MATEMATYKA 1

DR KATARZYNA SZULC

WIT Wyższa Szkoła Informatyki Stosowanej i Zarządzania
pod auspicjami Polskiej Akademii Nauk
Rok akademicki 2023/2024

Spis treści

Wykład :	Poniedziałek	gr. 1+2	godz. 14:15–15:45	Teams
Ćwiczenia :	Wtorek	gr. 2	godz. 12:15–13:45	sala 113
		gr. 1	godz. 14:15–15:45	sala 113
Zajęcia dodatkowe :	Czwartek	gr. 2	godz. 10:15–11:45	sala 405
		gr. 1	godz. 12:15–13:45	sala 405

Regulamin zajęć

1. Obecność:
   - Obecność na wykładzie jest zalecana.
   - Obecność na ćwiczeniach jest obowiązkowa.
   - Obecność na zajęciach dodatkowych jest punktowana.
2. W trakcie semestru przewidziane są dwa kolokwia jako zaliczenie ćwiczeń (na zajęciach 7. i 14.) i jeden egzamin końcowy (w sesji). Aby móc przystąpić do egzaminu należy zaliczyć ćwiczenia.
3. Ocena końcowa:
   - Na ocenę końcową z ćwiczeń składają się ocena z kolokwiów oraz aktywność na zajęciach.
   - Na ocenę końcową z całego przedmiotu składają się ocena końcowa z ćwiczeń oraz ocena z egzaminu.
4. Punktacja:
   - Maksimum punktacji wyznacza student, który zdobył najlepszy wynik z danego sprawdzianu/kolokwium/egzaminu.
   - Aby zaliczyć sprawdzian/kolokwium/egzamin należy zdobyć minimum 50% maksymalnego wyniku.
5. W trakcie semestru (głównie na ćwiczeniach) punkty przyznawane są w następujący sposób:
   - Kolokwium Pierwsze (zajęcia 7.) - około 25 punktów, Kolokwium Drugie (zajęcia 14.) - około 25 punktów.
   - Aktywność na ćwiczeniach polega na prezentowaniu własnych rozwiązań wyznaczonych zadań przy tablicy - "kropka" (=1/5 punkta) za rozwiązanie, w przypadku trudniejszych zadań punktacja może wzrosnąć; w semestrze można zdobyć nawet około 20 punktów.
6. Do egzaminu dopuszczone są osoby, które mają zaliczone ćwiczenia.
   - **W przypadku zaliczenia ćwiczeń na 85% maksymalnej ilości punktów, student jest zwolniony z egzaminu.**
   - **ALE** z egzaminu mogą być zwolnione tylko te osoby, które, oprócz uzyskania wysokiej punktacji, zaliczyły obydwa kolokwia w pierwszym terminie. Poprawka z któregokolwiek kolokwium, nawet jeżeli napisana jest na maksymalną ilość punktów, wyklucza zwolnienie z egzaminu.
7. Zajęcia dodatkowe mają na celu uzupełnienie materiału i wyrównanie poziomu.
   - Obecność na tych zajęciach daje "kropkę" (=1/5 punkta)
   - Aktywność na tych zajęciach punktowana jest tak samo jak aktywność na ćwiczeniach.

   W semestrze można zdobyć nawet około 15 dodatkowych punktów.
8. Przewidziane są terminy poprawkowe dla studentów, którym nie udało się zaliczyć przedmiotu w pierwszym terminie. Jeden termin poprawkowy aby zaliczyć ćwiczenia, jeden termin poprawkowy aby zaliczyć egzamin. Poprawiać można tylko te kolokwia lub/i egzaminy, które są **niezaliczone**.
9. Materiały do zajęć znajdują się na mojej stronie internetowej:
   `http://www.ibspan.waw.pl/~szulck/` w zakładce Nauczanie lub w systemie UBI.
10. Szczegółowy wykaz zagadnień: Tabela 1.
11. Szczegółowy kalendarz zajęć: Tabela 2.

Data	Nr zajęć	Tematyka	Sala
2-3/10/2023	W+Ćw 1	Podstawy logiki matematycznej	Teams+N113
9-10/10/2023	W+Ćw 2	Podstawy algebry zbiorów	Teams+N113
16-17/10/2023	W+Ćw 3	Ciągi liczbowe nieskończone	Teams+N113
23-24/10/2023	W+Ćw 4	Szeregi liczbowe	Teams+N113
30-31/10/2023	W+Ćw 5	Liczby zespolone	Teams+N113
6-7/11/2023	W+Ćw 6	Liczby zespolone c.d.	Teams+N113
13/11/2023	Wykład 7	Powtórzenie materiału	Teams
14/11/2023	Ćwiczenia 7	Kolokwium	N113
20-21/11/2023	W+Ćw 8	Funkcje zmiennej rzeczywistej	Teams+N113
27-28/11/2023	W+Ćw 9	Granica i ciągłość funkcji	Teams+N113
4-5/12/2023	W+Ćw 10	Pochodna funkcji	Teams+N113
11-12/12/2023	W+Ćw 11	Pochodne wyższych rzędów	Teams+N113
8-9/01/2024	W+Ćw 12	Badanie przebiegu zmienności funkcji	Teams+N113
15-16/01/2024	W+Ćw 13	Rachunek całkowy	Teams+N113
22/01/2024	Wykład 14	Powtórzenie materiału	Teams
23/01/2024	Ćwiczenia 14	Kolokwium	N113
29-30/01/2024	W+Ćw 15	Zastosowanie całki oznaczonej	Teams+N113
5/02/2024	E	Egzamin	
12/02/2024	E	Egzamin poprawkowy	

Lp.	**Tematyka**	**Liczba godzin**
1.	Organizacja zajęć. Podstawowe pojęcia logiki matematycznej - rachunek zdań, tautologie, kwantyfikatory	W+Ćw=2+2
2.	Zbiory liczbowe, podstawy algebry zbiorów, prawa de Morgana, zastosowania	W+Ćw=2+2
3.	Ciągi liczbowe nieskończone - definicja i podstawowe własności ciągów, ograniczoność, monotoniczność, zbieżność i granica ciągu, liczba e.	W+Ćw=2+2
4.	Szeregi liczbowe - szereg nieskończony i jego suma, warunek konieczny zbieżności szeregu, kryteria zbieżności szeregów o wyrazach nieujemnych: kryterium porównawcze, d'Alemberta, Cauchy-ego, kryteria zbieżności szeregów o dowolnych wyrazach: kryterium Leibnitza, zbieżność warunkowa i bezwzględna	W+Ćw=2+2
5.	Liczby zespolone I - definicja i podstawowe własności, postać algebraiczna, moduł i argument liczby zespolonej, postać trygonometryczna.	W+Ćw=2+2
6.	Liczby zespolone II - równania w zbiorze liczb zespolonych, zbiory liczb zespolonych, interpretacja geometryczna zbiorów zadanych przez funkcje o wyrazach zespolonych.	W+Ćw=2+2
7.	Powtórzenie materiału, Kolokwium 1	W+Ćw=2+2
8.	Funkcje zmiennej rzeczywistej - definicja i przykłady elementarnych funkcji, dziedzina, przeciwdziedzina i własności funkcji: ograniczoność, monotoniczność, parzystość, nieparzystość, funkcje trygonometryczne, funkcja odwrotna.	W+Ćw=2+2
9.	Granica i ciągłość funkcji - definicja granicy, sąsiedztwo punktu, definicja Cauchy'ego, granice jednostronne, własności funkcji ciągłych, punkty nieciągłości i ich klasyfikacja	W+Ćw=2+2
10.	Pochodna funkcji - definicja, interpretacja geometryczna, różniczkowalność, pochodne funkcji elementarnych, zastosowania pochodnej - znak pochodnej a monotoniczność funkcji, zastosowania pochodnej do badania ekstremów funkcji.	W+Ćw=2+2
11.	Pochodne funkcji wyższych rzędów, Reguła de l'Hospitala, punkty przegięcia, asymptoty wykresu funkcji, funkcje wypukłe.	W+Ćw=2+2
12.	Badanie przebiegu zmienności funkcji	W+Ćw=2+2
13.	Rachunek całkowy - całka nieoznaczona, podstawowe wzory i reguły całkowania, całkowanie przez podstawienie i przez części	W+Ćw=2+2
14.	Powtórzenie materiału, Kolokwium 2	W+Ćw=2+2
15.	Zastosowanie całki oznaczonej - definicja oraz całkowanie funkcji ciągłej na przedziale domkniętym, obliczanie pola pod wykresem funkcji nieujemnej	W+Ćw=2+2

1. Podstawowy logiki matematycznej

1.1. **Rachunek zdań.** Logika (formalna) zajmuje się między innnymi związkami pomiędzy zdaniami.

Definicja 1.1. Zdaniem (tzw. sensownym) nazywamy każdą wypowiedź sformułowaną w trybie orzekającym, o której można jednoznacznie powiedzieć, że jest prawdziwa lub fałszywa.

Przykład 1.1. Przykłady zdań:

(i) Tydzień ma 7 dni. – jest to zdanie prawdziwe;
(ii) Suma kątów w trójkącie wynosi $180°$. – jest to zdanie prawdziwe;
(iii) Zbiór liczb naturalnych jest ograniczony. – to zdanie jest nieprawdziwe.

Definicja 1.2. Zmienna zdaniowa jest to bezargumentowy symbol w rachunku zdań, np.: p, q, r, itp.

Definicja 1.3. Wartościowaniem nazywamy funkcję, która każdej zmiennej zdaniowej przyporządkowuje wartość logiczną 1 (prawda) lub 0 (fałsz).

Przykład 1.2. Wypowiedź, której przypisujemy wartość logiczną musi być zdaniem w sensie logiki formalnej (sensownym), tzn. musi spełniać podstawowy warunek, o którym mowa wyżej. W szczególności, wypowiedź:

Zima jest najprzyjemniejszą porą roku.

nie jest zdaniem z tego punktu widzenia.

Definicja 1.4. Funktory logiczne

Funktor jednoargumentowy

$\sim$ – negacja (zaprzeczenie).

p	$\sim p$
0	1
1	0

Tabela 1. Tabela zerojedynkowa dla negacji

Funktory dwuargumentowe

$\vee$ – alternatywa,
$\wedge$ – koniunkcja,
$\Rightarrow$ – implikacja,
$\Leftrightarrow$ – równoważność,

Priorytety funktorów. W przypadku, gdy w zdaniu logicznym pominięto nawiasy, należy przyjąć następujące priorytety (siłę wiązania) spójników logicznych:

1. negacja
2. koniunkcja, alternatywa (równosilne)
3. implikacja, równoważność (równosilne)

p	q	$p \vee q$	$p \wedge q$	$p \Rightarrow q$	$p \Leftrightarrow q$
0	0	0	0	1	1
0	1	1	0	1	0
1	0	1	0	0	0
1	1	1	1	1	1

Tabela 2. Tabela zerojedynkowa dla funktorów dwuargumentowych

1.2. **Tautologie.**

Definicja 1.5. Tautologia jest to formuła, która przy dowolnym warościowaniu przybiera warość logiczną 1, to znaczy jest zawsze prawdziwa.

Podstawowe prawa rachunku zdań:
Prawa de Morgana:

$$\sim (p \vee q) \Leftrightarrow (\sim p \wedge \sim q) \tag{1}$$

$$\sim (p \wedge q) \Leftrightarrow (\sim p \vee \sim q) \tag{2}$$

Prawa przemienności alternatywy i koniunkcji:

$$(p \vee q) \Leftrightarrow (q \vee p) \tag{3}$$

$$(p \wedge q) \Leftrightarrow (q \wedge p) \tag{4}$$

Prawa łączności alternatywy i koniunkcji:

$$(p \vee q) \vee r \Leftrightarrow p \vee (q \vee r) \tag{5}$$

$$(p \wedge q) \wedge r \Leftrightarrow p \wedge (q \wedge r) \tag{6}$$

Prawo rozdzielności koniunkcji względem alternatywy:

$$p \wedge (q \vee r) \Leftrightarrow (p \wedge q) \vee (p \wedge r) \tag{7}$$

Prawo rozdzielności alternatywy względem koniunkcji:

$$p \vee (q \wedge r) \Leftrightarrow (p \vee q) \wedge (p \vee r) \tag{8}$$

Przykład 1.3. Wykażemy, że Prawo de Morgana (1): $\sim (p \vee q) \Leftrightarrow (\sim p \wedge \sim q)$ jest tautologią. Mamy

p	q	$p \vee q$	$\sim (p \vee q)$	$\sim p$	$\sim q$	$\sim p \wedge \sim q$	$\sim (p \vee q) \Leftrightarrow (\sim p \wedge \sim q)$
0	0	0	1	1	1	1	1
0	1	1	0	1	0	0	1
1	0	1	0	0	1	0	1
1	1	1	0	0	0	0	1

Tabela 3. Uzasadnienie Prawa de Morgana metodą zero-jedynkową.

Odp.: Przy dowolnym wartościowaniu zdań logicznych p i q, Prawo de Morgana jest tautologią.

1.3. **Kwantyfikatory.**

Definicja 1.6. **Funkcją zdaniową** nazywamy wyrażenie $\varphi(x)$, które staje się zdaniem po podstawieniu argumentu x z pewnego zbioru.

Przykład 1.4. Poniższa nierówność nie jest zdaniem (sensownym), ponieważ może być prawdziwa lub fałszywa, w zależności od wyboru x:

$$\varphi(x) = x^2 + 2x - 3 > 0$$

Definicja 1.7. Określamy następujące kwantyfikatory:

Kwantyfikator ogólny: $\bigwedge$ – dla każdego ($\forall$ – *ang.: for all*).
Kwantyfikator szczegółowy: $\bigvee$ – istnieje ($\exists$ – *ang.: exists*).

