{C.3})$$

jak dodaje, co jest przez całkę uśredniane; nadto wartości jakie przyjmuje wyrażenie (C.2) są w praktyce znacznie mniejsze niż wartości wyrażenia (C.3). Tak więc równanie (C.1) można zapisać jako:

$$\frac{1}{c} \int_{t_0}^{t_k} |b U(\omega, t)| dt = \int_{t_0}^{t_k} |\dot{X}_2(\omega, t)| dt, \quad (\text{C.4})$$

a ponieważ dla każdego $t \in (t_0, t_k)$ funkcja $U(\omega, \cdot)$ przyjmuje wartości 1 lub -1 , to:

$$\frac{b}{c} (t_k - t_0) = \sum \Delta X_2(\omega, t), \quad (\text{C.5})$$

gdzie $\sum \Delta X_2(\omega, t)$ oznacza sumę przyrostów funkcji X_2 , czyli sumę długości rzutów trajektorii na oś x_2 . Ostatecznie, jeżeli górne indeksy „o” przyporządkowane będą sterowaniu optymalnemu, a indeksy „s” regulatorowi suboptymalnemu, to:

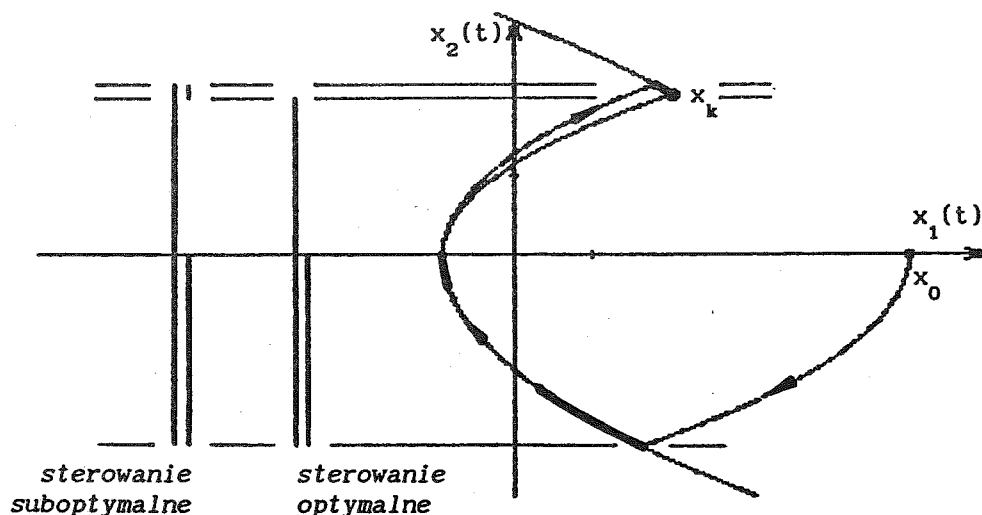
$$\frac{t_k^s - t_0}{t_k^o - t_0} = \frac{\sum \Delta X_2^s(\omega, t)}{\sum \Delta X_2^o(\omega, t)}. \quad (\text{C.6})$$

Przykładowo rozważony zostanie przebieg reprezentowany przez trajektorię pokazaną na rysunku 5.7 i ponownie na rysunku C.1. Sterowanie czasowo-optymalne przyjmuje wartość -1 , a następnie $+1$; na rysunku C.1 zaznaczono linię reprezentującą przybliżoną wartość wyrażenia $\sum \Delta X_2^o(\omega, t)$. Podobnie jest tam również zaznaczona wartość wyrażenia $\sum \Delta X_2^s(\omega, t)$. Ostatecznie:

$$\frac{t_k^s - t_0}{t_k^o - t_0} = \frac{\sum \Delta X_2^s(\omega, t)}{\sum \Delta X_2^o(\omega, t)} = \frac{56}{53} = 1,057, \quad (\text{C.7})$$

a więc czas osiągnięcia zbioru docelowego w przypadku gdy sterowanie genero-

wane było przez regulator suboptymalny jest o 5,7% większy niż w przypadku sterowania czasowo optymalnego. Ze względu na występujące w układzie, a niewidoczne na rysunku C.1 — z racji ograniczonej rozdzielczości — odcinki trajektorii poślizgowej, wartość tę należy powiększyć zgodnie z wynikami pokazanymi na rysunkach 5.2-5.4 o $\frac{1}{10} \div \frac{1}{20}$, czyli do 6%.



