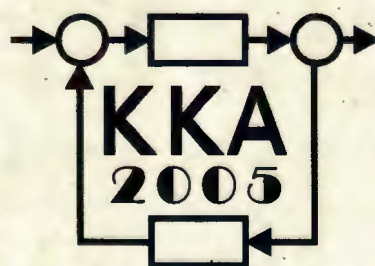


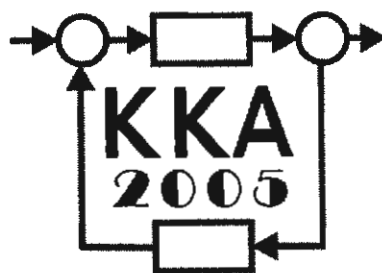
XV Krajowa Konferencja Automatyki

Tom III



**Redaktorzy:
Zdzisław Bubnicki
Roman Kulikowski
Janusz Kacprzyk**

XV Krajowa Konferencja Automatyki Tom III



Redaktorzy:
Zdzisław BUBNICKI
Roman KULIKOWSKI
Janusz KACPRZYK

ORGANIZATOR

Komitet Automatyki i Robotyki Polskiej Akademii Nauk
Instytut Badań Systemowych Polskiej Akademii Nauk

WSPÓLORGANIZATORZY

Politechnika Warszawska

Przemysłowy Instytut Automatyki i Pomiarów

Polskie Stowarzyszenie Pomiarów, Automatyki i Robotyki

ORGANIZATOR

Komitet Automatyki i Robotyki Polskiej Akademii Nauk
Instytut Badań Systemowych Polskiej Akademii Nauk

WSPÓLORGANIZATORZY

Politechnika Warszawska
Przemysłowy Instytut Automatyki i Pomiarów
Polskie Stowarzyszenie Pomiarów, Automatyki i Robotyki

KOMITET PROGRAMOWY

Przewodniczący	Zdzisław BUBNICKI
Zastępca Przewodniczącego	Roman KULIKOWSKI

CZŁONKOWIE

Stanisław BAŃKA	Michał BIAŁKO
Mikołaj BUSŁOWICZ	Władysław FINDEISEN
Ryszard GESSING	Henryk GÓRECKI
Jakub GUTENBAUM	Jerzy JÓZEFczyk
Stanisław KACZANOWSKI	Tadeusz KACZOREK
Janusz KACPRZYK	Jerzy KLAMKA
Józef KORBICZ	Zbigniew KOWALSKI
Krzysztof KOZŁOWSKI	Juliusz L. KULIKOWSKI
Krzysztof KUŹMIŃSKI	Kazimierz MALANOWSKI
Krzysztof MALINOWSKI	Wojciech MITKOWSKI
Antoni NIEDERLIŃSKI	Władysław PEŁCZEWSKI
Tadeusz PUCHAŁKA	Leszek RUTKOWSKI
Stanisław SKOCZOWSKI	Roman SŁOWIŃSKI
Jerzy ŚWIĄTEK	Andrzej ŚWIERNIAK
Ryszard TADEUSIEWICZ	Piotr TATJEWski
Krzysztof TCHOŃ	Leszek TRYBUS
Jan WĘGLARZ	Andrzej P. WIERZBICKI

KOMITET ORGANIZACYJNY

Przewodniczący	Roman KULIKOWSKI
Zastępcy Przewodniczącego	Janusz KACPRZYK
	Stanisław KACZANOWSKI
	Tadeusz KACZOREK
	Krzysztof MALINOWSKI
Członkowie	Roman OSTROWSKI
	Tadeusz PUCHAŁKA
	Dariusz WAGNER
Sekretarze naukowci	Jan STUDZIŃSKI
	Jan W. OWSIŃSKI

ISBN 83-89475-02-2

Copyright © Instytut Badań Systemowych Polskiej Akademii Nauk
All rights reserved

Druk: ARGRAF, Warszawa

SZTUCZNA INTELIGENCJA

WARUNKI STABILNOŚCI DYNAMICZNEJ SIECI NEURONOWEJ †

Krzysztof PATAN

Uniwersytet Zielonogórski, Instytut Sterowania i Systemów Informatycznych
 ul. Podgórna 50, 65-246, Zielona Góra, e-mail: K.Patan@issi.uz.zgora.pl

Streszczenie: Artykuł opisuje problem stabilności sztucznych sieci neuronowych zbudowanych z dynamicznych modeli neuronów. Warunki stabilności dla sieci z jedną warstwą ukrytą zostały wyprowadzone przy zastosowaniu warunków stabilności dla układów liniowych. Natomiast dla sieci z dwoma warstwami ukrytymi, gdzie równanie stanu ma postać nieliniową, do wyprowadzenia warunków globalnej stabilności użyto drugiej metody Lapunowa.