Przykład 1.5. Aby uwzględnić wybór x z poprzedniego przykładu stosuje się kwantyfikatory. Mamy wówczas następujące zdania (sensowne):

$$\bigvee_x (x^2 + 2x - 3 > 0) \quad \text{istnieje x takie, że ... – jest to zdanie prawdziwe}$$

$$\bigwedge_x (x^2 + 2x - 3 > 0) \quad \text{dla każdego x zachodzi ... – jest to zdanie fałszywe}$$

Prawa de Morgana dla kwantyfikatorów

(9) $$\sim \bigvee_x \varphi(x) \Leftrightarrow \bigwedge_x \sim \varphi(x)$$

(10) $$\sim \bigwedge_x \varphi(x) \Leftrightarrow \bigvee_x \sim \varphi(x)$$

Kwantyfikatory o ograniczonym zasięgu

(11) $$\bigvee_{\psi(x)} \varphi(x) \Leftrightarrow \bigvee_x \psi(x) \wedge \varphi(x)$$

(12) $$\bigwedge_{\psi(x)} \varphi(x) \Leftrightarrow \bigwedge_x \psi(x) \Rightarrow \varphi(x)$$

Prawa de Morgana dla kwantyfikatorów o ograniczonym zasięgu

(13) $$\sim \bigvee_{\psi(x)} \varphi(x) \Leftrightarrow \bigwedge_{\psi(x)} \sim \varphi(x)$$

(14) $$\sim \bigwedge_{\psi(x)} \varphi(x) \Leftrightarrow \bigvee_{\psi(x)} \sim \varphi(x)$$

Przykład 1.6. Zastosujemy prawa de Morgana (9) dla kwantyfikatorów:

$$\sim \bigvee_x (x^2 + x + 1 = 0) \Leftrightarrow \bigwedge_x \sim (x^2 + x + 1 = 0) \Leftrightarrow \bigwedge_x (x^2 + x + 1 \neq 0)$$

1.4. **Zadania.**

Zadanie 1.1. Wykazać, że następujące zdania są tautologiami:

1. $p \Rightarrow p$.
2. $p \Rightarrow (q \Rightarrow p)$.
3. $p \Rightarrow (q \Rightarrow p \wedge q)$.
4. $[p \Rightarrow (q \Rightarrow r)] \Rightarrow [(p \Rightarrow q) \Rightarrow (p \Rightarrow r)]$
5. $p \Leftrightarrow \sim\sim p$ – prawo podwójnego przeczenia.
6. $p \vee \sim p$ – prawo podwójnego przeczenia.
7. $\sim (p \wedge \sim p)$ – prawo sprzeczności.
8. $\sim (p \wedge q) \Leftrightarrow (\sim p \vee \sim q)$ – prawo de Morgana.
9. $\sim (p \vee q) \Leftrightarrow (\sim p \wedge \sim q)$ – prawo de Morgana.
10. $(p \Rightarrow q) \Leftrightarrow (\sim q \Rightarrow \sim p)$ – prawo transpozycji.
11. $[(p \Rightarrow q) \Rightarrow p] \Rightarrow p$ – prawo Pierce'a.
12. $(p \Rightarrow q) \Leftrightarrow (\sim p \vee q)$.
13. $(\sim p \Rightarrow p) \Rightarrow p$ – prawo Claviusa.
14. $\sim p \Rightarrow (p \Rightarrow q)$ – prawo Dunsa-Scotusa.
15. $(p \wedge q) \Rightarrow p$.
16. $p \Rightarrow (p \vee q)$.
17. $(p \wedge q \Rightarrow r) \Leftrightarrow [p \Rightarrow (q \Rightarrow r)]$.
18. $[p \vee (q \vee r)] \Leftrightarrow [(p \vee q) \vee r]$.
19. $[p \wedge (q \wedge r)] \Leftrightarrow [(p \wedge q) \wedge r]$.
20. $[p \wedge (q \vee r)] \Leftrightarrow [(p \wedge q) \vee (p \wedge r)]$.
21. $[p \vee (q \wedge r)] \Leftrightarrow [(p \vee q) \wedge (p \vee r)]$.
22. $[(p \Rightarrow q) \wedge \sim q] \Rightarrow \sim p$.
23. $[(p \Rightarrow q) \wedge p] \Rightarrow q$.

Zadanie 1.2. Sprawdzić czy następujące wyrażenia są tautologiami:

1. $[(p \vee q) \wedge \sim p] \Rightarrow q$.
2. $(p \Rightarrow q) \Rightarrow [(p \wedge r) \Rightarrow q]$.
3. $(p \Rightarrow q) \Rightarrow [p \Rightarrow (q \vee r)]$. Odp. Tak.
4. $p \Rightarrow [(\sim p) \vee q]$.
5. $[(p \vee q) \wedge (p \Rightarrow q)] \Rightarrow (q \Rightarrow p)$.
6. $p \vee [(\sim p \wedge q) \vee (\sim p \wedge \sim q)]$. Odp. Tak.
7. $\sim [p \wedge (\sim p \wedge q)]$.
8. $p \Rightarrow [(\sim q \wedge q) \Rightarrow r]$.
9. $[(p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow p)] \Rightarrow (p \vee q)$.
10. $[(p \vee q) \Rightarrow (p \vee \sim q)] \Rightarrow (\sim p \vee q)$. Odp. Nie
11. $[(p \wedge q) \vee (p \Rightarrow q)] \Rightarrow (p \Rightarrow q)$.
12. $[(p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow r)] \Rightarrow (p \Rightarrow r)$. Odp. Tak
13. $[(p \Rightarrow q) \wedge (r \Rightarrow s)] \Rightarrow (p \vee r \Rightarrow q \vee s)$. Odp. Tak
14. $(p \wedge q \Rightarrow r) \Rightarrow [(p \Rightarrow r) \wedge (q \Rightarrow r)]$.
15. $[(p \Rightarrow q) \wedge (r \Rightarrow s)] \Rightarrow [(p \wedge r) \Rightarrow (q \wedge s)]$.
16. $\{[(p \wedge q) \Rightarrow r] \wedge (p \vee q \Rightarrow \sim r)\} \Rightarrow (p \wedge q \wedge r)$. Odp. Nie.

17. $[p \Rightarrow (q \Rightarrow r)] \Leftrightarrow [q \Rightarrow (p \Rightarrow r)]$.

18. $(p \vee q \vee r) \Rightarrow \{\sim p \sim [(q \vee r) \wedge \sim p]\}$.

19. $[\sim (p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow p)] \Rightarrow (p \wedge \sim q)$.

20. $[(p \Rightarrow q) \wedge (r \Rightarrow s)] \Rightarrow [(p \wedge s) \Rightarrow (q \vee r)]$. Odp. Tak

Zadanie 1.3. Przekształcić, wprowadzając kwantyfikator o ograniczonym zasięgu

1. $\bigwedge_{x} [(x \leqslant 0) \Rightarrow (x < 1)]$.

2. $\bigvee_{x} \sim [(x \neq 0) \Rightarrow (x^2 - x = 0)]$.

3. $\bigwedge_{x} \sim [(x > 0) \wedge (x^2 + x = 0)]$. Odp. $\bigwedge_{x>0} x^2 + x \neq 0$.

4. $\bigwedge_{x} [(2 \leqslant x \leqslant 3) \Rightarrow (x^2 - 5x + 6 \leqslant 0)]$. Odp. $\bigwedge_{2 \leqslant x \leqslant 3} (x^2 - 5x + 6) \leqslant 0$.

2. Zbiory liczbowe

2.1. **Podstawy algebry zbiorów.** Pojęcie **zbiór** jest uważane za pojęcie pierwotne i nie jest definiowane w literaturze. Zbiory liczbowe oznaczamy dużymi literami, np.: A, B, $\mathbb{R}$, Ω, itd. Jeśli a jest elementem zbioru A, to piszemy $a \in A$, czytamy "a należy do A". Jeśli a nie jest elementem zbioru A, to piszemy $a \notin A$, czytamy "a nie należy do A".

Dwa zbiory, które mają te same elementy, uważamy za identyczne:

$$A = B \quad \Leftrightarrow \quad \forall x \quad (x \in A \Leftrightarrow x \in B). \tag{15}$$

Elementy zbioru można określić poprzez ich bezpośrednie wyliczenie:

$$\{a, b, c, d\}$$

Zbiór można też zdefiniować przez podanie warunku, jaki spełniają jego elementy:

$$(x \in A \Leftrightarrow \Phi(x)) \quad \Leftrightarrow \quad A = \{x : \Phi(x)\} \tag{16}$$

Podstawowe relacje zbiorów:

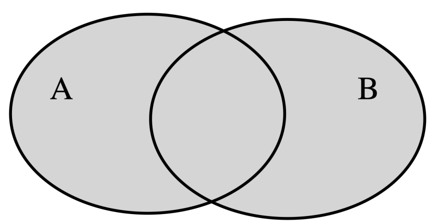
1. $\subset$ – inkluzja:

$$A \subset B \Leftrightarrow \ \forall x \ (x \in A \Rightarrow x \in B)$$

Własności inkluzji:
   (i) $A \subset A$,
   (ii) $A \subset B \ \wedge \ B \subset C \ \Rightarrow \ A \subset C$,
   (iii) $A \subset B \ \wedge \ B \subset A \ \Rightarrow \ A = B$.

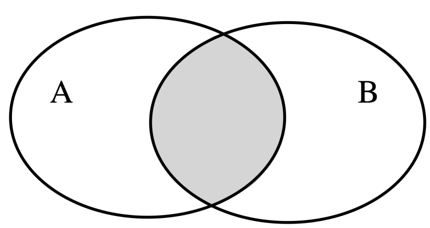
2. $\cup$ – suma zbiorów:

$$x \in A \cup B \Leftrightarrow \ \forall x \ (x \in A \vee x \in B)$$

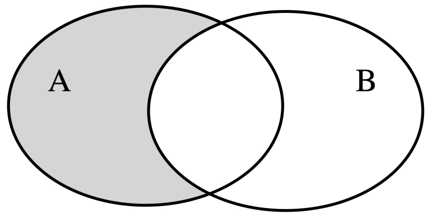


3. $\cap$ – iloczyn zbiorów:

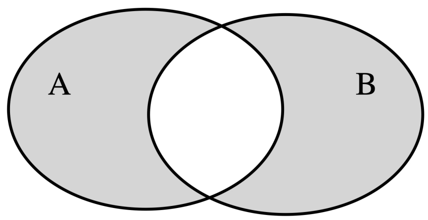
$$x \in A \cap B \Leftrightarrow \ \forall x \ (x \in A \wedge x \in B)$$



4. $\setminus$ – różnica zbiorów:
$$x \in A \setminus B \Leftrightarrow \ \forall x \ (x \in A \wedge x \notin B)$$



5. $\div$ – różnica symetryczna zbiorów:
$$A \div B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$$



6. $\times$ – iloczyn kartezjański:
$$A \times B = \{(a, b) : a \in A \wedge b \in B\}$$

Definicja 2.1. **Dopełnieniem zbioru** A w przestrzeni X nazywamy zbiór $A' = X \setminus A$.

Definicja 2.2. Zbiór nie posiadający żadnego elementu nazywamy **zbiorem pustym** i oznaczamy symbolem $\emptyset$.

Twierdzenie 2.1. Prawa rachunku zbiorów
a) $A \cup B = B \cup A$ – *przemienność sumy,*
b) $A \cap B = B \cap A$ – *przemienność iloczynu,*
c) $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$ – *łączność sumy,*
d) $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$ – *łączność iloczynu,*
e) $(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C)$ – *rozdzielność sumy względem iloczynu,*
f) $(A \cap B) \cup C = (A \cup C) \cap (B \cup C)$ – *rozdzielność iloczynu względem sumy.*

2.2. **Zbiory liczbowe.**

Przykład 2.1. Przyjmujemy następujące oznaczenia dla zbiorów liczbowych:
$\mathbb{N}$ – zbiór liczb naturalnych: $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$,
$\mathbb{Z}$ – zbiór liczb całkowitych: $\mathbb{Z} = \{\dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots\}$,
$\mathbb{Q}$ – zbiór liczb wymiernych: $\mathbb{Q} = \{\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{1}{100}, \dots\}$,
$\mathbb{R}$ – zbiór liczb rzeczywistych: $\mathbb{R} = \mathbb{Q} \cup (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}) = \mathbb{Q} \cup \mathbb{Q}'$,

$\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ – zbiór liczb niewymiernych: $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} = \{\pi, e, \sqrt{2}, \dots\}$
$\mathbb{C}$ – zbiór liczb zespolonych: $\mathbb{C} = \{\dots, i, 1+i, \sqrt{2}i, \pi + \sqrt{3}i, \dots\}$
Wówczas zapis $\{x \in \mathbb{N} : 3 < x < 10\}$ oznacza liczby 4,5,6,7,8,9.

Uwaga 2.1. Zachodzą następujące zależności

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R} \subset \mathbb{C}$$

$$\mathbb{Q} \cup \mathbb{Q}' = \mathbb{R}, \qquad \mathbb{Q} \cap \mathbb{Q}' = \emptyset$$

W dalszej części tego rozdziału ograniczymy się do zbioru liczb rzeczywistych $\mathbb{R}$. Zbiór liczb zespolonych $\mathbb{C}$ omówimy dokladnie w rozdziałach 5 i 6.

W zbiorze liczb rzeczywistych $\mathbb{R}$ określamy dwa działania: *dodawania*, (oznaczone symbolem "+") i *mnożenia* (oznaczone symbolem "$\cdot$") oraz *porządek* (oznaczany symbolami "$<$", "$=$", "$>$")

Twierdzenie 2.2. Aksjomaty liczb rzeczywistych. *Dodawanie i mnożenie liczb rzeczywistych mają następujące własności:*

1) Dodawanie jest przemienne, tj. dla dowolnych liczb $x, y \in \mathbb{R}$ zachodzi

$$x + y = y + x.$$

2) Dodawanie jest łączne, tj. dla dowolnych liczb $x, y, z \in \mathbb{R}$ zachodzi

$$(x + y) + z = x + (y + z).$$

3) Liczba 0 jest elementem neutralnym dodawania, tj. dla dowolnej liczby rzeczywistej x zachodzi

$$x + 0 = 0 + x = x.$$

4) Dla dowolnej liczby rzeczywistej x liczba $-x$ jest przeciwna do liczby x, tj.

$$x + (-x) = 0.$$

5) Mnożenie jest przemienne, tj. dla dowolnych liczb $x, y \in \mathbb{R}$ zachodzi

$$x \cdot y = y \cdot x.$$

6) Mnożenie jest łączne, tj. dla dowolnych liczb $x, y, z \in \mathbb{R}$ zachodzi

$$(x \cdot y) \cdot z = x \cdot (y \cdot z).$$

7) Liczba 1 jest elementem neutralnym mnożenia, tj. dla dowolnej liczby rzeczywistej x zachodzi

$$x \cdot 1 = 1 \cdot x = x.$$

8) Dla dowolnej, różnej od 0, liczby rzeczywistej x liczba x^{-1} jest odwrotnością liczby x, tj.

$$x \cdot x^{-1} = 1$$

9) Mnożenie jest rozdzielne względem dodawania, tj. dla dowolnych liczb $x, y, z \in \mathbb{R}$ zachodzi

$$(x + y) \cdot z = x \cdot z + y \cdot z$$

Operacja porządku ma następujące własności

1) Prawo trichotomii, tj. dla dowolnych liczb rzeczywistych $x, y \in \mathbb{R}$ zachodzi dokładnie jedna z trzech możliwości:

$$x < y, \quad x = y, \quad x > y.$$

2) Przechodniość, tj. dla dowolnych liczb rzeczywistych $x, y, z \in \mathbb{R}$ zachodzi:

$$\textit{jeżeli} \quad x < y \quad \textit{i} \quad y < z \quad \textit{to} \quad x < z.$$

3) Związki nierówności z działaniami, tj. dla dowolnych liczb rzeczywistych $x, y, z \in \mathbb{R}$ zachodzi

$$\textit{jeżeli} \quad x < y \quad \textit{to} \quad x + z < y + z.$$

$$\textit{jeżeli} \quad x < y \quad \textit{i} \quad z > 0 \quad \textit{to} \quad x \cdot z < y \cdot z.$$

Wnioski z Twierdzienia 2.2. Z powyższych aksjomatów można wyprowadzić wszystkie reguły arytmetyki, definiując po drodze dwa pozostałe działania: odejmowanie i dzielenie (przez liczbę różną od zera). Wśród tych reguł są m.in. następujące:

(i) Elementy przeciwne i odwrotne są określone jednoznacznie. Ponadto, $-(-x) = x$ dla każdego $x \in \mathbb{R}$, a $(x^{-1})^{-1} = x$ dla każdego $x \in \mathbb{R}$, $x \neq 0$.
(ii) Dla dowolnych $a, b \in \mathbb{R}$ istnieje dokładnie jeden element $x \in \mathbb{R}$ taki, że $a + x = b$.
(iii) Jeżeli $xy = x$ i $x \neq 0$, to $y = 1$.
(iv) Dla wszystkich $x, y \in \mathbb{R}$ z równości $xy = 0$ wynika, że $x = 0$ lub $y = 0$.
(v) Dla każdego $x \in \mathbb{R}$ mamy $x \cdot 0 = 0$.
(vi) Dla dowolnych $a, b \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$, istnieje dokładnie jeden element $x \in \mathbb{R}$ taki, że $ax = b$. Tym elementem jest $x = \frac{b}{a}$.
(vii) Dla wszystkich liczb rzeczywistych a, b zachodzą równości $(-a) \cdot b = a \cdot (-b) = -ab$.
(viii) Dla każdego $x \in \mathbb{R}$ mamy $x^2 \geqslant 0$; przy czym $x^2 = 0$ wtedy i tylko wtedy, gdy $x = 0$. W szczególności, $1 = 1 \cdot 1 = 1^2 > 0$

Definicja 2.3. Zbiór $\{x \in \mathbb{R} : a < x < b\}$, gdzie a i b są dowolnymi liczbami rzeczywistymi takimi, że $a < b$, nazywamy **przedziałem otwartym** i oznaczamy symbolem

$$(a, b).$$

Zbiór $\{x \in \mathbb{R} : a \leqslant x \leqslant b\}$, gdzie a i b są dowolnymi liczbami rzeczywistymi takimi, że $a < b$, nazywamy **przedziałem domkniętym** i oznaczamy symbolem

$$\langle a, b \rangle \quad \text{lub} \quad [a, b]$$

Mamy oczywiście $(a, b) \subset \langle a, b \rangle$.