Ryc.C.1. Oszacowanie rzędu wielkości różnicy między czasami osiągnięcia zbioru docelowego, gdy sterowanie jest czasowo optymalne oraz gdy generowane jest przez suboptymalny regulator stochastyczny

DODATEK D

W niniejszym dodatku zostanie uściślone pojęcie przestrzeni funkcji lokalnie istotnie ograniczonych i lokalnie całkowalnych.

Definicja

Niech $t_0 \in \mathbb{R}$ oraz $T = [t_0, \infty)$. Niech dana będzie przestrzeń funkcji $h : T \rightarrow \mathbb{R}^2$ takich, że dla każdego zbioru zwartego $E \subset T$ zachodzi $h \in L^\infty(E, \mathbb{R}^2)$ [Musielak, s. 48]. Niech dana też będzie rodzina seminorm:

$$|h|_m = \sup_{t \in [t_0, t_0 + m]} (|h(t)|) \quad \text{dla } m = 1, 2, \dots, \quad (\text{D.1})$$

gdzie \sup oznacza supremum istotne [Musielak, s. 48], generująca [Musielak, s. 52-53] metrykę:

$$d(h^*, h^{**}) = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{2^m} \frac{|h^* - h^{**}|_m}{1 + |h^* - h^{**}|_m}. \quad (\text{D.2})$$

Powyższa przestrzeń wraz z topologią wprowadzaną przez metrykę d nazywana jest przestrzenią funkcji lokalnie istotnie ograniczonych i oznaczana przez $L_{loc}^{\infty}(T, \mathbb{R}^2)$.

W oparciu o pojęcie przestrzeni funkcji całkowalnych $L^1(T, \mathbb{R}^2)$ [Musielak, s. 45] można analogicznie zdefiniować przestrzeń funkcji lokalnie całkowalnych, oznaczaną przez $L_{loc}^1(T, \mathbb{R}^2)$. ■

LITERATURA

POZYCJE PODSTAWOWE

- BILLINGSLEY P.: *Prawdopodobieństwo i miara*. PWN, Warszawa 1987.
- BOBROWSKI D.: *Wstęp do losowych równań różniczkowych zwyczajnych*. PWN, Warszawa 1987.
- KOŁODZIEJ W.: *Analiza matematyczna*. PWN, Warszawa 1978.
- LINDGREN B.W.: *Elementy teorii decyzji*. WNT, Warszawa 1977.
- ŁOJASIEWICZ S.: *Wstęp do teorii funkcji rzeczywistych*. PWN, Warszawa 1973.
- MUSIELAK J.: *Wstęp do analizy funkcjonalnej*. PWN, Warszawa 1976.
- PELCZAR A., SZARSKI J.: *Wstęp do teorii równań różniczkowych*. Część I. PWN, Warszawa 1987.
- SOBCZYK K.: *Metody dynamiki statystycznej*. PWN, Warszawa 1973.

POZYCJE UZUPEŁNIAJĄCE

- ALEXIEWICZ A.: *Analiza funkcjonalna*. PWN, Warszawa 1969.
- ATHANS M., FALB P.L.: *Sterowanie optymalne*. WNT, Warszawa 1969.
- BOBROWSKI D.: *Probabilistyka w zastosowaniach technicznych*. WNT, Warszawa 1980.
- BOŁTIAŃSKI W.G.: *Matematyczne metody sterowania optymalnego*. WNT, Warszawa 1971.
- DUDA R.: *Wprowadzenie do topologii*. Część I. PWN, Warszawa 1986.
- ENGELKING R.: *Topologia ogólna*. PWN, Warszawa 1976.
- FICHTENHOLZ G.M.: *Rachunek różniczkowy i całkowy*. Tom II. PWN, Warszawa 1978.
- HAJEK O.: *Discontinuous Differential Equations*, I. Journal of Differential Equations, vol. 32, 1979, s. 149-170.
- HAJEK O.: *Discontinuous Differential Equations*, II. Journal of Differential Equation, vol. 32, 1979, s. 171-185.
- HEJMO W.: *Stability of a Time-Optimal Closed-Loop System with Parameter Changes*. International Journal of Control, vol. 45, no. 4, 1987, s. 1161-1178.
- HEJMO W., KLOCH J.: *On the Perturbations in a Time-Optimal Closed-Loop System*. Annales Polonici Mathematici, tom L, zeszyt 1, 1989, s. 37-52.
- HEJMO W., KLOCH J.: *Time-Optimal Position Control in the Presence of Non-Linear and Discontinuous Resistances of Movement*. Archiwum Automatyki i Telemechaniki, tom XXVI, zeszyt 2, 1981, s. 163-173.
- HEJMO W., KULCZYCKI P.: *On the Approach to Time-Optimal Control of Positional Systems*. Archiwum Automatyki i Telemechaniki, tom XXXI, zeszyt 1-2, 1986, s. 103-116.
- HEJMO W., KULCZYCKI P.: *Feedback Deformation in Time-Optimal System*. Systems Science, vol. 13, no. 3-4, 1987, s. 75-91
- HEJMO W., KULCZYCKI P.: *Synthesis of Closed-Loop System Controlling a Random Object*. Lecture Notes in Control and Information Sciences, Springer-Verlag, 1990, vol. 144, s. 714-723.
- KĄCKI E.: *Elektroniczna technika obliczeniowa*. PWN, Warszawa 1986.