Słowa kluczowe: Sztuczne sieci neuronowe, równania stanu, modelowanie, warunki stabilności.

1. WPROWADZENIE

Najbardziej popularne klasy sieci neuronowych używane do identyfikacji procesów dynamicznych to: sieci jednokierunkowe z liniami opóźniającymi sygnały oraz sieci rekurencyjne. W wielu przypadkach, sieci jednokierunkowe z liniami opóźniającymi nie są w stanie uchwycić całej informacji o stanie obiektu [11]. Poza tym użycie wielu wejść sieci powoduje, że przestrzeń wejściowa sieci jest duża co prowadzi do dużej ilości wag wejściowych i znacznemu wydłużeniu procesu uczenia. Bardziej naturalnym uzyskaniem właściwości dynamicznych sieci jest wprowadzenie międzyneuronowych sprzężeń zwrotnych. Pomimo ogromnych możliwości modelowania obiektów dynamicznych rozwiązania takie posiadają wady w postaci wolnej zbieżności uczenia oraz występujące spore problemy z utrzymaniem stabilności modelu [7]. W ogólności modele rekurencyjne wydają się być zbyt skomplikowane do zastosowań praktycznych, szczególnie w przypadku realizacji sprzętowej. Poza tym stała zależność pomiędzy liczbą zmiennych stanu, a liczbą neuronów nie pozwala na dostosowanie dynamiki modelu i jego nieliniowości odrębnie. Alternatywnym rozwiązaniem wydaje się być użycie sieci lokalnie rekurencyjnych [10].

Sieci lokalnie rekurencyjne zbudowane są z tzw. dynamicznych modeli neuronów, zaś połączenia międzyneuronowe są jednokierunkowe podobnie jak w statycznych sieciach typu perceptronowego. W pracy rozważa się użycie dynamicznych modeli neuronów z filtrem o Nieskończonej Odpowiedzi Impulsowej (NOI) [1, 9]. Jak wiadomo sieć neuronowa zbudowana z neuronów z sigmoidalnymi funkcjami aktywacji jest stabilna w sensie

BIBO [11]. Jednakże, w przypadku użycia modeli neuronów z filtrami NOI, podczas uczenia filtry mogą stać się niestabilne i neurony mogą zacząć zachowywać się jak przełączniki. Model neuronowy będzie stabilny w sensie BIBO, ale pewna liczba neuronów może być bezużyteczna. Aby wykorzystać w pełni możliwości każdego neuronu, sieć powinna być stabilizowana w trakcie uczenia w celu utrzymania każdego filtru w sieci stabilnego. Artykuł przedstawia warunki stabilności dla dynamicznych sieci neuronowych zbudowanej z neuronów z filtrami NOI. Na podstawie wyprowadzonych warunków stabilności możliwe jest określenie obszarów dopuszczalnych parametrów sieci neuronowej, które można użyć w procesie stabilizacji sieci podczas uczenia.

2. DYNAMICZNA SIEĆ NEURONOWA

Sieci neuronowe, które są przedmiotem niniejszej pracy należą do klasy sieci lokalnie rekurencyjnych globalnie jednokierunkowych [10]. Struktura sieci jest wielowarstwowa, tzn. neurony pogrupowane są w warstwy, a sygnały przepływają przez sieć w jednym kierunku, począwszy od wejść, poprzez warstwy ukryte do wyjść. Nie występują w niej sprzężenia zwrotne pomiędzy neuronami. Dynamiczne właściwości uzyskuje się poprzez wprowadzenie do struktur neuronów filtru o nieskończonej odpowiedzi impulsowej [9]. Suma ważona sygnałów dochodzących do i -tego neuronu jest dana zależnością:

$$s_i(k) = w_i u(k) \quad (1)$$

gdzie $w_i = [w_{1i}, w_{2i}, \dots, w_{ni}]$ oznacza wektor wag wejściowych, n jest liczbą wejść, $u(k) = [u_1(k), u_2(k), \dots, u_n(k)]^T$ jest wektorem wejściowym (T – operator transpozycji). Wagi pełnią podobną rolę jak w statycznych sieciach neuronowych – wspólnie z funkcją aktywacji odpowiadają za właściwości aproksymujące neuronu. Tak obliczona suma ważona jest podawana na wejście filtru NOI rzędu r . Zmienne stanu i -tego neuronu sieci przedstawia następujące równanie stanu:

$$x_i(k+1) = A_i x_i(k) + W_i u(k) \quad (2)$$

gdzie wektor stanu $x_i(k) = [x_{1i}(k), x_{2i}(k), \dots, x_{ri}(k)]^T$, $W_i = 1 w_i$ oznacza macierz wag (1 jest jednostkowym wektorem kolumnowym o długości r) i macierz stanu A_i

† Praca została wykonana w ramach projektu KBN nr 4T11A01425.

jest postaci:

$$A_i = \begin{bmatrix} -a_{1i} & -a_{2i} & \dots & -a_{r-1i} & -a_{ri} \\ 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad (3)$$

Ostatecznie wyjście i -tego neuronu przedstawia równanie wyjścia:

$$y_i(k) = f(g_{2i}(b_i x_i(k) + d_i u(k)) - g_{1i} g_{2i}) \quad (4)$$

gdzie $f(\cdot)$ jest nieliniową funkcją aktywacji, $b_i = [b_1^i \ b_2^i \ \dots \ b_r^i]$ jest wektorem współczynników filtru, $d_i = [b_{0i} w_1 \ \dots \ b_{0i} w_n]$, g_{1i} and g_{2i} są odpowiednio progiem i nachyleniem funkcji aktywacji. Często używanymi funkcjami są funkcje typu tangens hiperboliczny, np.:

$$f(x, g_1, g_2) = \frac{1 - e^{-g_2(x-g_1)}}{1 + e^{-g_2(x-g_1)}} \quad (5)$$

gdzie współczynnik nachylenia funkcji $g_2 > 0$.

2.1. Opis sieci neuronowej w przestrzeni stanów

Sieć jednowarstwowa. Rozważmy dynamiczną sieć neuronową z n wejściami i m wyjściami. Model sieciowy z jedną warstwą ukrytą z v neuronami zawierającymi filtry NOI r -tego rzędu opisany jest następującymi równaniami:

$$\begin{cases} \mathbf{x}(k+1) = A\mathbf{x}(k) + W\mathbf{u}(k) \\ \mathbf{y}(k) = C f(G_2(B\mathbf{x}(k) + D\mathbf{u}(k)) - G_2 g_1)^T \end{cases} \quad (6)$$

gdzie $N = v \times r$ reprezentuje liczbę stanów modelu, $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^N$ jest wektorem stanu sieci neuronowej, $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^n$, $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^m$ są odpowiednio wektorami wejściowym i wyjściowym, $A \in \mathbb{R}^{N \times N}$ jest diagonalną macierzą parametrów filtrów związaną ze zmiennymi stanu ($\text{diag}(A) = [A_1, \dots, A_v]$), $W \in \mathbb{R}^{N \times n}$ i $C \in \mathbb{R}^{m \times v}$ są macierzami odpowiednio wejściową i wyjściową, $B \in \mathbb{R}^{v \times N}$ jest macierzą blokowo diagonalną parametrów filtrów, $D \in \mathbb{R}^{v \times n}$ jest macierzą transmisyjną, $g_1 = [g_{11} \ \dots \ g_{1v}]^T$ oznacza wektor wartości progowych, a $G_2 \in \mathbb{R}^{v \times v}$ macierz współczynników nachylenia funkcji aktywacji oraz $f: \mathbb{R}^v \rightarrow \mathbb{R}^v$ jest nieliniową funkcją wektorową. Postać macierzy B , D i G_2 podano poniżej:

$$B = \begin{bmatrix} b_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & b_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & b_v \end{bmatrix} \quad D = \begin{bmatrix} b_{01} w_1 \\ b_{02} w_2 \\ \vdots \\ b_{0v} w_v \end{bmatrix}$$

$$G = \begin{bmatrix} g_{21} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & g_{22} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & g_{2v} \end{bmatrix} \quad (7)$$

Przedstawiony opis odpowiada dynamicznej sieci neuronowej z jedną warstwą ukrytą zawierającą v dynamicznych neuronów i warstwą wyjściową z liniowymi neuronami typu Adaline.