2.3. **Kres górny i kres dolny zbioru liczbowego.**

Definicja 2.4. Ograniczenie górne. Liczba $M \in \mathbb{R}$ jest ograniczeniem górnym zbioru $A \subset \mathbb{R}$ wtedy i tylko wtedy, gdy dla każdego $x \in A$ jest $x \leqslant M$. Mówimy, że zbiór $A \subset \mathbb{R}$ jest ograniczony z góry, gdy ma choć jedno ograniczenie górne.

Przykład 2.2. Przedział domknięty $[0, 1]$ jest ograniczony z góry. Jego ograniczeniami górnymi są m.in. liczby 1, 10, 2022 i 2022^{2022}.

Definicja 2.5. Kres górny. Liczba $M \in \mathbb{R}$ jest kresem górnym niepustego zbioru $A \subset \mathbb{R}$ wtedy i tylko wtedy, gdy spełnione są dwa warunki:

- M jest ograniczeniem górnym A,
- jeżeli M' jest ograniczeniem górnym A, to $M \leqslant M'$.

Kres górny zbioru oznaczamy symbolem "sup" (od łacińskiego *supremum*) i piszemy $M = \sup A$.

Uwaga 2.2. Definicję kresu górnego niepustego zbioru liczb rzeczywistych można sformułować na inne, równoważne sposoby:

(i) $M = \sup A$ wtedy i tylko wtedy, gdy M jest najmniejszym ograniczeniem górnym zbioru A;
(ii) $M = \sup A$ wtedy i tylko wtedy, gdy M jest ograniczeniem górnym zbioru A i dla każdego $\varepsilon > 0$ istnieje $x \in A$ taki, że $M - \varepsilon < x$.

Analogicznie definiuje się pojęcia ograniczenia dolnego i kresu dolnego.

Definicja 2.6. Ograniczenie dolne. Liczba $m \in \mathbb{R}$ jest ograniczeniem dolnym zbioru $A \subset \mathbb{R}$ wtedy i tylko wtedy, gdy dla każdego $x \in A$ jest $x \geqslant m$. Mówimy, że zbiór $A \subset \mathbb{R}$ jest ograniczony z dołu, gdy ma choć jedno ograniczenie dolne.

Przykład 2.3. Przedział domknięty $[0,1]$ jest ograniczony z dołu. Jego ograniczeniami dolnymi są m.in. liczby 0, -1, -100000.

Definicja 2.7. Kres dolny. Liczba $m \in \mathbb{R}$ jest kresem dolnym niepustego zbioru $A \subset \mathbb{R}$ wtedy i tylko wtedy, gdy spełnione są dwa warunki:

- m jest ograniczeniem dolnym A,
- jeżeli m' jest ograniczeniem dolnym A, to $m \geqslant m'$.

Kres dolny zbioru oznaczamy symbolem "inf" (od łacińskiego *infimum*) i piszemy $m = \inf A$.

Uwaga 2.3. Definicję kresu dolnego niepustego zbioru liczb rzeczywistych można sformułować na inne, równoważne sposoby:

(i) $m = \inf A$ wtedy i tylko wtedy, gdy m jest największym ograniczeniem dolnym zbioru A;
(ii) $m = \inf A$ wtedy i tylko wtedy, gdy m jest ograniczeniem dolnym zbioru A i dla każdego $\varepsilon > 0$ istnieje $x \in A$ taki, że $m + \varepsilon > x$.

2.4. **Wartość bezwzględna.**

Definicja 2.8. Wartością bezwzględną lub **modułem** liczby rzeczywistej $|x|$ nazywamy

$$|x| = \begin{cases} x & \text{gdy} \quad x \geqslant 0, \\ -x & \text{gdy} \quad x < 0. \end{cases} \tag{17}$$

Definicja 2.9. Nierówności modułowe:

$$|x| < a \quad \Leftrightarrow \quad x < a \ \wedge \ x > -a, \qquad |x| \leqslant a \quad \Leftrightarrow \quad x \leqslant a \ \wedge \ x \geqslant -a, \tag{18}$$

$$|x| > a \quad \Leftrightarrow \quad x > a \ \vee \ x < -a, \qquad |x| \geqslant a \quad \Leftrightarrow \quad x \geqslant a \ \vee \ x \leqslant -a. \tag{19}$$

2.5. **Zadania do samodzielnego rozwiązania.**

Zadanie 2.1. Udowodnić prawa rachunku zdań z Twierdzenia 2.1, punkty $c) - f)$.

Zadanie 2.2. Podać elementy następujących zbiorów:

1. $\{a, b, c\}$.
2. $\{\{a, b, c\}, c\}$.
3. $\{x \in \mathbb{N} : x \leqslant 2\}$.
4. $\{x \in \mathbb{R} : x^2 = 4\}$.
5. $\{x \in \mathbb{N} : |3 - x| < 3\}$.
6. $\{x \in \mathbb{R} : (x+1)^2 \leqslant 0\}$.

Zadanie 2.3. Zbadać jakie relacje inkluzji zachodzą między następującymi zbiorami A i B:

1. $A = \{a, b, c, d\}$, $B = \{a, c, d\}$.
2. $A = \{x \in \mathbb{N} : x^2 > 4\}$, $B = \{x \in \mathbb{N} : x > 2\}$.
3. $A = \{x \in \mathbb{R} : x^2 \leqslant 1\}$, $B = \{x \in \mathbb{R} : 2x^3 - 5x^2 + 4x = 1\}$.
4. $A = \{x \in \mathbb{R} : x^2 < 0\}$, $B = \{x \in \mathbb{R} : x^6 + 7x^5 - 3x = 0\}$.
5. $A = \{x \in \mathbb{R} : x^2 + x - 2 \leqslant 0\}$, $B = \{x \in \mathbb{R} : x^2 + x - 2 = 0\}$.
6. $A = \{x \in \mathbb{R} : x^2 - 5x + 4 = 0\}$, $B = \{x \in \mathbb{R} : x^2 - 5x + 4 \leqslant 0\}$.

Zadanie 2.4. Określić zbiór metodą analityczną i metodą graficzną

1. $A = \{x \in \mathbb{R} : \dfrac{(6-x)(x-4)}{x+7} \leqslant 0\}$.
2. $B = \{x \in \mathbb{R} : \dfrac{(x-2)(x-5)}{x+4} \leqslant 0\}$.
3. $C = \{x \in \mathbb{R} : \dfrac{(x+3)(x-5)^2(x-7)^3}{(x+6)^4} \geqslant 0\}$.

Zadanie 2.5. Zapisać następujące zbiory w najprostrzej postaci:

1. $A = \{x \in \mathbb{R} : |x-5| < 2\}$.
2. $B = \{x \in \mathbb{R} : |x+7| \leqslant 4\}$.
3. $C = \{x \in \mathbb{R} : |x-6| \geqslant 2\}$.

Zadanie 2.6. Obliczyć $A \cup B$, $A \cap B$, $A - B$, $B - A$ dla następujących zbiorów A i B:

1. $A = \{x \in \mathbb{N} : x < 3\}$, $B = \{x \in \mathbb{N} : x \geqslant 3\}$.
2. $A = \{x \in \mathbb{R} : x < 1\}$, $B = \{x \in \mathbb{R} : x < 2\}$.
3. $A = \{x \in \mathbb{R} : \dfrac{(x-2)(x-5)}{x+4} > 0\}$, $B = \{x \in \mathbb{R} : |x-5| < 3\}$.
4. $A = \{x \in \mathbb{R} : \dfrac{(x-3)(x+7)}{x-5} \leqslant 0\}$, $B = \{x \in \mathbb{R} : |x+2| \leqslant 5\}$.
5. $A = \{x \in \mathbb{R} : \dfrac{(x+1)(x-4)}{x-7} > 0\}$, $B = \{x \in \mathbb{R} : |x-3| \leqslant 4\}$.

Zadanie 2.7. Rozwiązać równania modułowe

1. $|x-2| = 5$. Odp. $x = -3 \vee x = 7$.
2. $|x+1| = -1$. Odp. $x = -2 \vee x = \frac{4}{3}$.
3. $|2x-1| = |x-3|$.
4. $|2x-1| + |x-2| = 6$.

Zadanie 2.8. Rozwiązać nierówności modułowe

1. $|x+100| > |2x-1|$.
2. $|x-1| + |2x-5| < 9$.
3. $|3x-5| < |x+9|$.
4. $\left|\dfrac{4x-5}{2x+7}\right| < 3$. Odp. $x > -\frac{8}{5} \wedge x < 13$.
5. $\left|\dfrac{4x+1}{2x-3}\right| > 2$. Odp. $x > \frac{5}{8} \wedge x \neq \frac{3}{2}$.
6. $\left|\dfrac{2x-1}{x+2}\right| < 2$.
7. $\left|\dfrac{5x-3}{2x+7}\right| < 2$.
8. $\left|\dfrac{2x-5}{x+3}\right| > 1$.

3. Ciągi nieskończone

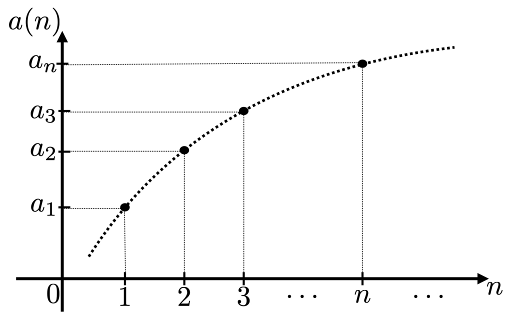
3.1. Definicja i podstawowe własności ciągów.

Definicja 3.1. Ciągiem nieskończonym nazywamy funkcję określoną na zbiorze liczb naturalnych $\mathbb{N}$. Ciągi oznaczamy literami a, b, c, ... używając zapisu:

$$a_n = a(n).$$

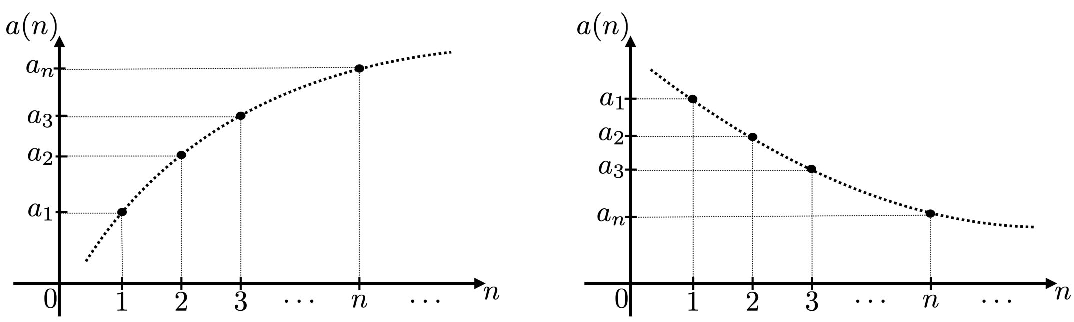
Liczbę a_n nazywamy **n-tym wyrazem ciągu** zaś dla funkcji $a : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ używamy oznaczenia $\{a_n\}$. Ciąg a_n będziemy również zapisywać w postaci

$$a_1, a_2, a_3, \ldots$$



Rysunek 1. Ciąg liczbowy a_n jako funkcja zmiennej naturalnej n.

Definicja 3.2. Monotoniczność ciągu. Ciąg $\{a_n\}$ nazywamy
– **rosnącym**, jeżeli $a_n \geqslant a_k$ dla $n > k$,
– **ściśle rosnącym**, jeżeli $a_n > a_k$ dla $n > k$,
– **malejącym**, jeżeli $a_n \leqslant a_k$ dla $n > k$,
– **ściśle malejącym**, jeżeli $a_n < a_k$ dla $n > k$,



Rysunek 2. Ciąg rosnący (na lewo) i ciąg malejący (na prawo).

Definicja 3.3. Ciąg ograniczony. Ciąg a_n nazywamy ograniczonym jeśli istnieją liczby p i P takie, że

$$p \leqslant a_n \leqslant P \tag{20}$$

dla dowolnego $n \in \mathbb{N}$.

Innymi słowy ciąg jest ograniczony wtedy i tylko wtedy gdy zbiór jego wyrazów jest ograniczony. Definicję tą można również sformułować następująco: Ciąg a_n jest ograniczony jeśli istnieje liczba M taka, że

$$|a_n| \leqslant M \tag{21}$$

dla dowolnego $n \in \mathbb{N}$.

3.2. **Granica ciągu i działania na granicach.**

Definicja 3.4. Granica ciągu. Liczbę rzeczywistą g nazywamy *granicą ciągu* $\{a_n\}$ jeżeli dla dowolnego $\varepsilon > 0$ istnieje $N \in \mathbb{N}$ takie, że dla dowolnego $n \geqslant N$ zachodzi nierówność

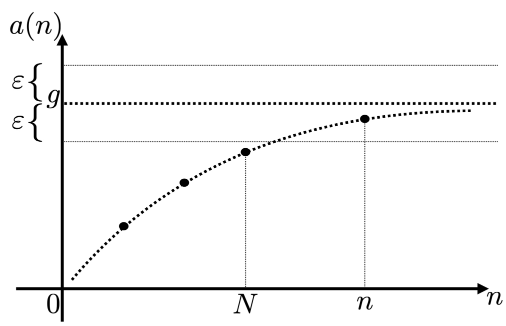
$$|a_n - g| < \varepsilon \tag{22}$$

Piszemy wówczas, że

$$\lim_{n\to\infty} a_n = g \qquad \text{lub} \qquad a_n \to g \tag{23}$$

W zapisie kwantyfikatorowym, powyższą definicję można sformułować następująco:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = g \quad \Leftrightarrow \quad \forall_{\varepsilon>0}\ \exists_{N\in\mathbb{N}}\ \forall_{n\geqslant N}\ |a_n - g| < \varepsilon \tag{24}$$



Rysunek 3. Granica g ciągu a_n przy $n \to \infty$.