- KULCZYCKI P.: *Czasowo optymalne sterowanie stochastyczne nieciągłym układem dynamicznym*. Wydział Elektrotechniki, Automatyki i Elektroniki Akademii Górniczo-Hutniczej w Krakowie, praca doktorska, 1991.
- KURATOWSKI K.: *Wstęp do teorii mnogości i topologii*. PWN, Warszawa 1980.
- KUSHNER H.: *Wprowadzenie do teorii sterowania stochastycznego*. PWN, Warszawa 1983.
- LEITMANN G.: *Wprowadzenie do teorii sterowania optymalnego*. WNT, Warszawa 1971.
- LEJA F.: *Rachunek różniczkowy i całkowy*. PWN, Warszawa 1977.
- MAURIN K.: *Analiza. Część I. Elementy*. PWN, Warszawa 1977.
- MEDITCH J.S.: *Estymacja i sterowanie statystycznie optymalne w układach liniowych*. WNT, Warszawa 1975.
- OGATA K.: *Metody przestrzeni stanów w teorii sterowania*. WNT, Warszawa 1974.
- OPIAL Z.: *Algebra wyższa*. PWN, Warszawa 1975.
- PAPOULIS A.: *Prawdopodobieństwo, zmienne losowe i procesy stochastyczne*. WNT, Warszawa 1972.
- PAWŁOWSKI Z.: *Statystyka matematyczna*. PWN, Warszawa 1980.
- RUDIN W.: *Analiza rzeczywista i zespolona*. PWN, Warszawa 1986.
- SAINTE-BEUVE M.-F.: *On the Extension of Von Neumann-Aumann's Theorem*. Journal of Functional Analysis, vol. 17, 1974, s. 112-129.
- SCHWEPPE F.C.: *Układy dynamiczne w warunkach losowych*. WNT, Warszawa 1978.
- WENTZELL A.D.: *Wykłady z teorii procesów stochastycznych*. PWN, Warszawa 1980.
- WONG E.: *Procesy stochastyczne w teorii informacji i układach dynamicznych*. WNT, Warszawa 1976.

STRESZCZENIE

Praca dotyczy zagadnienia syntezy czasowo optymalnego sterowania układem, którego dynamika opisana jest równaniem różniczkowym z nieciągłą prawą stroną. Zaproponowano probabilistyczną koncepcję rozwiązania problemu. Zdefiniowane zostało pojęcie czasowo optymalnego sterowania stochastycznego pierwszego rodzaju, które zapewnia realizację minimum wartości oczekiwanej czasu osiągnięcia zbioru docelowego. Udowodniono istnienie i charakterystykę powyższego typu sterowania oraz generowanego przez nie rozwiązania losowego równania różniczkowego.

Jako aplikacyjny wniosek z powyższych rozważań zdefiniowano i szczególnie rozpatrzono suboptymalną strukturę sterującą określoną w układzie zamkniętym, przy deterministycznej funkcji regulatora. Jej konstrukcja oparta została na elementach teorii decyzji. Jak poprzednio, wykazano istnienie i charakterystykę generowanego rozwiązania.