Sieć dwuwarstwowa. Rozważmy dynamiczną sieć neuronową z n wejściami i m wyjściami. Model sieciowy z dwoma warstwami ukrytymi z v_1 neuronami w pierwszej warstwie i v_2 neuronami w drugiej zawierającymi filtry NOI r -tego rzędu opisany jest następującymi równaniami:

$$\begin{cases} \mathbf{x}(k+1) = g(\mathbf{x}(k), \mathbf{u}(k)) \\ \mathbf{y}(k) = h(\mathbf{x}(k), \mathbf{u}(k)) \end{cases} \quad (8)$$

gdzie $g(\cdot)$, $h(\cdot)$ są pewnymi funkcjami nieliniowymi. Jeżeli przyjmiemy, że $\mathbf{x}(k) = [\mathbf{x}^1(k) \ \mathbf{x}^2(k)]^T$, gdzie $\mathbf{x}^1(k) \in \mathbb{R}^{N_1}$ ($N_1 = v_1 \times r$) zawiera zmienne stanu pierwszej warstwy, a $\mathbf{x}^2(k) \in \mathbb{R}^{N_2}$ ($N_2 = v_2 \times r$) drugiej warstwy sieci neuronowej, to równanie stanu można zapisać w postaci:

$$\mathbf{x}^1(k+1) = A^1 \mathbf{x}^1(k) + W^1 \mathbf{u}(k) \quad (9a)$$

$$\mathbf{x}^2(k+1) = A^2 \mathbf{x}^2(k) + W^2 f(G_2^1(B^1 \mathbf{x}^1(k) + D^1 \mathbf{u}(k)) - G_2^1 g_1^1) \quad (9b)$$

gdzie $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^n$, $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^m$ są odpowiednio wektorami wejściowym i wyjściowym, macierze $A^1 \in \mathbb{R}^{N_1 \times N_1}$, $B^1 \in \mathbb{R}^{v_1 \times N_1}$, $W^1 \in \mathbb{R}^{N_1 \times n}$, $D^1 \in \mathbb{R}^{v_1 \times n}$, $g_1^1 \in \mathbb{R}^{v_1}$, $G_2^1 \in \mathbb{R}^{v_1 \times v_1}$ mają postać identyczną jak w przypadku sieci jednokierunkowej, $A^2 \in \mathbb{R}^{N_2 \times N_2}$ jest macierzą blokowo diagonalną związaną ze zmiennymi stanu drugiej warstwy ukrytej ($\text{diag}(A^2) = [A_{21}^2, \dots, A_{2v_2}^2]$), $W^2 \in \mathbb{R}^{N_2 \times v_1}$ jest macierzą wag połączeń synaptycznych pomiędzy pierwszą i drugą warstwą ukrytą. Równanie wyjścia rozważanej sieci neuronowej ma postać:

$$\mathbf{y}(k) = C^2 f(G_2^2(B^2 \mathbf{x}^2(k) + D^2 f(G_2^1(B^1 \mathbf{x}^1(k) + D^1 \mathbf{u}(k)) - G_2^1 g_1^1) - G_2^2 g_1^2)) \quad (10)$$

gdzie $C^2 \in \mathbb{R}^{m \times v_2}$ jest macierzą wyjściową, $B^2 \in \mathbb{R}^{v_2 \times N_2}$ jest macierzą blokowo diagonalną parametrów filtrów, $D^2 \in \mathbb{R}^{v_2 \times v_1}$ jest macierzą transmisyjną drugiej warstwy, $g_1^2 \in \mathbb{R}^{v_2}$ jest wektorem wartości progowych neuronów drugiej warstwy ukrytej, $G_2^2 \in \mathbb{R}^{v_2 \times v_2}$ oznacza macierz diagonalną współczynników nachylenia funkcji aktywacji drugiej warstwy ukrytej, Macierze B^2 , D^2 i G_2^2 mają postać analogiczną do macierzy B^1 , D^1 i G_2^1 . Przedstawiony opis odpowiada dynamicznej sieci neuronowej z dwoma warstwami ukrytymi zawierającą v_1 dynamicznych neuronów w pierwszej warstwie ukrytej, v_2 dynamicznych neuronów w drugiej warstwie ukrytej i warstwą wyjściową z liniowymi neuronami typu Adaline.