Przykład 3.1. Rozważmy ciąg stały $a_n = c$, wówczas

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} c = c.$$

Przykład 3.2. Niech $a_n = \frac{1}{n}$, wówczas

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0.$$

Istotnie, mamy

$$a_1 = \frac{1}{1},\ a_2 = \frac{1}{2},\ a_3 = \frac{1}{3},\ \ldots,\ a_{100} = \frac{1}{100},\ \ldots,\ a_{10000} = \frac{1}{10000},\ \ldots,\ [a_\infty = \frac{1}{\infty}],\ \to 0.$$

Przykład 3.3. Niech $a_n = (-1)^n$. Zapiszmy kilka pierwszych wyrazów tego ciągu:

$$\begin{aligned} a_1 &= (-1)^1 = -1,\\ a_2 &= (-1)^2 = 1,\\ a_3 &= (-1)^3 = -1,\\ a_4 &= (-1)^4 = 1\\ &\ldots \end{aligned}$$

Widać, że taki ciąg jest *naprzemienny* bo jeżeli n jest nieparzyste to ciąg jest stały i równy -1, jeżeli natomiast n jest parzyste to ciąg jest stały lecz tym razem równy 1. Oznacza to, że tak określony ciąg nie jest zbieżny i nie posiada granicy.

Twierdzenie 3.1. *Załóżmy, że $|q| < 1$ i niech dany będzie ciąg postaci $a_n = q^n$, wówczas*

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} q^n = 0.$$

Twierdzenie 3.2. *Załóżmy, że*

$$\lim_{n\to\infty} a_n = a, \qquad \lim_{n\to\infty} b_n = b.$$

Wówczas

(i) $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n + b_n) = a + b$ *(granica sumy),*
(ii) $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n - b_n) = a - b$ *(granica różnicy),*
(iii) $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n b_n) = ab$ *(granica iloczynu),*
(iv) $\lim\limits_{n\to\infty}(\alpha a_n + \beta b_n) = \alpha a + \beta b$ *dla dowolnych* $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$,

Twierdzenie 3.3. (o granicy ilorazu). *Załóżmy, że*

$$\lim_{n\to\infty} a_n = a, \qquad \lim_{n\to\infty} b_n = b \neq 0.$$

Wówczas

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{a}{b}.$$

Twierdzenie 3.4. *Niech ciąg a_n będzie ciągiem ograniczonym a ciąg b_n ciągiem zbieżnym do zera. Wówczas ciąg $a_n \cdot b_n$ jest zbieżny do zera.*

Przykład 3.4. Wiemy, że ciąg $\left\{\frac{1}{n}\right\}$ jest zbieżny do zera (por. Przykład 3.2). Ponadto ciąg $\left\{\cos(n\frac{\pi}{6})\right\}$ jest ograniczony, gdyż

$$\left|\cos\left(n\frac{\pi}{6}\right)\right| \leqslant 1$$

dla dowolnego $n \in \mathbb{N}$. Wobec tego

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\cos\left(n\frac{\pi}{6}\right) = 0.$$

Twierdzenie 3.5. *Każdy ciąg zbieżny jest ograniczony.*

Twierdzenie 3.6. *Każdy ciąg monotoniczny i ograniczony jest zbieżny.*

Definicja 3.5. Ciągi rozbieżne do nieskończoności Mówimy, że ciąg a_n jest *rozbieżny do nieskończoności*, jeżeli dla dowolnej liczby P istnieje liczba N taka, że dla dowolnego $n > N$ zachodzi nierówność

$$a_n > P \tag{25}$$

Piszemy wówczas, że

$$\lim_{n\to\infty} a_n = +\infty \qquad \text{lub} \qquad a_n \to +\infty$$

W zapisie kwantyfikatorowym, powyższą definicję mońa sformułować następująco:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = +\infty \quad \Leftrightarrow \quad \forall_P \ \exists_{N\in\mathbb{N}} \ \forall_{n\geqslant N} \ a_n > P$$

Mówimy, że ciąg b_n jest *rozbieżny do minus nieskończoności*, jeżeli dla dowolnej liczby p istnieje liczba N taka, że dla dowolnego $n > N$ zachodzi nierówność

$$b_n < p \tag{26}$$

Piszemy wówczas, że

$$\lim_{n\to\infty} b_n = -\infty \qquad \text{lub} \qquad b_n \to -\infty$$

W zapisie kwantyfikatorowym, powyższą definicję mońa sformułować następująco:

$$\lim_{n\to\infty} b_n = -\infty \quad \Leftrightarrow \quad \forall_p \ \exists_{N\in\mathbb{N}} \ \forall_{n\geqslant N} \ b_n < p$$

Przykład 3.5. Ciąg $a_n = n^2 + 1$ jest rozbieżny do $+\infty$. Ciąg $b_n = 2 - \sqrt{n}$ jest rozbieżny do $-\infty$.

3.3. **Przykłady obliczania granic ciągów.** Rozważymy przykłady, w których zastosujemy powyższe twierdzenia do obliczania granicy ciągu.

Przykład 3.6. Niech

$$a_n = \frac{3n^2 + 5n + 1}{2 - n^2}$$

Wyznaczymy granicę ciągu a_n.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{3n^2 + 5n + 1}{2 - n^2} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^2(3 + \frac{5}{n} + \frac{1}{n^2})}{n^2(\frac{2}{n^2} - 1)} = \lim_{n\to\infty} \frac{\cancel{n^2}(3 + \frac{5}{n} + \frac{1}{n^2})}{\cancel{n^2}(\frac{2}{n^2} - 1)} = \frac{3}{-1} = -3,$$

gdyż

$$\frac{5}{n} \xrightarrow{n\to\infty} 0, \quad \frac{1}{n^2} \xrightarrow{n\to\infty} 0, \quad \frac{2}{n^2} \xrightarrow{n\to\infty} 0.$$

Przykład 3.7. Niech

$$a_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n-1}$$

Do ciągu a_n nie można zastosować twierdzenia o granicy różnicy, gdyż oba ciągi

$$c_n = \sqrt{n+1}, \quad d_n = \sqrt{n-1}$$

są rozbieżne do nieskończoności. W takiej sytuacji przekształcimy wyrażenie a_n mnożąc je i dzieląc przez $\sqrt{n+1} + \sqrt{n-1}$. Otrzymujemy wówczas

$$\sqrt{n+1} - \sqrt{n-1} = \frac{(\sqrt{n+1} - \sqrt{n-1})(\sqrt{n+1} + \sqrt{n-1})}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n-1}} = \frac{(n+1) - (n-1)}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n-1}} = \frac{2}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n-1}}$$

I wówczas

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{2}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n-1}} = 0.$$

Przykład 3.8. Niech
$$a_n = \frac{n\sin(n\frac{\pi}{4})}{3n^2+1}$$
Aby wyznaczyć granicę tego ciągu, zapiszmy go w następującej postaci:
$$a_n = \frac{n}{3n^2+1}\sin(n\frac{\pi}{4})$$
Zauważmy, że
$$\lim_{n\to\infty}\frac{n}{3n^2+1} = \lim_{n\to\infty}\frac{n}{n(3n+\frac{1}{n})} = \lim_{n\to\infty}\frac{\cancel{n}}{\cancel{n}(3n+\frac{1}{n})} = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{3n+\frac{1}{n}} = 0.$$
Zatem ciąg a_n jest iloczynem dwóch ciągów, z których pierwszy jest zbieżny do zera a drugi jest ciągiem ograniczonym:
$$\left|\sin\left(n\frac{\pi}{4}\right)\right| \leqslant 1$$
a więc, na mocy twierdzenia 3.4, ciąg a_n jest zbieżny a jego granica wynosi 0.

3.4. **Przechodzenie do granicy w nierównościach.**

Twierdzenie 3.7. *Jeżeli*
$$\lim_{n\to\infty} a_n = a, \quad \lim_{n\to\infty} b_n = b$$
oraz dla $n \geqslant k$ (gdzie k jest pewną liczbą naturalną) zachodzi nierówność:
$$a_n \leqslant b_n$$
to
$$a \leqslant b$$

Twierdzenie 3.8. (o trzech ciągach) *Załóżmy, że dla $n \geqslant k$, $k \in \mathbb{N}$ zachodzi nierówność podwójna*
$$a_n \leqslant b_n \leqslant c_n \tag{27}$$
oraz że
$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} c_n = g.$$
Wówczas ciąg $\{b_n\}$ jest zbieżny i zachodzi równość
$$\lim_{n\to\infty} b_n = g.$$

Przykład 3.9. Dla dowolnego $n \in \mathbb{N}$ zachodzi nierówność
$$1 < \sqrt{1+\frac{1}{n}} < 1 + \frac{1}{n}$$
Opierając się na twierdzeniu o trzech ciągach wnioskujemy, że
$$\lim_{n\to\infty}\sqrt{1+\frac{1}{n}} = 1.$$

Twierdzenie 3.9. *Dla $a > 0$ mamy*
$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a} = 1.$$

Twierdzenie 3.10.
$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{n} = 1.$$

Twierdzenie 3.11. *Jeżeli* $a_n > 0$, $n \in \mathbb{N}$ *oraz* $\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = g$ *i* $g < 1$ *to*

$$\lim_{n\to\infty} a_n = 0.$$

Przykład 3.10. Zbadać granicę ciągu $a_n = \frac{3^n}{n!}$. Wiedząc, że $a_{n+1} = \frac{3^{n+1}}{(n+1)!}$ otrzymujemy

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{3^{n+1}}{(n+1)!} \cdot \frac{n!}{3^n} = \lim_{n\to\infty} \frac{3 \cdot \cancel{3^n}}{\cancel{n!} \cdot (n+1)} \cdot \frac{\cancel{n!}}{\cancel{3^n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{3}{n+1} = 0 \ < \ 1$$

stąd wniosek $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$.

Definicja 3.6. Liczba e**.** Rozważmy ciąg $d_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$. Można wykazać, że ciąg d_n jest zbieżny oraz

$$\lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e \tag{28}$$

Liczba e jest liczbą niewymierną z przedziału $2,71 < e < 2,72$.

Twierdzenie 3.12. *Jeżeli ciąg* $d_n \neq 0$, $n \in \mathbb{N}$ *oraz* $\lim_{n\to\infty} d_n = 0$ *to*

$$\lim_{n\to\infty} (1 + d_n)^{\frac{1}{d_n}} = e. \tag{29}$$

Uwaga 3.1. Jeżeli ciąg $d_n \neq 0$, $n \in \mathbb{N}$ oraz $\lim_{n\to\infty} d_n = \infty$ to

$$\lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{d_n}\right)^{d_n} = e. \tag{30}$$

Przykład 3.11. Wykażemy, że

$$\lim_{n\to\infty} \left(1 - \frac{1}{n}\right)^n = \frac{1}{e}.$$

Istotnie, mamy

$$\left(1 - \frac{1}{n}\right)^n = \left(\frac{n-1}{n}\right)^n = \left(\frac{n}{n-1}\right)^{-n} = \left(\frac{n-1+1}{n-1}\right)^{-n} = \left(1 + \frac{1}{n-1}\right)^{-n}$$
$$= \left(\left(1 + \frac{1}{n-1}\right)^n\right)^{-1} = \left(\left(1 + \frac{1}{n-1}\right)^{n-1} \left(1 + \frac{1}{n-1}\right)\right)^{-1}$$
$$\lim_{n\to\infty} \left(\left(1 + \frac{1}{n-1}\right)^{n-1} \left(1 + \frac{1}{n-1}\right)\right)^{-1} = (e \cdot 1)^{-1} = \frac{1}{e}.$$

3.5. **Zadania.**

Zadanie 3.1. Napisać kilka pierwszych wyrazów ciągu $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ określonego następująco:

1. $\left(\frac{n}{n+1}\right)_{n=1}^{\infty}$.
2. $\left(\frac{(-1)^n(n+1)}{3^n}\right)_{n=1}^{\infty}$.
3. $a_n = \sqrt{n+2}$.
4. $a_n = -n(2 + (-1)^n)$.
5. $a_n = n^{(-1)^n}$.
6. $a_n = \cos\frac{n\pi}{2}$.
7. $a_n = \frac{(-1)^n}{n} + \frac{1 + (-1)^n}{2}$.
8. $a_n = (-1)^n \frac{5}{n+2}$.

Zadanie 3.2. Ciąg $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ zadany jest przez równanie rekurencyjne:

1. $a_{n+2} = 5a_{n+1} - 6a_n$, $a_0 = 2$, $a_1 = 5$. Napisać kilka początkowych wyrazów tego ciągu, sprawdzić, że $a_n = 2^n + 3^n$.
2. $a_{n+3} = 2a_{n+2} + a_{n+1} - 2a_n$, $a_0 = 6$, $a_1 = 5$, $a_2 = 16$. Napisać kilka początkowych wyrazów tego ciągu, sprawdzić, że $a_n = \frac{13}{6}(-1)^n + \frac{1}{2} + \frac{10}{3}2^n$.

Zadanie 3.3. Zbadać monotoniczność ciągu:

1. $a_n = \dfrac{1}{3n+5}$.
2. $a_n = \dfrac{n}{n^2+1}$.
3. $a_n = \dfrac{1}{5^n}$.
4. $a_n = \dfrac{n-2}{n+2}$.
5. $a_n = \dfrac{3n+4}{2n+5}$.
6. $a_n = \cos\dfrac{n\pi}{2}$.
7. $a_n = \dfrac{n!}{2n}$.
8. $a_n = \dfrac{n!}{n^n}$.
9. $a_n = 3 + \dfrac{(-1)^n}{n}$.
10. $a_n = (1 + (-1)^n)n$.
11. $a_n = \dfrac{n}{n^2+n-1}$.

Zadanie 3.4. Wyznaczyć granicę ciągu:

1. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{3^n}{n!}$. Odp. 0.
2. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{2n^2-3}{n^2+1}$. Odp. 2.
3. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{2n^2-3n+5}{3+7n-6n^2}$. Odp. $-\frac{1}{3}$.
4. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{4n^3-5n+1}{3n^5+2n^2-4}$. Odp. 0.
5. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{2n^2-5n+8}{15n-3}$. Odp. ∞.
6. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1+\log n}{1+2\log n}$. Odp. $\frac{1}{2}$.
7. $\lim\limits_{n\to\infty} 3^{2n+3}$. Odp. ∞.
8. $\lim\limits_{n\to\infty} \log(2n+1)$. Odp. ∞.
9. $\lim\limits_{n\to\infty} \cos\dfrac{1}{n+1}$. Odp. 1.
10. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n}{n^2+1}$. Odp. ....
11. $\lim\limits_{n\to\infty} 3\cdot(-2)^n$. Odp. ....
12. $\lim\limits_{n\to\infty} 3\cdot(\frac{1}{2})^n$. Odp. ....
13. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{n-\sqrt{n^2-n}}$. Odp. ....
14. $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt{n^2+2n-4} - \sqrt{n^2+1}$. Odp. ....
15. $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt{4n^2+5n-7} - 2n$. Odp. $\frac{5}{4}$.
16*. $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[3]{n^3+2n^2+4} - \sqrt[3]{n^3+1}$. Odp. $\frac{2}{3}$.
17. $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{\dfrac{1}{n}}$. Odp. ....
18. $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{2^n+7^n+3^n}$. Odp. 7.
19. $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{10^n-8^n+2\cdot 5^n}$. Odp. 10.
20. $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{\pi^n+3^n}$. Odp. ....
21. $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{1+\frac{(-1)^n}{n}}$. Odp. 1.
22. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{2n\cos(n^3+1)}{n^2+3}$. Odp. ....
23. $\lim\limits_{n\to\infty} \left(1+\frac{4}{n}\right)^n$. Odp. e^4.
24. $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\frac{n}{n+1}\right)^n$. Odp. $\frac{1}{e}$.
25. $\lim\limits_{n\to\infty} \left(1-\frac{3}{n}\right)^{2n}$. Odp. e^{-6}.
26. $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\frac{n^2+2}{n^2}\right)^{2n^2+1}$. Odp. e^4.