Rozważania zostały zilustrowane przykładami. Zawarto też szereg sugestii dla praktycznych rozwiązań. Skomentowane zostały wyniki symulacyjnej weryfikacji poprawności działania skonstruowanego suboptymalnego regulatora stochastycznego.

TIME-OPTIMAL STOCHASTIC CONTROL OF DISCONTINUOUS DYNAMIC OBJECT

Summary

The monograph deals with the question of synthesis of the time-optimal control of the object whose dynamics is described by the differential equation with a discontinuous right-hand side. A probabilistic concept of the problem solving was proposed. The notion of the time-optimal stochastic control of the first type, which ensures the realization of the minimum of the expected value of the time designed for reaching the target set, was defined. The existence and characteristics of that kind of control and the solution of the random differential equation generated by it were proved.

As the applicational conclusion from the above considerations, the suboptimal control structure determined as a closed-loop system with a deterministic function of the feedback controller, was defined and considered in detail. Its construction was based on the elements of the decision theory. As before, the existence and characteristics of the generated solution was proved.

The considerations were illustrated with examples. The monograph also includes a number of suggestions for practical applications. Results of the simulation verification of the correct operation of the constructed suboptimal stochastic closed-loop system was commented on.

СТОХАСТИЧЕСКОЕ УПРАВЛЕНИЕ ПО БЫСТРОДЕЙСТВИЮ РАЗРЫВНОЙ ДИНАМИЧЕСКОЙ СИСТЕМОЙ

Резюме

Разработка касается вопроса синтеза управления по быстродействию системой, которой динамика определена дифференциальным уравнением с разрывной правой частью. Предложено вероятностную концепцию разрешения проблемы. Сформулировано определение понятия стохастического управления по быстродействию первого типа, которое обеспечивает реализацию минимума математического ожидания времени достижения конечного множества. Доказано существование и характеристику вышеупомянутого рода управления, а также порождаемого им решения случайного дифференциального уравнения.

Как применяемый вывод из вышеизложенного, сформулировано и детально рассмотрено субоптимальную управляющую структуру, определённую в замкнутом контуре с детерминистской функцией регулятора. Её построение основано на элементах теории решений. Как выше, доказано существование и характеристику порождаемого решения.

Разработка иллюстрирована примерами. Помещено также ряд предложений для практических решений. Комментированы результаты симулированной верификации правильного действия построенного субоптимального стохастического регулятора.

SPIS TREŚCI

Rozdział 1. WSTĘP	3
Rozdział 2. PRELIMINARIA	5
2.1. Rozwiązania równań różniczkowych deterministycznych	5
2.2. Rozwiązania równań różniczkowych losowych	11
2.3. Sterowanie czasowo optymalne	13
2.4. Elementy teorii decyzji	15
Rozdział 3. CZASOWO OPTYMALNE STEROWANIE STOCHASTYCZNE	17
3.1. Sformułowanie problemu	17
3.2. Twierdzenie o czasowo optymalnym sterowaniu stochastycznym ..	19
3.3. Dowód lematu o czasowo optymalnym sterowaniu stochas- tycznym na realizacjach	21
3.4. Dowód twierdzenia o czasowo optymalnym sterowaniu stochas- tycznym	37
3.5. Proces stochastyczny o prawie wszystkich realizacjach ciągłych i wspólnie ograniczonych	47
3.6. Szczególny przypadek miary probabilistycznej	50
Rozdział 4. SUBOPTYMALNY REGULATOR STOCHASTYCZNY ..	52
4.1. Sformułowanie problemu	52
4.2. Synteza regulatora suboptymalnego w przypadku zbioru docelo- wego postaci $[x_{k1}, 0]^T$	55
4.3. Synteza regulatora suboptymalnego w przypadku zbioru docelo- wego postaci $[x_{k1}, x_{k2}]^T$, gdzie $x_{k2} \neq 0$	66
4.4. Twierdzenie o suboptymalnym regulatorze stochastycznym	73
4.5. Dowód twierdzenia o suboptymalnym regulatorze stochastycznym	75
4.6. Sugestie dla praktycznych rozwiązań	82
Rozdział 5. SYMULACJA CYFROWA	84
Rozdział 6. PODSUMOWANIE	93
DODATEK A	95
DODATEK B	99
DODATEK C	99
DODATEK D	101
LITERATURA	102
STRESZCZENIA	105

Cena zł 15 000

PL ISSN 0860-097X