3. ANALIZA STABILNOŚCI

Większość znanych rozważań na temat stabilności sieci neuronowych opiera się o podstawowe lub zmodyfikowane metody Lapunowa [2, 3]. Brak jest jednak rozwiązań odnoszących się do sieci neuronowych będących przedmiotem niniejszego artykułu. W sieciach lokalnie rekurencyjnych dynamika jest realizowana na poziomie pojedynczych neuronów. Z reguły właściwości dynamiczne

uzyskiwane są poprzez wprowadzenie do struktury neuronów liniowych systemów dynamicznych, np. filtrów NOI. Podczas uczenia sieci neuronowej zbudowanej z neuronów zawierających filtry NOI, bieguny tychże filtrów mogą wyjść poza koło jednostkowe pogarszając tym samym właściwości sieci neuronowej. Analiza stabilności pozwoli na wyznaczenia warunków stabilności modeli neuronowych, które będą podstawą do wyznaczenia ograniczeń na parametry sieci neuronowej i wprowadzenie tych ograniczeń do procedury uczenia. W ten sposób można zdefiniować uczenie sieci jako problem optymalizacji z ograniczeniami [8].

Stabilność sieci z jedną warstwą ukrytą. Analizując opis sieci dynamicznej zawierającej jedną warstwę ukrytą zauważamy, że równanie stanu takiego modelu neuronowego jest liniowe co umożliwia zastosowanie metod analizy stabilności dla procesów liniowych. Liniowy, dyskretny system dynamiczny jest stabilny, gdy wszystkie jego bieguny leżą wewnątrz koła jednostkowego:

$$\forall i \quad |z_i| < 1 \quad (11)$$

Równanie stanu w (6) jest liniowe. Stąd, system (6) będzie stabilny jeśli pierwiastki równania charakterystycznego

$$\det(A - Iz) = 0 \quad (12)$$

spełniają warunek (11). W (12) $I \in \mathbb{R}^{N \times N}$ oznacza macierz jednostkową. W ogólnym przypadku (12) może mieć skomplikowaną postać. Jednakże w rozważanym problemie równanie stanu jest liniowe z blokowo diagonalną macierzą stanu. Dla macierzy blokowo diagonalnych wyznacznik można wyznaczyć następująco [6]:

$$\det A = \prod_{i=1}^v \det A_i \quad (13)$$

i równanie charakterystyczne (12) można zapisać w postaci:

$$\prod_{i=1}^v \det(A_i - Iz_i) = 0 \quad (14)$$

gdzie $I \in \mathbb{R}^{r \times r}$ jest macierzą jednostkową, z_i reprezentuje bieguny i -tego neuronu. Stąd, przy użyciu (14) można wyznaczyć bieguny systemu (6) rozwiązując układ równań:

$$\forall i \quad \det(A_i - Iz_i) = 0 \quad (15)$$

Powyższa analiza pokazuje, że bieguny i -tego neuronu można wyznaczyć niezależnie, czyli zmienne stanu i -tego neuronu są niezależne od zmiennych stanu innych neuronów tej samej warstwy. Na tej podstawie można sformułować poniższe twierdzenie.

Twierdzenie 1. System opisany równaniami (6) będzie stabilny jeśli bieguny wszystkich filtrów NOI znajdujących się w neuronach ukrytych będą stabilne.

Ważna jest więc metoda utrzymująca bieguny wewnątrz koła jednostkowego. Problem można rozwiązać wyznaczając dopuszczalne obszary parametrów filtrów. Dla filtru pierwszego rzędu obszar dopuszczalny określa prze-

dział $a_1 \in (-1, 1)$. Dla filtru drugiego rzędu obszar dopuszczalny na parametry filtru definiują warunki:

$$\begin{cases} 1 - a_1 + a_2 > 0 \\ 1 + a_1 + a_2 > 0 \\ 1 - a_2 > 0 \end{cases} \quad (16)$$

które określają obszar w postaci trójkąta [8].