27. $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n+3}{n+2}\right)^{2n^2+1}$. Odp. e^{-2}. 28. $\lim_{n\to\infty}\frac{n!}{n^n}$. Odp. 0.

4. Szeregi liczbowe

4.1. **Definicja i podstawowe własności szeregów.**

Definicja 4.1. Przez **szereg liczbowy nieskończony** rozumiemy ciąg sum:

$$
\begin{aligned}
&s_1 = a_1,\\
&s_2 = a_1 + a_2,\\
&\dots\\
&s_n = a_1 + a_2 + a_3 + ... + a_n,\\
&\dots
\end{aligned}
$$

zwanych **sumami częściowymi**. Szereg liczbowy oznaczamy symbolem

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n + \dots \tag{31}$$

Liczby $a_1, a_2, \dots$ nazywamy *wyrazami szeregu* a symbol a_n nazywamy *wyrazem ogólnym szeregu.* Wyrazy ciągu s_n nazywamy sumami częściowymi szeregu $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$.

Jeżeli ciąg sum częściowych s_n jest zbieżny, czyli ma skończoną granicę s, tj.:

$$\lim_{n\to\infty} s_n = s$$

to mówimy, że szereg (31) jest **zbieżny** a liczbę s nazywamy **sumą szeregu nieskończonego** (31).

Szereg, który nie jest zbieżny, nazywamy **szeregiem rozbieżnym**.

Jeżeli szereg (31) jest zbieżny, to na oznaczenie jego sumy s używa się tych samych symboli (31), co na oznaczenie samego szeregu, mianowicie:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = s \quad \text{lub} \quad a_1 + a_2 + ... + a_n + ... = s.$$

Twierdzenie 4.1 (Warunek konieczny zbieżności szeregu)**.** *Jeżeli szereg*

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

jest zbieżny to jego wyraz ogólny a_n dąży do zera:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = 0.$$

Twierdzenie 4.2. *Jeżeli szereg*

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

jest zbieżny i jego suma równa się s, a c jest liczbą stałą, to szereg

$$\sum_{n=1}^{\infty} ca_n$$

jest zbieżny i jego suma jest równa cs.

Jeżeli szereg

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

jest rozbieżny, to przy $c \neq 0$ szereg

$$\sum_{n=1}^{\infty} c a_n$$

jest też rozbieżny.

Poniżej omówimy specjalnie ważne szeregi:

Przykład 4.1. Szereg geometryczny

$$\sum_{n=1}^{\infty} a q^{n-1}, \quad \text{czyli} \quad a + aq + aq^2 + \cdots + aq^{n-1} + \ldots$$

jest zbieżny, gdy $|q| < 1$ tzn. gdy $-1 < q < 1$, i wówczas suma jego wynosi

$$\sum_{n=1}^{\infty} a q^{n-1} = \frac{a}{1-q}.$$

Szereg geometryczny jest natomiast rozbieżny, gdy $|q| \geqslant 1$, tzn.gdy $q \leqslant -1$ lub $q \geqslant 1$.

Przykład 4.2. Szereg harmoniczny

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}, \quad \text{czyli} \quad 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} + \ldots,$$

jest rozbieżny do ∞.

Przykład 4.3. Szereg harmoniczny rzędu α

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\alpha}}, \quad \text{czyli} \quad 1 + \frac{1}{2^{\alpha}} + \frac{1}{3^{\alpha}} + \cdots + \frac{1}{n^{\alpha}} + \ldots,$$

gdzie $\alpha > 0$, jest dla $\alpha > 1$ zbieżny, a dla $\alpha \leqslant 1$ jest rozbieżny. Dla $\alpha = 1$ otrzymujemy szereg podany poprzednio.

Ze względu na metody badania zbieżności szeregów wygodnie jest wyodrębnić dwie grupy:

- Szeregi o wyrazach nieujemnych, np.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{n^2}, \quad \text{czyli} \quad 2 + \frac{3}{2^2} + \frac{4}{3^2} + \cdots + \frac{n+1}{n^2} + \ldots$$

- Szeregi przemienne, tzn. szeregi, w których wyrazy dodatnie i ujemne występują regularnie na przemian np.:

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-2)^n, \quad \text{czyli} \quad -2 + 2^2 - 2^3 + \ldots (-2)^n + \ldots$$

Istnieją także szeregi, które nie należą do żadnej z podanych grup, jak np. szereg

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{\frac{1}{2}n(n+1)} n, \quad \text{czyli} \quad -1 - 2 + 3 + 4 - 5 - 6 + 7 + 8 - \ldots$$

4.2. **Szeregi o wyrazach nieujemnych.**

Kryterium porównawcze zbieżności szeregów.

Twierdzenie 4.3. *Jeżeli dla szeregu* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$, *gdzie* $a_n \geqslant 0$, *można wskazać taki szereg zbieżny* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$, *że począwszy od pewnego miejsca* N *(tzn. dla każdego* $n \geqslant N$*) zachodzi nierówność* $a_n \leqslant b_n$, *to szereg* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ *jest również zbieżny.*

Kryterium porównawcze rozbieżności szeregów.

Twierdzenie 4.4. *Jeżeli dla szeregu* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ *można wskazać taki szereg rozbieżny* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} c_n$, *gdzie* $c_n \geqslant 0$, *że począwszy od pewnego miejsca* N *(tzn. dla każdego* $n \geqslant N$*) zachodzi nierówność* $c_n \leqslant a_n$, *to szereg* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ *jest również rozbieżny.*

Uwaga 4.1. Przy stosowaniu tych kryteriów staramy się tak dobierać szeregi

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n \quad \text{i} \quad \sum_{n=1}^{\infty} c_n$$

aby ich zbieżność (dla b_n) lub rozbieżność (dla c_n) była znana lub łatwiejsza do zbadania niż zbieżność szeregu $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$.

Kryterium d'Alemberta zbieżności szeregów.

Twierdzenie 4.5. *Jeżeli w szeregu* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ *o wyrazach dodatnich począwszy od pewnego miejsca* N *(tzn. dla każdego* $n \geqslant N$*) stosunek dowolnego wyrazu* a_{n+1} *do poprzedzającego wyrazu* a_n *jest stale mniejszy od pewnej liczby* p *mniejszej od 1, tzn. jeżeli*

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} \leqslant p < 1 \quad \text{dla każdego} \quad n \geqslant N,$$

to szereg $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ *jest zbieżny.*

Kryterium d'Alemberta rozbieżności szeregów.

Twierdzenie 4.6. *Jeżeli w szeregu* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ *o wyrazach dodatnich począwszy od pewnego miejsca* N *(tzn. dla każdego* $n \geqslant N$*) stosunek dowolnego wyrazu* a_{n+1} *do poprzedzającego wyrazu* a_n *jest nie mniejszy od jedności, tzn. jeżeli*

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} \geqslant 1 \quad \text{dla każdego } n \geqslant N,$$

to szereg $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ *jest rozbieżny.*

Z podanych kryteriów d'Alemberta wynikają następujące wnioski:

- Jeżeli
$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n} = r < 1, \quad \text{to szereg} \quad \sum_{n=1}^{\infty} a_n \quad \text{jest zbieżny}$$
- Jeżeli
$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n} = s > 1, \quad \text{to szereg} \quad \sum_{n=1}^{\infty} a_n \quad \text{jest rozbieżny.}$$
- Jeżeli zaś
$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n} = 1,$$
to przypadek jest wątpliwy; należy wtedy stosować inne metody badania zbieżności szeregów.

Przykład 4.4. Zbadamy zbieżność szeregu
$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{6^n}{n!}.$$
Sprawdzimy czy spełniony jest warunek konieczny zbieżności szeregu czyli zbadamy zerowanie się granicy ciągy a_n przy $n \to \infty$. Zauważmy, że
$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty}\frac{\frac{6^{n+1}}{(n+1)!}}{\frac{6^n}{n!}} = \lim_{n\to\infty}\frac{6\cdot 6^n}{n!(n+1)}\frac{n!}{6^n} = \lim_{n\to\infty}\frac{6}{n+1} = 0 < 1$$
zatem
$$\lim_{n\to\infty}\frac{6^n}{n!} = 0$$
Oznacza to, że pelniony jest warunek konieczny zbieżności szeregu. Jednocześnie widać, że spełniony jest warunek kryterium d'Alemberta
$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n} = 0 < 1,$$
który oznacza, że od pewnego miejsca wszystkie wyrazy ciągu a_n są mniejsze od jedności, a więc nasz szereg jest zbieżny na mocy kryterium d'Alemberta.

Przypominamy, że symbol $n!$ oznacza iloczyn kolejnych liczb naturalnych od 1 do n:
$$n! = 1\cdot 2\cdot\dots\cdot(n-1)\cdot n.$$
Dodatkowo przyjmuje się, że $0! = 1$.

Kryterium Cauchy'ego zbieżności szeregów.

Twierdzenie 4.7. *Jeżeli dla szeregu* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *o wyrazach nieujemnych istnieje taka liczba* $p < 1$, *że począwszy od pewnego miejsca* N *(tzn. dla każdego* $n \geqslant N$*), zachodzi nierówność*
$$\sqrt[n]{a_n} < p < 1,$$
to szereg $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *jest zbieżny.*

Kryterium Cauchy'ego rozbieżności szeregów.

Twierdzenie 4.8. *Jeżeli dla szeregu* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ *dla nieskończenie wielu wartości* n *(niekoniecznie dla wszystkich) zachodzi nierówność*

$$\sqrt[n]{a_n} \geqslant 1,$$

to szereg $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ *jest rozbieżny.*

Z podanych kryteriów Cauchy'ego wynikają wnioski:

- Jeżeli
$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = r < 1, \quad \text{to szereg} \quad \sum_{n=1}^{\infty} a_n \quad \text{jest zbieżny.}$$
- Jeżeli
$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = s > 1, \quad \text{to szereg} \quad \sum_{n=1}^{\infty} a_n \quad \text{jest rozbieżny.}$$
- Jeżeli
$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = 1, \quad \text{to przypadek jest wątpliwy.}$$

Uwaga 4.2. Kryterium Cauchy'ego jest mocniejsze niż kryterium d'Alemberta; np.w szeregu

$$1 + \frac{3}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{3}{2^3} + \cdots + \frac{1}{2^{2n}} + \frac{3}{2^{2n+1}} + \ldots$$

kryterium d'Alemberta nie prowadzi do roztrzygnięcia sprawy zbieżności tego szeregu, bo stosunek a_{n+1}/a_n jest na przemian większy i mniejszy od 1. Kryterium Cauchy'ego natomiast daje w tym wypadku wynik natychmiastowy, gdyż

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \frac{1}{2} < 1,$$

a więc szereg jest zbieżny.

Przykład 4.5. Zbadać zbieżność szeregu

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^3}{2^n}.$$

Stosując kryterium Cauchy'ego mamy

$$\sqrt[n]{a_n} = \sqrt[n]{\frac{n^3}{2^n}} = \frac{(\sqrt[n]{n})^3}{2}$$

Ale $\sqrt[n]{n}$ dąży do 1, a więc $\sqrt[n]{a_n}$ dąży do $\frac{1}{2}$. Jest więc

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \frac{1}{2} < 1,$$

a to, na podstawie pierwszego wniosku z kryterium Cauchy'ego, wystarcza do wykazania zbieżności szeregu.

4.3. **Szeregi naprzemienne.** W szeregu o wyrazach dodatnich łączenie wyrazów w grupy, jak i zmiana kolejności składników nie wpływają na zbieżność ani nie zmieniają wartości sumy. Natomiast w szeregu o wyrazach różnego znaku nie wolno tego robić. Na przykład szereg

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}, \quad \text{czyli} \quad 1-1+1-1+\dots+(-1)^{n+1}+\dots,$$

jest rozbieżny, gdyż ciąg sum częściowych s_n przybiera na przemian wartość 1 (gdy ilość wyrazów jest nieparzysta) i 0 (gdy ilość wyrazów jest parzysta). Otóż łącząc wyrazy tego szeregu w grupy, po dwa wyrazy w jeden składnik nowego szeregu, otrzymujemy

$$(1-1)+(1-1)+\dots$$

Jest to szereg zbieżny, którego suma równa się zeru. Łącząc zaś odpowiednio wyrazy

$$1+(-1+1)+(-1+1)+\dots,$$

otrzymujemy szereg również zbieżny, którego suma równa się 1. Szereg $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ nazywamy przemiennym, jeśli wyrazy jego są naprzemian dodatnie i ujemne.

Kryterium Leibniza Zbieżności Szeregów.

Twierdzenie 4.9. *Jeżeli w szeregu naprzemiennym $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ począwszy od pewnego miejsca N bezwzględne wartości wyrazów szeregu dążą monotonicznie do zera, to znaczy, dla każdego $n > N$ spełnione są warunki:*

(1) $|u_{n+1}| \leqslant |u_n|$,
(2) $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = 0$,

to szereg $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ jest zbieżny.

Uwaga 4.3. Warunek *(2)* jest koniecznym warunkiem zbieżności każdego szeregu. Kryterium Leibniza dla szeregów przemiennych wymaga ponadto spełnienia warunku *(1)*.

Przykład 4.6. Zbadać zbieżność szeregu

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{n}, \quad \text{czyli} \quad 1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\dots+\frac{1}{2k-1}-\frac{1}{2k}+\dots$$

Jest to szereg przemienny, zwany *szeregiem anharmonicznym.* Bezwzględne wartości jego wyrazów monotonicznie dążą do zera:

$$1>\frac{1}{2}>\frac{1}{3}>\frac{1}{4}>\dots>\frac{1}{n}>\frac{1}{n+1}>\dots$$

oraz $\lim\limits_{n\to\infty}(-1)^{n+1}\dfrac{1}{n}=0$, a więc, na mocy kryterium Leibniza, szereg jest zbieżny.

Kryterium Bezwzględnej Zbieżności Szeregów.

Twierdzenie 4.10. *Jeżeli szereg* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |u_n|$, *którego wyrazy są równe wartościom bezwzględnym wyrazów szeregu* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$, *jest zbieżny, to wówczas szereg* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ *jest zbieżny bezwzględnie.*

Szereg $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ nazywamy szeregiem bezwzględnie zbieżnym, jeżeli szereg $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |u_n|$ jest zbieżny.

Przykład 4.7. Szereg

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^2}$$

jest bezwzględnie zbieżny, ponieważ szereg $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ jest zbieżny jako szereg harmoniczny rzędu $\alpha = 2$.

Szereg zbieżny, który nie jest bezwzględnie zbieżny, nazywamy szeregiem warunkowo zbieżnym.

Przykład 4.8. Szereg anharmoniczny

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n}$$

jest warunkowo zbieżny a nie jest bezwzględnie zbieżny, gdyż szereg bezwzględnych wartości jego wyrazów stanowi rozbieżny szereg harmoniczny $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$.