Sieć z dwiema warstwami ukrytymi. W tym przypadku równanie stanu ma postać nieliniową. Po dekompozycji równania stanu (9) widać wyraźnie, że zmienne stanu pierwszej warstwy sieci neuronowej są niezależne od zmiennych stanu drugiej warstwy i posiadają postać liniową. Zmienne stanu drugiej warstwy ukrytej są wyrażone w postaci nieliniowości. Zauważmy ponownie, że zmienne stanu poszczególnych neuronów danej warstwy ukrytej niezależą od zmiennych stanu innych neuronów tej samej warstwy. Biorąc te fakty pod uwagę, (9b) można przepisać następująco:

$$x_i^2(k+1) = A_i^2 x_i^2(k) + W_i^2 f(G_2^1(B^1 x^1(k) + D^1 u(k) - g_1^1)) \quad \text{dla } i = 1, \dots, v_2 \quad (17)$$

Podstawmy $\Psi = G_2^1 B^1$ i $s_1 = G_2^1 D^1 u(k) - G_2^1 g_1^1$ gdzie s_1 można postrzegać jako sygnał o stałej wartości lub wartość progową, wtedy (17) przybiera postać

$$x_i^2(k+1) = A_i^2 x_i^2(k) + W_i^2 f(\Psi x^1(k) + s_1) \quad (18)$$

Przy użyciu przekształcenia liniowego $y^1(k) = \Psi x^1(k) + s_1$ i $y^2(k) = x_i^2(k)$ uzyskuje się równoważny system postaci:

$$\begin{cases} y^1(k+1) = \Psi A^1 \Psi^- y^1 - \Psi A^1 \Psi^- s_1 + s_2 \\ y^2(k+1) = A_i^2 y^2(k) + W_i^2 f(y^1(k)) \end{cases} \quad (19)$$

gdzie Ψ^- jest macierzą pseudo-odwrotną macierzy Ψ (w sensie Moore-Penrose'a) i $s_2 = W^1 u(k)$ jest sygnałem o stałej wartości lub wartością progową. Niech $y^* = [y^{1*} \ y^{2*}]^T$ będzie punktem równowagi systemu (19) ($y^* = f(y^*)$). Wprowadzając równoważną transformację postaci $z(k) = y(k) - y^*(k)$, system (19) można przekształcić do postaci:

$$\begin{cases} z^1(k+1) = \Psi A^1 \Psi^- z^1(k) \\ z^2(k+1) = A_i^2 z^2(k) + W_i^2 \sigma(z^1(k)) \end{cases} \quad (20)$$

gdzie $\sigma(z(k)) = f(z(k) + y^*(k)) - f(y^*(k))$. Podstawiając $z(k) = [z^1(k) \ z^2(k)]^T$ ostatecznie otrzymujemy

$$z(k+1) = A_i z(k) + W_i \sigma(z(k)) \quad (21)$$

gdzie

$$A_i = \begin{bmatrix} \Psi A^1 \Psi^- & 0 \\ 0 & A_i^2 \end{bmatrix} \quad W_i = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ W_i^2 & 0 \end{bmatrix} \quad (22)$$

Do wyprowadzenia warunków stabilności dla systemu (21) zostanie wykorzystana druga metoda Lapunowa.

Twierdzenie 2. [Druga metoda Lapunowa][5] Niech $x = 0$ będzie punktem równowagi systemu

$$x(k+1) = f(x(k)) \quad (23)$$

i $V : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ będzie ciągłą i różniczkowalną funkcją o właściwościach:

1. $V(x(k) = 0) = 0$
2. $V(x(k)) > 0$, dla $x \neq 0$
3. $V(x) \rightarrow \infty$ dla $\|x\| \rightarrow \infty$
4. $\Delta V(x(k)) = V(x(k+1)) - V(x(k)) \leq 0$ dla $x \neq 0$

wtedy punkt równowagi $x = 0$ jest asymptotycznie stabilny, a funkcję $V(x)$ nazywa się funkcją Lapunowa.

Niech $V(z) = \|z\|$ będzie funkcją Lapunowa dla systemu (21). Ta funkcja spełnia warunki 1-3 twierdzenia 1. Zgodnie z warunkiem 4 tegoż twierdzenia otrzymujemy:

$$\begin{aligned} \Delta V(z(k)) &= \|z(k+1)\| - \|z(k)\| = \\ &= \|\mathcal{A}_i z(k) + \mathcal{W}_i \sigma(z(k))\| - \|z(k)\| \leq \\ &\leq \|\mathcal{A}_i z(k)\| + \|\mathcal{W}_i \sigma(z(k))\| - \|z(k)\| \end{aligned} \quad (24)$$

Wykorzystując własność funkcji aktywacji postaci $\|\sigma(z(k))\| \leq \|z(k)\|$ [5], (24) można wyrazić następująco:

$$\begin{aligned} \Delta V(z(k)) &\leq \|\mathcal{A}_i\| \|z(k)\| + \|\mathcal{W}_i\| \|z(k)\| - \|z(k)\| \\ &\leq (\|\mathcal{A}_i\| + \|\mathcal{W}_i\| - 1) \|z(k)\| \end{aligned} \quad (25)$$

Analizując (25) można zauważyć, że jeżeli

$$\|\mathcal{A}_i\| + \|\mathcal{W}_i\| < 1 \quad (26)$$

wtedy $\Delta V(z(k))$ jest funkcją dodatnio określoną i system (21) jest globalnie asymptotycznie stabilny. Ten wynik można rozszerzyć na całą sieć neuronową. Biorąc pod uwagę fakt, że zmienne stanu i -tego neuronu warstwy ukrytej są niezależne od zmiennych stanu innych neuronów tej samej warstwy można stwierdzić, że prawdziwe jest poniższe twierdzenie.

Twierdzenie 3. Jeśli warunki

$$\|\mathcal{A}_i\| + \|\mathcal{W}_i\| < 1 \text{ dla } i = 1, \dots, v_2 \quad (27)$$

są spełnione, gdzie \mathcal{A}_i i \mathcal{W}_i są dane przez (22), to system (8) jest globalnie asymptotycznie stabilny.

4. PODSUMOWANIE

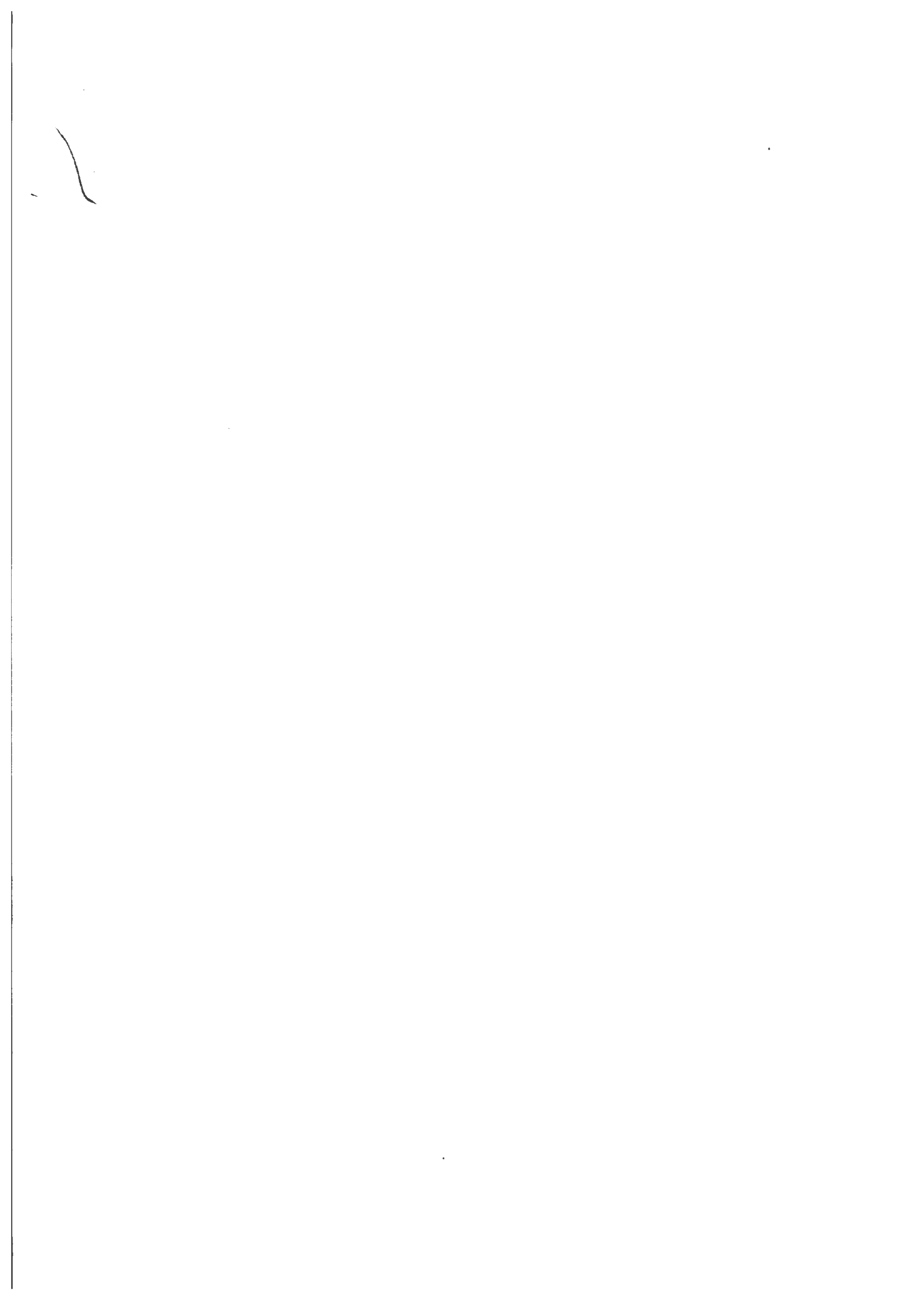
W przypadku sieci z jedną warstwą ukrytą jej stabilność uzyskuje się poprzez utrzymywanie biegunów filtrów NOI wewnątrz koła jednostkowego. W przypadku sieci z dwoma warstwami ukrytymi, na podstawie twierdzenia Lapunowa, uzyskuje się warunki wykorzystujące normę macierzy parametrów sieci. Tak wyprowadzone warunki stabilności mogą posłużyć do wyprowadzenia obszarów dopuszczalnych parametrów sieci i w konsekwencji do zdefiniowania uczenia jako problemu optymalizacji z ograniczeniami. Ten wątek będzie przedmiotem dalszych badań.