4.4. **Zadania z rozwiązaniami.**

4.4.1. *Szeregi o wyrazach nieujemnych.*

Zadanie 4.1. Zbadać zbieżność szeregu

$$\sum_{n=1}^{\infty} \cos\frac{1}{n}, \quad \text{czyli} \quad \cos 1 + \cos\frac{1}{2} + \cos\frac{1}{3} + \dots + \cos\frac{1}{n} + \dots$$

Rozwiązanie. Jest to szereg o wyrazach dodatnich, gdyż $1/n$ zmienia się od 1 (czyli od 1 radiana) do 0, a w tym przedziale jest $\cos x > 0$. Zauważmy, że z ciągłości funkcji $\cos x$ wynika wzór

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \cos\frac{1}{n} = \cos(\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}) = \cos 0 = 1.$$

Wyraz ogólny szeregu nie dąży do zera, a więc nie jest spełniony warunek konieczny zbieżności szeregu, tzn. nasz szereg jest rozbieżny.

Zadanie 4.2. Zbadać zbieżność szeregu

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)^2 \cdot 5^n}{(2n)!}$$

Rozwiązanie. Zastosujemy, kryterium d'Alemberta. Obliczamy

$$a_{n+1} = \frac{[(n+1)!]^2 \cdot 5^{n+1}}{(2n+2)!}$$

W mianowniku mamy $(2n+2)!$, gdyż wyraz a_{n+1} otrzymujemy ze wzoru na wyraz a_n zastępując wszędzie n przez $n+1$, a więc $2n$ przez $2(n+1)$, czyli przez $(2n+2)$. Mamy więc

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{[(n+1)!]^2 \cdot 5^{n+1}}{(2n+2)!} \frac{(2n)!}{(n!)^2 \cdot 5^n} = \frac{(n!)^2 (n+1)^2 \cdot 5 \cdot 5^n \cdot (2n)!}{(2n)!(2n+1)(2n+2)(n!)^2 \cdot 5^n} = \frac{\cancel{(n!)^2}(n+1)^2 \cdot 5 \cdot \cancel{5^n} \cdot \cancel{(2n)!}}{\cancel{(2n)!}(2n+1)(2n+2)\cancel{(n!)^2} \cdot \cancel{5^n}}$$
$$= \frac{(n+1)^2 \cdot 5}{(2n+1)(2n+2)} = \frac{5(n+1)^2}{2(n+1)(2n+1)} = \frac{5(n+1)}{2(2n+1)} = \frac{5n+5}{4n+2}.$$

Ponieważ

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{5n+5}{4n+2} = \frac{5}{4} > 1,$$

więc szereg jest rozbieżny, na mocy kryterium d'Alemberta.

Zadanie 4.3. Zbadać zbieżność szeregu

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}{n}, \quad \text{czyli} \quad \frac{\sqrt{2}-1}{1} + \frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{4}-\sqrt{3}}{3} + \dots + \frac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}{n} + \dots$$

Rozwiązanie. Jest to szereg o wyrazach dodatnich. Weźmy pod uwagę ogólny wyraz tego szeregu:

$$a_n = \frac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}{n}.$$

Mnożąc licznik i mianownik ułamka przez $\sqrt{n+1}+\sqrt{n}$ otrzymujemy

$$a_n = \frac{(n+1)-n}{n(\sqrt{n+1}+n)} = \frac{1}{n(\sqrt{n+1}+\sqrt{n})}.$$

Jest oczywiste, że $\sqrt{n+1} > \sqrt{n}$, więc

$$a_n = \frac{1}{n(\sqrt{n+1}+\sqrt{n})} < \frac{1}{2n\sqrt{n}}, \quad \text{czyli} \quad a_n < \frac{1}{2n^{\frac{3}{2}}}.$$

Zauważmy, że szereg

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n^{\frac{3}{2}}}$$

jest zbieżny jako szereg harmoniczny stopnia $\frac{3}{2} > 1$, a ponadto zachodzi nierówność

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}{n} < \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n^{\frac{3}{2}}}$$

zatem rozpatrywany szereg jest zbieżny na mocy kryterium porównawczego.

Zadanie 4.4. Zbadać zbieżność szeregu

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sin\frac{1}{n}, \quad \text{czyli} \quad \sin 1 + \sin\frac{1}{2} + \sin\frac{1}{3} + \dots + \sin\frac{1}{n} + \dots$$

Rozwiązanie. Szereg ten jest szeregiem o wyrazach dodatnich. Zauważmy, że warunek konieczny zbieżności $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = 0$ jest spełniony. Weźmy wzór

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1,$$

gdzie x wyrażone jest w mierze łukowej (w radianach). Podstawiając $x = \frac{1}{n}$ otrzymujemy

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sin\frac{1}{n}}{\frac{1}{n}} = 1.$$

W myśl definicji granicy ciągu możemy dla dowolnej liczby dodatniej ε znaleźć w ciągu takie miejsce N, żeby była spełniona nierówność

$$\left|\frac{\sin\frac{1}{n}}{\frac{1}{n}} - 1\right| < \varepsilon \quad \text{dla każdego} \quad n > N,$$

czyli

$$1 - \varepsilon < \frac{\sin\frac{1}{n}}{\frac{1}{n}} < 1 + \varepsilon \quad \text{dla} \quad n > N.$$

Przyjmując $\varepsilon = \frac{1}{2}$ mamy

$$1 - \frac{1}{2} < \frac{\sin\frac{1}{n}}{\frac{1}{n}} < 1 + \frac{1}{2},$$

skąd

$$\sin\frac{1}{n} > \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{n} \quad \text{dla} \quad n > N.$$

Szereg

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{n}$$

jest rozbieżny, jako iloczyn liczby $\frac{1}{2}$ przez szereg harmoniczny rzędu 1, a więc na podstawie kryterium porównawczego stwierdzamy, że szereg

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sin\frac{1}{n}$$

jest rozbieżny.

Zadanie 4.5. Zbadać zbieżność szeregu

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n-3}{n^4}$$

Rozwiązanie. Sprawdzamy warunek konieczny zbieżności szeregu o wyrazach dodatnich

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n-3}{n^4} = 0$$

Mamy dalej

$$\frac{n-3}{n^4} \leqslant \frac{n}{n^4} = \frac{1}{n^3}$$

Ponieważ szereg

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3}$$

jest szeregiem harmonicznym stopnia $\alpha = 3 > 1$ oraz zachodzi nierówność

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n-3}{n^4} < \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3}$$

a więc na mocy kryterium porównawczego, szereg

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n-3}{n^4}$$

jest zbieżny.

Zadanie 4.6. Zbadać zbieżność szeregu

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+1)!}{n^2+1}.$$

Rozwiązanie. Sprawdźmy warunek konieczny zbieżności szeregu, czyli obliczmy granicę

$$\lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)!}{n^2+1}$$

Zauważmy, że

$$\begin{aligned} \frac{a_{n+1}}{a_n} &= \frac{(n+2)!}{(n+1)^2+1} \cdot \frac{n^2+1}{(n+1)!} = \frac{(n+1)!(n+2)}{n^2+2n+2} \cdot \frac{n^2+1}{(n+1)!} \\ &= \frac{(n+2)(n^2+1)}{n^2+2n+2} \to \infty > 1 \quad \text{przy} \quad n \to \infty. \end{aligned}$$

Nie jest spełniony warunek konieczny zbieżności szeregów zatem rozważany szereg jest rozbieżny.

Zadanie 4.7. Zbadać zbieżność szeregu

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2n+1}{3n-1}\right)^n.$$

Rozwiązanie. Zbadamy warunek konieczny zbieżności szeregu

$$\begin{aligned} \lim_{n\to\infty} \left(\frac{2n+1}{3n-1}\right)^n &= \lim_{n\to\infty} \left(\frac{3n-1-n+2}{3n-1}\right)^n = \lim_{n\to\infty} \left(1+\frac{2-n}{3n-1}\right)^n \\ &= \lim_{n\to\infty} \left(\left(1+\frac{2-n}{3n-1}\right)^{\frac{3n-1}{2-n}}\right)^{\frac{2-n}{3n-1}\cdot n} = \left[e^{-\infty}\right] = 0. \end{aligned}$$

Stosując kryterium Cauchy'ego zbieżności szeregu otrzymujemy:

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\left(\frac{2n+1}{3n-1}\right)^n} = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{2n+1}{3n-1}\right) = \frac{2}{3} < 1.$$

Zatem na mocy tego kryterium szereg jest zbieżny.

Zadanie 4.8. Zbadać zbieżność szeregu

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n\sqrt[3]{n}+3}{n^2}.$$

Rozwiązanie. Zbadamy warunek konieczny zbieżności szeregu. Skoro $n^1 \cdot n^{\frac{1}{3}} = n^{\frac{4}{3}}$ zatem

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n\sqrt[3]{n}+3}{n^2} = 0.$$

Oszacujmy nasz szereg z dołu, tj.:

$$\frac{n\sqrt[3]{n}+3}{n^2} \geqslant \frac{n\sqrt[3]{n}}{n^2} = \frac{\cancel{n}\sqrt[3]{n}}{n^{\overset{1}{\cancel{2}}}} = n^{-\frac{2}{3}} = \frac{1}{n^{\frac{2}{3}}}$$

Szereg

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\frac{2}{3}}}$$

jest szeregiem harmonicznym stopnia $\frac{2}{3} < 1$ więc jest rozbieżny, zatem na mocy kryterium porównawczego badany szereg jest rozbieżny.

Zadanie 4.9. Zbadać zbieżność szeregu

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin^2 n}{n^2}.$$

Rozwiązanie. Zbadamy warunek konieczny zbieżności szeregu, mamy

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sin^2 n}{n^2} = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{\sin n}{n}\right)^2 = 0$$

Zauważmy, że

$$0 \leqslant \frac{\sin^2 n}{n^2} \leqslant \frac{1}{n^2}$$

oraz szereg

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$$

jest harmoniczny rzędu $\alpha = 2 > 1$ a więc jest zbieżny. Zatem na mocy kryterium porównawczego szereg

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin^2 n}{n^2}$$

jest zbieżny.

4.4.2. *Szeregi o wyrazach naprzemiennych.*

Zadanie 4.10. Zbadać zbieżność szeregu naprzemiennego

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{2^3} + \frac{1}{4} - \frac{1}{2^4} + \cdots + \frac{1}{n} - \frac{1}{2^n} + \ldots$$

Rozwiązanie. Warunek konieczny zbieżności $\lim u_n = 0$ jest spełniony, ale szereg, jak wykażemy, jest rozbieżny. Oznaczmy sumę częściową jego $2n$ wyrazów przez S_{2n}. Będzie wówczas $S_{2n} = H_n - G_n$, gdzie

$$H_n = 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n}, \quad G_n = \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \cdots + \frac{1}{2^n}.$$

Gdy $n \to \infty$, to $H_n \to \infty$, na podstawie Przykładu 4.1, a $G_n \to 1$, więc $S_{2n} \to \infty$, co oznacza, że szereg jest rozbieżny.

Zadanie 4.11. Zbadać zbieżność szeregu

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}(\sqrt[n]{3}-1).$$

Rozwiązanie. Jest to szereg naprzemienny, którego wyraz ogólny dąży do zera. Porównajmy wartości bezwzględne dwóch kolejnych wyrazów u_n i u_{n+1}. Nietrudno wykazać, że $|u_{n+1}| < |u_n|$, to znaczy, że

$$\sqrt[n+1]{3}-1 < \sqrt[n]{3}-1, \quad \text{czyli} \quad \sqrt[n+1]{3} < \sqrt[n]{3},$$

po podniesieniu bowiem do potęgi $n(n+1)$ otrzymamy oczywistą nierówność $3^n < 3^{n+1}$ spełnioną dla każdej wartości naturalnej n. Wobec spełnienia założeń kryterium Leibniza szereg rozpatrywany jest zbieżny.

Zadanie 4.12. Zbadać zbieżność szeregu

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n\ln n}$$

Rozwiązanie. Jest to szereg naprzemienny, którego wyraz ogólny $\dfrac{(-1)^n}{n\ln n}$ dąży do zera. Istotnie, mamy

$$0 \leftarrow \frac{-1}{n\ln n} \leqslant \frac{(-1)^n}{n\ln n} \leqslant \frac{1}{n\ln n} \to 0$$

zatem na mocy twierdzenia o 3 ciągach $\dfrac{(-1)^n}{n\ln n} \to 0$. Porównajmy wartości bezwzględne dwóch kolejnych wyrazów a_n i a_{n+1}. Mamy, że

$$|a_{n+1}| = \frac{1}{(n+1)\ln(n+1)} \leqslant \frac{1}{n\ln n} = |a_n|$$

Zatem na mocy kryterium Leibniza rozpatrywany szereg jest zbieżny.

4.5. **Zadania do samodzielnego rozwiązania.**

Zadanie 4.13. Zbadać czy szeregi spełniają warunek konieczny zbieżności.

1. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{3}{2}\right)^n$ Odp. nie spełnia.
2. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{3n^2+n-1}{1+n^3}$ Odp. spełnia.
3. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt{n^2+1}}{n}$ Odp. nie spełnia.
4. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(\sqrt{n^2+3}-\sqrt{n^2-1})$ Odp. spełnia.
5. $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\left(\frac{n-1}{n+3}\right)^{n+2}$ Odp. nie spełnia.
6. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\sqrt[n]{\left(\frac{1}{3}\right)^n+\left(\frac{2}{5}\right)^n}$ Odp. nie spełnia.
7. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\sin n!}{n}$ Odp. spełnia.
8. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{3n-2}{n+1}\right)^{2n}$ Odp. nie spełnia.
9. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{e^{-n^2}}{3n}$ Odp. spełnia.
10. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{4^n+3^n}{3+6^n}$ Odp. spełnia.

Zadanie 4.14. Zbadać zbieżność szeregów.

1. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n-3}{n^4}$ Odp. zbieżny.
2. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n\sqrt[3]{n}+3}{n^2}$ Odp. rozbieżny.
3. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{3n}{n^3+4n}$ Odp. zbieżny.
4. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n+3}}{n+5}$ Odp. rozbieżny.
5. $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \frac{n^3+4n}{n^4-2n^2}$ Odp. rozbieżny.
6. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\sin^2 n}{n^2}$ Odp. zbieżny.
7. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(n+1)!}{n^2+1}$ Odp. rozbieżny.
8. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(n+1)!}{4n}$ Odp. rozbieżny.
9. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{9^n n!}{n^n}$ Odp. rozbieżny.
10. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(2n)!}{n!(n+4)!3^n}$ Odp.rozbieżny.
11. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)^2}{[(2n)!]^2}$ Odp. zbieżny.
12. $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2n+1}{3n-1}\right)^n$ Odp. zbieżny.
13. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{3^{2n}}{4n}$ Odp. rozbieżny.
14. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n^3}{3^n+4^n}$ Odp. zbieżny.
15. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n^2+2}{n^2+5}\right)^{n^3}$ Odp. zbieżny.
16. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{n^6+2n}$ Odp. rozbieżny.
17. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n+2}{n}\right)^{-n^2}$ Odp. zbieżny.
18. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{2^n(2n)!}{n!}$ Odp. rozbieżny.
19. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n+4}{2^n(n+3)!}$ Odp. zbieżny.
20. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\frac{3n^3-2n^2+3}{4n^3-6}\right)^{2n}$ Odp. zbieżny.

Zadanie 4.15. Zbadać zbieżność szeregu

1. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \sqrt{n}\frac{1}{n}$.
2. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\log n}{n^3}$.
3. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\sin 3^n}{3^n}$.
4. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n(\sqrt[n]{2}-1)$.
5. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n\ln n}$.
6. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n\frac{\ln n}{n}$.
7. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{2+(-1)^n}{n^2}$.
8. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1}\frac{10^n}{n!}$.

5. Liczby zespolone

5.1. **Zbiór liczb zespolonych.**

Definicja 5.1. Zbiór $\mathbb{Z} = \{(x, y) : x, y \in \mathbb{R}\}$ z działaniami $+$ i $\cdot$ określonymi jako

$$(x_1, y_1) + (x_2, y_2) = (x_1 + x_2, y_1 + y_2), \tag{32}$$

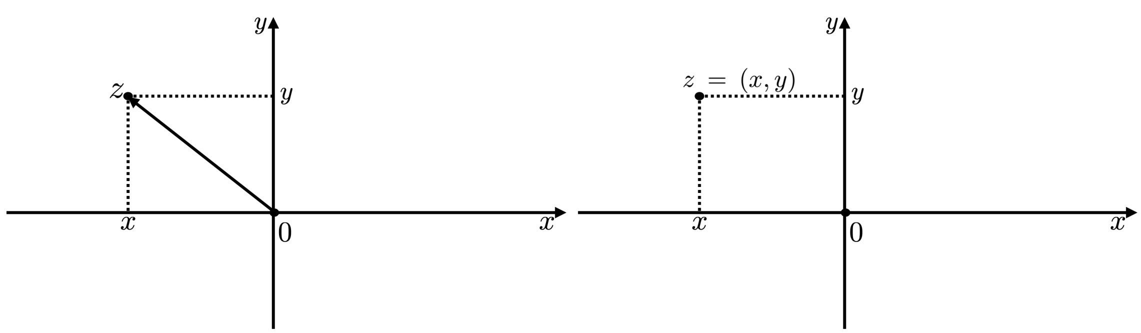
$$(x_1, y_1) \cdot (x_2, y_2) = (x_1 \cdot x_2 - y_1 \cdot y_2, x_1 \cdot y_2 + x_2 \cdot y_1). \tag{33}$$

nazywamy zbiorem liczb zespolonych, a jego elementy liczbami zespolonymi.

Twierdzenie 5.1. Własności dodawania i mnożenia liczb zespolonych. *Dodawanie i mnożenie liczb zespolonych mają następujące własności:*

1) Dodawanie jest przemienne, tj. dla dowolnych liczb $z_1, z_2 \in \mathbb{Z}$ zachodzi $z_1 + z_2 = z_2 + z_1$.
2) Dodawanie jest łączne, tj. dla dowolnych liczb $z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{Z}$ zachodzi $(z_1+z_2)+z_3 = z_1+(z_2+z_3)$.
3) Liczba $0 = (0, 0)$ jest elementem neutralnym dodawania, tj. dla dowolnej liczby zespolonej z zachodzi $z + 0 = 0 + z = z$.
4) Dla dowolnej liczby zespolonej $z = (x, y)$ liczba $-z = (-x, -y)$ jest przeciwna do liczby z, tj. $z + (-z) = 0$.
5) Mnożenie jest przemienne, tj. dla dowolnych liczb $z_1, z_2 \in \mathbb{Z}$ zachodzi $z_1 \cdot z_2 = z_2 \cdot z_1$.
6) Mnożenie jest łączne, tj. dla dowolnych liczb $z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{Z}$ zachodzi $(z_1 \cdot z_2) \cdot z_3 = z_1 \cdot (z_2 \cdot z_3)$.
7) Liczba $1 = (1, 0)$ jest elementem neutralnym mnożenia, tj. dla dowolnej liczby zespolonej z zachodzi $z \cdot 1 = 1 \cdot z = z$.
8) Dla dowolnej, różnej od 0, liczby zespolonej z liczba z^{-1} jest odwrotnością liczby z, tj. $z \cdot z^{-1} = 1$
9) Mnożenie jest rozdzielne względem dodawania, tj. dla dowolnych liczb z_1, z_2, $z_3 \in \mathbb{Z}$ zachodzi $(z_1 + z_2) \cdot z_3 = z_1 \cdot z_3 + z_2 \cdot z_3$

Geometrycznie liczbę zespoloną $z = (x, y)$ interpretujemy jako wektor zaczepiony w punkcie $(0, 0)$ o końcu w punkcie (x, y).



Rysunek 4. Interpretacja geometryczna liczby zespolonej.

Zbiór liczb zespolonych możemy również interpretować jako zbiór punktów na płaszczyźnie. W tej interpretacji naturalnym staje się określenie równości liczb zespolonych. Otóż dwie liczby zespolone $z_1 = (x_1, y_1)$ oraz $z_2 = (x_2, y_2)$ są równe, jeżeli $x_1 = x_2$ oraz $y_1 = y_2$. Zbiór wszystkich liczb zespolonych na płaszczyźnie (wektorów lub punktów) nazywamy płaszczyzną zespoloną (lub płaszczyzną Gaussa). W zbiorze liczb zespolonych rozważmy podzbiór $\{(x, 0) : x \in \mathbb{R}\}$ składający się z liczb zespolonych leżących na osi odciętych OX. Zauważmy, że liczby tej postaci mają następujące własności:

$$(x_1, 0) + (x_2, 0) = (x_1 + x_2, 0) \tag{34}$$

$$(x_1, 0) \cdot (x_2, 0) = (x_1 \cdot x_2 - 0, x_1 \cdot 0 + x_2 \cdot 0) = (x_1 \cdot x_2, 0). \tag{35}$$

Dzięki temu możemy utożsamić zbiór liczb zespolonych postaci $\{(x, 0) : x \in \mathbb{R}\}$ ze zbiorem liczb rzeczywistych i parę zapisywać po prostu jako x. Oś OX będziemy wówczas nazywać osią rzeczywistą. Wyróżnijmy teraz jednostkę na osi OY, tj. liczbę zespoloną postaci $(0, 1)$.

Definicja 5.2. Liczbę $i = (0, 1)$ nazywamy **jednostką urojoną**.

Zauważmy, że

$$i^2 = (0, 1) \cdot (0, 1) = (0 \cdot 0 - 1 \cdot 1, 0 \cdot 1 + 1 \cdot 0) = (-1, 0) = -1. \tag{36}$$

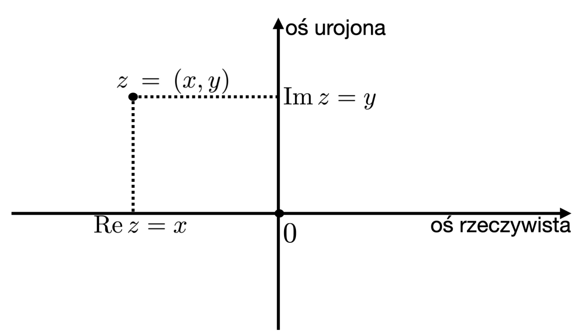
Powyższy fakt, niemożliwy dla liczb rzeczywistych, tłumaczy nazwę "jednostka urojona". Oś OY, której wersorem jest jednostka urojona, będziemy nazywać osią urojoną. Niech $z = (x, y)$ będzie liczbą zespoloną. Współrzędna x liczby z jest określona względem osi rzeczywistej OX, dlatego mówimy, że jest to część rzeczywista liczby z. Z kolei współrzędna y liczby z jest określona względem osi urojonej OY i dlatego nosi nazwę części urojonej liczby z. Dla liczby zespolonej $z = (x, y)$ wprowadzamy oznaczenia

$$\operatorname{Re} z = x \tag{37}$$

od łacińskiego słowa realis(z) oznaczającego część rzeczywistą liczby z oraz

$$\operatorname{Im} z = y \tag{38}$$

od łacińskiego imaginarius(z) oznaczającego część urojoną liczby z



Rysunek 5. Interpretacja geometryczna liczby zespolonej.

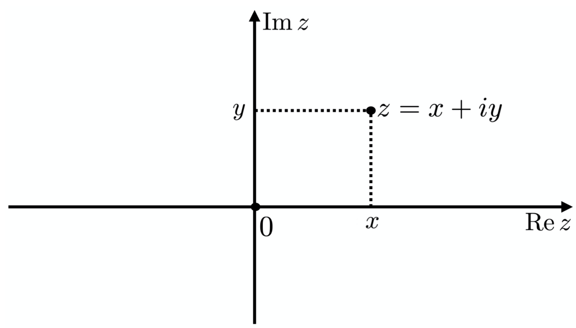
5.2. **Postać algebraiczna liczby zespolonej.**

Definicja 5.3. Niech $z = (x, y)$, gdzie $x, y \in \mathbb{R}$ będzie dowolną liczbą zespoloną. Zauważmy, że liczbę z możemy zapisać następująco:

$$z = (x, y) = (x, 0) + (0, y) = (x, 0) + (y, 0) \cdot (0, 1). \tag{39}$$

Wówczas oznaczając $x = (x, 0)$, $y = (y, 0)$ oraz $i = (0, 1)$ otrzymujemy postać algebraiczną (Hamiltona, kanoniczną) liczby zespolonej z

$$z = x + iy. \tag{40}$$



Rysunek 6. Interpretacja geometryczna liczby zespolonej w postaci algebraicznej.

Niech $z = x + iy$ będzie liczbą zespoloną w postaci algebraicznej. Przypomnijmy, że liczbę x nazywamy częścią rzeczywistą liczby z i oznaczamy symbolem $\operatorname{Re} z$, zaś liczbę y nazywamy częścią urojoną liczby z i oznaczamy symbolem $\operatorname{Im} z$.

Przykład 5.1. Dla liczby zespolonej $z = 3 - i$ częścią rzeczywistą jest liczba $\operatorname{Re} z = 3$, a częścią urojoną liczba $\operatorname{Im} z = -1$.

Niech $z_1 = (x_1, y_1)$ oraz $z_2 = (x_2, y_2)$ będą liczbami zespolonymi. Liczby z_1 i z_2, jako uporządkowane pary punktów, są równe wtedy i tylko wtedy, gdy $x_1 = x_2$ oraz $y_1 = y_2$. Stąd, zapisując liczby z_1 i z_2 w postaci algebraicznej jako $z_1 = x_1 + iy_1$ oraz $z_2 = x_2 + iy_2$ otrzymujemy, że $z_1 = z_2$ wtedy i tylko wtedy, gdy $\operatorname{Re} z_1 = \operatorname{Re} z_2$ oraz $\operatorname{Im} z_1 = \operatorname{Im} z_2$. Postać kanoniczna liczby zespolonej umożliwia dodawanie i mnożenie liczb zespolonych tak samo jak wielomianów, tzn. wyraz podobny do wyrazu podobnego (dla dodawania) i każdy wyraz z każdym wyrazem (dla mnożenia), w przypadku mnożenia pamiętając o warunku $i^2 = -1$. Przy dzieleniu przez liczbę zespoloną $z = x + iy$ mnożymy dzielną i dzielnik przez $x - iy$, otrzymując w mianowniku liczbę rzeczywistą.

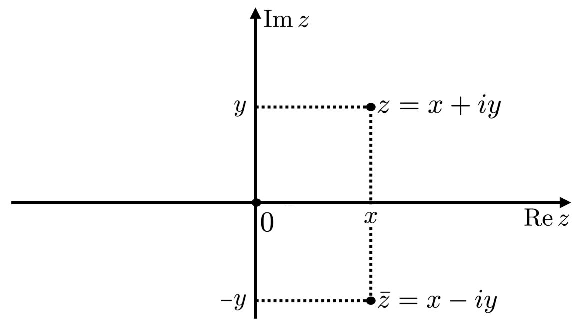
Przykład 5.2. Niech $z = 2 - 3i$, $w = -1 + i$. Mamy:

$$\begin{aligned}
z + w &= 2 - 3i - 1 + i = (2 - 1) + (-3i + i) = 1 + (-2i) = 1 - 2i. \\
z - w &= 2 - 3i - (-1 + i) = (2 - (-1)) + (-3i - i) = 3 - 4i. \\
z \cdot w &= (2 - 3i) \cdot (-1 + i) = -2 + 2i + 3i - 3(i)^2 = -2 + 5i - 3(-1) \\
&= -2 + 3 + 5i = 1 + 5i. \\
\frac{z}{w} &= \frac{2 - 3i}{-1 + i} = \frac{(2 - 3i)(-1 - i)}{(-1 + i)(-1 - i)} = \frac{-2 - 2i + 3i + 3i^2}{1 + i - i - i^2} = \frac{-5 + i}{2} = \frac{-5}{2} + \frac{1}{2}i.
\end{aligned}$$

5.3. **Sprzężenie liczby zespolonej i jego własności.**

Definicja 5.4. Niech $z = x + iy$, gdzie $x, y \in \mathbb{R}$. **Sprzężeniem** liczby z nazywamy liczbę $\overline{z}$ daną wzorem

$$\overline{z} = x - iy. \tag{41}$$



RYSUNEK 7. Sprzężenie liczby zespolonej.

Twierdzenie 5.2. Własności sprzężenia liczb zespolonych. *Niech z, z_1, $z_2 \in \mathbb{Z}$. Prawdziwe są następujące własności:*

1) $\overline{z_1 + z_2} = \overline{z_1} + \overline{z_2}$;
2) $\overline{z_1 - z_2} = \overline{z_1} - \overline{z_2}$;
3) $\overline{z_1 \cdot z_2} = \overline{z_1} \cdot \overline{z_2}$;
4) $\overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)} = \frac{\overline{z_1}}{\overline{z_2}}$, *dla* $z_2 \neq 0$;
5) $\overline{(\overline{z})} = z$;
6) $z + \overline{z} = 2\mathrm{Re}\, z$;
7) $z - \overline{z} = 2i\mathrm{Im}\, z$.

5.4. **Moduł i argument liczby zespolonej.**

Definicja 5.5. Niech $z = x + iy$, gdzie $x, y \in \mathbb{R}$, będzie dowolną liczbą zespoloną. **Modułem liczby zespolonej** z nazywamy liczbę rzeczywistą $|z|$ daną wzorem

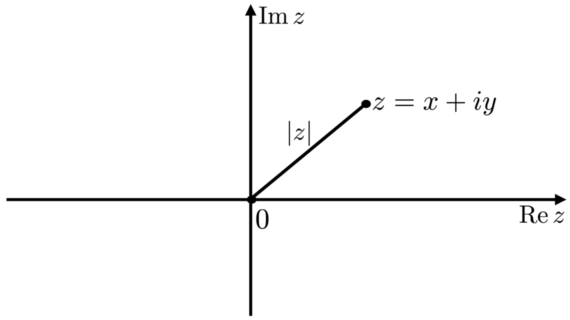
$$|z| = \sqrt{x^2 + y^2}. \tag{42}$$

Innym, powrzechnie stosowanym oznaczeniem modułu liczby zespolonej z jest symbol $r = |z|$.

Przykład 5.3. Obliczymy moduł liczby $z = -2 - 4\sqrt{2}i$. Część rzeczywista liczby z wynosi $x = -2$, zaś część urojona $y = -4\sqrt{2}$, zatem

$$|z| = \sqrt{(-2)^2 + (-4\sqrt{2})^2} = \sqrt{4 + 32} = 6.$$

Geometrycznie moduł liczby zespolonej z to odległość tej liczby od początku układu współrzędnych.

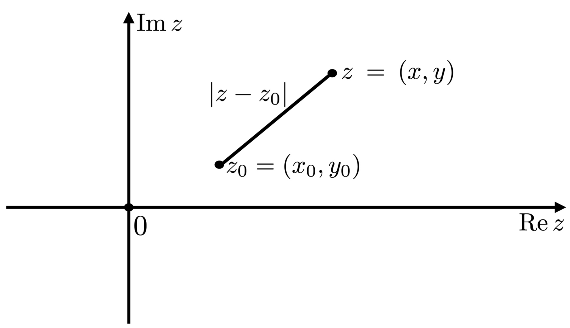


Rysunek 8. Interpretacja geometryczna modułu liczby zespolonej.