STABILITY CONDITIONS FOR DYNAMIC NEURAL NETWORKS

Abstract: The paper deals with the a discrete-time recurrent neural network designed with dynamic neural models. Dynamics is reproduced within each single neuron, hence the considered network is a locally recurrent globally feed-forward. For networks with a single hidden layer, the stability conditions are derived using classical methods for linear systems. For networks with two hidden layers, conditions for global stability are derived using the Lyapunov second method.

Literatura

- [1] Ayoubi, M. (1994) Fault diagnosis with dynamic neural structure and application to a turbo-charger. Proc. Int. Symp. Fault Detection Supervision and Safety for Technical Processes, SAFE-PROCESS'94, Espoo, Finland, 2, 618–623.
- [2] Fang, Y., Kincaid, T.G. (1996) Stability analysis of dynamical neural networks. IEEE Trans. Neural Networks, 7, 996–1006.
- [3] Feng, C., Plamondon, R. (2001) On the stability analysis of delayed neural networks system. Neural Networks, 14, 1181–1188.
- [4] Gori, M., Bengio, Y., Mori, R.D. (1989) BPS: A learning algorithm for capturing the dynamic nature of speech. Proc Int. Joint Conference on Neural Networks, IJCNN 1989, II, 417–423.
- [5] Gupta, M.M., Jin, L., Homma, N. (2003) Static and Dynamic Neural Networks. From Fundamentals to Advanced Theory. John Wiley & Sons, New Jersey.
- [6] , R. A. Horn, C. R. Johnson (1985) Matrix analysis. Cambridge Univ. Press, Cambridge.
- [7] O. Nelles (2001) Nonlinear System Identification. From Classical Approaches to Neural Networks and Fuzzy Models. Springer-Verlag, Berlin.
- [8] Patan, K. (2004) Training of the dynamic neural networks via constrained optimization. Proc. IEEE Int. Joint Conference on Neural Networks, IJCNN 2004, Budapest, Hungary, CD-ROM.
- [9] Patan, K., Parisini, T. (2005) Identification of neural dynamic models for fault detection and isolation: the case of a real sugar evaporation process. Journal of Process Control, 15, 67–79.
- [10] Tsoi, A.C., Back, A.D. (1994) Locally recurrent globally feedforward networks: A critical review of architectures. IEEE Trans. Neural Networks, 5, 229–239.
- [11] J. M. Zamarreno, P. Vega (1998) State space neural network. properties and application. Neural Networks, 11, 1099–1112.





**Instytut Badań Systemowych
Polskiej Akademii Nauk**

ISBN 83-89475-00-6