Powyższą interpretację możemy rozszeżyć na dwie dowolne liczby zespolone. Niech mianowicie $z_0 = x_0 + iy_0$ oraz $z = x + iy$ będą dwiema liczbami zespolonymi. Wówczas $z - z_0 = (x - x_0) + i(y - y_0)$ oraz $\mathrm{Re}\,(z - z_0) = x - x_0$, $\mathrm{Im}\,(z - z_0) = y - y_0$. Mamy

$$|z - z_0| = \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}. \tag{43}$$

Zauważmy, że wyrażenie po prawej stronie równości jest zwykłą odległością euklidesową punktu (x, y) od punktu (x_0, y_0). Zatem dla dowolnych liczb zespolonych z, $z_0 \in \mathbb{Z}$ moduł ich różnicy $|z - z_0|$ oznacza odległość z od z_0 na płaszczyźnie zespolonej.



Rysunek 9. Interpretacja geometryczna modułu różnicy dwóch liczb zespolonych.

Twierdzenie 5.3. Własności modułu liczby zespolonej. *Niech z, z_1, $z_2 \in \mathbb{Z}$. Prawdziwe są następujące własności:*

1) $|z| \geqslant 0$, *przy czym* $|z| = 0$ *wtedy i tylko wtedy, gdy* $z = 0$;
2) $|z_1 + z_2| \leqslant |z_1| + |z_2|$;
3) $|z_1| - |z_2| \leqslant |z_1 - z_2|$;
4) $z \cdot \overline{z} = |z|^2$;
5) $|z_1 \cdot z_2| = |z_1| \cdot |z_2|$;
6) $\left|\dfrac{z_1}{z_2}\right| = \dfrac{|z_1|}{|z_2|}$, *jeżeli* $z_2 \neq 0$.

Definicja 5.6. Argument liczby zespolonej. Niech $z = x + iy$, gdzie $x, y \in \mathbb{R}$, będzie liczbą zespoloną różną od zera. Argumentem liczby z nazywamy każdą liczbę rzeczywistą φ, spełniającą warunki:

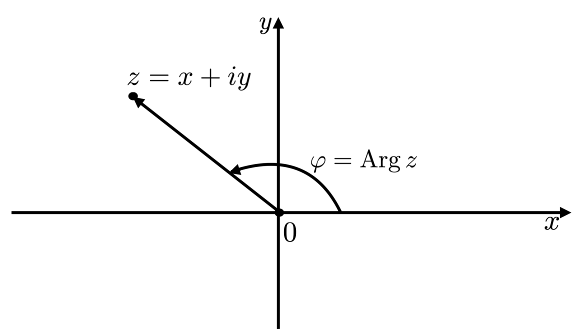
$$\begin{cases} \cos\varphi &= \dfrac{x}{|z|}, \\ \sin\varphi &= \dfrac{y}{|z|} \end{cases} \tag{44}$$

Argumentem głównym liczby z nazywamy ten argument, który należy do przedziału $[0, 2\pi)$.

Przyjmujemy, że argumentem liczby zespolonej $z = 0$ jest dowolna liczba rzeczywista $\varphi \in \mathbb{R}$, zaś argumentem głównym dla $z = 0$ jest $\varphi = 0$. Argument liczby z oznaczamy symbolem $\arg z$, zaś argument główny symbolem $\operatorname{Arg} z$. Mamy zatem

$$\arg z = \operatorname{Arg} z + 2k\pi, \text{ gdzie } k \in \mathbb{C}. \tag{45}$$

Geometrycznie argument liczby zespolonej z to kąt skierowany, jaki tworzy wektor $\overrightarrow{0z}$ z dodatnią półosią osi rzeczywistej $\operatorname{Re} z$.



Rysunek 10. Interpretacja geometryczna argumentu liczby zespolonej.

Przykład 5.4. Obliczamy argument główny liczby $z = -1 + i\sqrt{3}$. Korzystając ze wzorów (42) i (44) mamy:

$$|z| = \sqrt{1+3} = 2$$

a układ równań ma postać

$$\begin{cases} \cos\varphi &= \dfrac{-1}{2}, \\ \sin\varphi &= \dfrac{\sqrt{3}}{2}. \end{cases}$$

Kątem z przedziału $[0, 2\pi]$ spełniającym układ równań jest $\varphi = \frac{2}{3}\pi$. Zatem $\operatorname{Arg} z = \frac{2}{3}\pi$. Zauważmy przy tym, że rozważany układ równań jest spełniony także dla $\varphi_1 = -\frac{4}{3}\pi$ czy dla $\varphi_2 = \frac{8}{3}\pi$. Zarówno φ_1 jak i φ_2 są zatem argumentami liczby $z = -1 + \sqrt{3}$, przy czym $\varphi_1 = \varphi - 2\pi$, a $\varphi_2 = \varphi + 2\pi$. Korzystając z zależności $\arg z = \operatorname{Arg} z + 2k\pi$, gdzie $k \in \mathbb{C}$ możemy wyliczyć inne argumenty liczby z.

Uwaga 5.1. Przy wyznaczaniu argumentu głównego liczby zespolonej oraz w dalszej części wykładu pomocne będą własności funkcji trygonometrycznych podane w tabelach 4 oraz 5 .

TABELA 4. Tabela wartości funkcji trygonometrycznych dla niektórych miar kątów

x	0	$\frac{\pi}{12}$	$\frac{\pi}{8}$	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	π	$\frac{5\pi}{4}$	$\frac{3\pi}{2}$	2π
	$0°$	$15°$	$22,5°$	$30°$	$45°$	$60°$	$90°$	$120°$	$135°$	$150°$	$180°$	$225°$	$270°$	$360°$
$\sin x$	0	$\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$	$\frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	-1	0
$\cos x$	1	$\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$	$\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	0	1
$\operatorname{tg} x$	0	$2-\sqrt{3}$	$\sqrt{2}-1$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	–	$-\sqrt{3}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	0	1	–	0
$\operatorname{ctg} x$	–	$2+\sqrt{3}$	$\sqrt{2}+1$	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	0	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	-1	$-\sqrt{3}$	–	1	0	–

TABELA 5. Wzory redukcyjne

φ	$-\alpha$	$\frac{\pi}{2}-\alpha$	$\frac{\pi}{2}+\alpha$	$\pi-\alpha$	$\pi+\alpha$	$\frac{3\pi}{2}-\alpha$	$\frac{3\pi}{2}+\alpha$	$2\pi-\alpha$	$2\pi+\alpha$
	$-\alpha$	$90°-\alpha$	$90°+\alpha$	$180°-\alpha$	$180°+\alpha$	$270°-\alpha$	$270°+\alpha$	$360°-\alpha$	$360°+\alpha$
$\sin\varphi$	$-\sin\alpha$	$\cos\alpha$	$\cos\alpha$	$\sin\alpha$	$-\sin\alpha$	$-\cos\alpha$	$-\cos\alpha$	$-\sin\alpha$	$\sin\alpha$
$\cos\varphi$	$\cos\alpha$	$\sin\alpha$	$-\sin\alpha$	$-\cos\alpha$	$-\cos\alpha$	$-\sin\alpha$	$\sin\alpha$	$\cos\alpha$	$\cos\alpha$
$\operatorname{tg}\varphi$	$-\operatorname{tg}\alpha$	$\operatorname{ctg}\alpha$	$-\operatorname{ctg}\alpha$	$-\operatorname{tg}\alpha$	$\operatorname{tg}\alpha$	$\operatorname{ctg}\alpha$	$-\operatorname{ctg}\alpha$	$-\operatorname{tg}\alpha$	$\operatorname{tg}\alpha$
$\operatorname{ctg}\varphi$	$-\operatorname{ctg}\alpha$	$\operatorname{tg}\alpha$	$-\operatorname{tg}\alpha$	$-\operatorname{ctg}\alpha$	$\operatorname{ctg}\alpha$	$\operatorname{tg}\alpha$	$-\operatorname{tg}\alpha$	$-\operatorname{ctg}\alpha$	$\operatorname{ctg}\alpha$

5.5. **Postać trygonometryczna liczby zespolonej.** Niech $z = x + iy$ będzie dowolną, różną od 0 liczbą zespoloną. Zauważmy, że liczbę z możemy zapisać w postaci

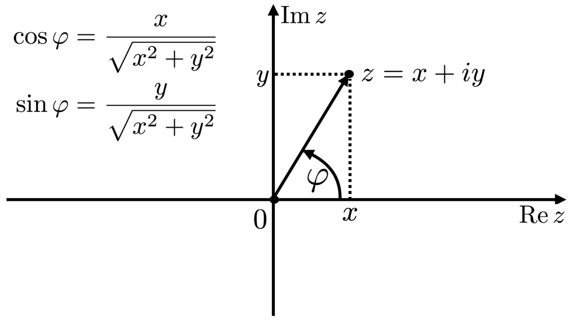
$$z = x + iy = \sqrt{x^2+y^2}\left(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} + i\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\right). \tag{46}$$

Łatwo również zauważyć, że liczba $\sqrt{x^2+y^2}$ określa moduł $r = |z|$, zaś wielkości $\dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$ i $\dfrac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}$ stanowią odpowiednio $\cos\varphi$ i $\sin\varphi$, gdzie $\varphi = \operatorname{Arg} z$.

Definicja 5.7. Dowolną liczbę zespoloną z (również $z = 0$) można zapisać w postaci

$$z = |z|(\cos\varphi + i\sin\varphi). \tag{47}$$

Powyższe przedstawienie liczby z nazywamy jej **postacią trygonometryczną**.



Rysunek 11. Interpretacja geometryczna liczby zespolonej.

Z określenia postaci trygonometrycznej liczby zespolonej łatwo wynika, że aby tę postać uzyskać wystarczy obliczyć moduł oraz jeden z argumentów danej liczby zespolonej.

Przykład 5.5. Przedstawimy liczbę $z = -1 - i$ w postaci trygonometrycznej. Wówczas $\operatorname{Re} z = -1$, $\operatorname{Im} z = -1$, skąd obliczamy $|z| = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$. Rozwiązując układ rwnań

$$\left\{ \begin{array}{rcrcl} \cos\varphi & = & \frac{-1}{\sqrt{2}} & = & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \sin\varphi & = & \frac{-1}{\sqrt{2}} & = & -\frac{\sqrt{2}}{2}, \end{array} \right. \tag{48}$$

otrzymujemy zbiór argumentów z, w szczególności argument główny

$$\varphi = \frac{5\pi}{4}.$$

Zatem $z = \sqrt{2}(\cos\frac{5\pi}{4} + i\sin\frac{5\pi}{4})$.

Warto podkreślić, że przedstawienie liczby zespolonej w postaci trygonometrycznej nie jest jednoznaczne. Wynika to z faktu, że dla danej liczby zespolonej, zbiór jej argumentów jest nieskończony. W szczególności w powyższym przykładzie moglibyśmy zapisać $z = \sqrt{2}(\cos(-\frac{3\pi}{4}) + i\sin(-\frac{3\pi}{4}))$ gdyż, jak łatwo sprawdzić, również kąt $(-\frac{3\pi}{4})$ spełnia układ (48).

Twierdzenie 5.4. Równość liczb zespolonych w postaci trygonometrycznej. *Załóżmy, że* $z_1, z_2 \in \mathbb{Z} \setminus 0$. *Jeżeli* $z_1 = r_1(\cos\varphi_1 + \sin\varphi_1)$ *oraz* $z_2 = r_2(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2)$, *to wówczas* $z_1 = z_2$ *wtedy i tylko wtedy, gdy* $r_1 = r_2$ *oraz* $\varphi_1 = \varphi_2 + 2k\pi$ *dla pewnej liczby całkowitej* k.

Twierdzenie 5.5. Iloczyn liczb zespolonych w postaci trygonomertycznej *Niech* $z_1 = r_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)$ *oraz* $z_2 = r_2(\cos\varphi_2 + \sin\varphi_2)$ *będą dwiema liczbami zespolonymi w postaci trygonometrycznej. Wtedy ich iloczyn jest równy*

$$z_1 \cdot z_2 = r_1 \cdot r_2(\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 + \varphi_2)). \tag{49}$$

A zatem przy mnożeniu liczb zespolonych w postaci trygonometrycznej ich moduły się mnoży, a argumenty dodaje.

Twierdzenie 5.6. Iloraz liczb zespolonych w postaci trygonometrycznej. *Niech* $z_1 = r_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)$ *oraz* $z_2 = r_2(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2)$ *będą dwiema liczbami zespolonymi w postaci trygonometrycznej, przy czym* $z_2 \neq 0$. *Wtedy ich iloraz jest równy*

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2}(\cos(\varphi_1 - \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 - \varphi_2)). \tag{50}$$

Zatem przy dzieleniu liczb zespolonych w postaci trygonometrycznej ich moduły się dzieli, a argumenty odejmuje.

Twierdzenie 5.7. Potęga liczby zespolonej w postaci trygonometrycznej. *Niech* $z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$*. Wtedy dla dowolnej liczby naturalnej* n *zachodzi*

(1) $z^n = r^n(\cos(n\varphi) + i\sin(n\varphi))$ *(***wzór de Moivre'a***).*

(2) $z^{-n} = \dfrac{1}{z^n}$.

Przykład 5.6. Przedstawiamy liczbę $(1-i)^{10}$ w postaci algebraicznej. Niech $z = 1 - i$. Wówczas $|z| = \sqrt{1^2+1^2} = \sqrt{2}$. Mamy zatem

$$\begin{cases} \cos\varphi &= \frac{1}{\sqrt{2}} &= \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \sin\varphi &= -\frac{1}{\sqrt{2}} &= -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{cases}$$

skąd otrzymujemy argument główny liczby z równy $\frac{7\pi}{4}$. skąd

$$z = \sqrt{2}\left(\cos\frac{7\pi}{4} + i\sin\frac{7\pi}{4}\right).$$

Aby obliczyć z^{10} korzystamy ze wzoru de Moivre'a:

$$\begin{aligned} z^{10} &= \left(\sqrt{2}\left(\cos\frac{7\pi}{4} + i\sin\frac{7\pi}{4}\right)\right)^{10} = (\sqrt{2})^{10}\left(\cos\frac{70\pi}{4} + i\sin\frac{70\pi}{4}\right) \\ &= 2^5\left(\cos\left(\frac{72}{4} - \frac{2}{4}\right)\pi + i\sin\left(\frac{72}{4} - \frac{2}{4}\right)\pi\right) = 32\left(\cos\left(18\pi - \frac{2}{4}\pi\right) + i\sin\left(18\pi - \frac{2}{4}\pi\right)\right). \end{aligned}$$

Korzystając z okresowości funkcji sinus i cosinus otrzymujemy

$$z^{10} = 32\left(\cos\left(-\frac{2}{4}\pi\right) + i\sin\left(-\frac{2}{4}\pi\right)\right) = 32\left(\cos\left(-\frac{\pi}{2}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right)\right).$$

Wstawiajac wartości $\cos\left(-\frac{\pi}{2}\right)$ i $\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right)$ otrzymujemy ostatecznie

$$z^{10} = 32(0 - i) = -32i$$

Przykład 5.7. Przedstawiamy liczbę $(-3-3i)^6$ w postaci algebraicznej. Niech $z = -3 - 3i$. Wówczas mamy

$$|z| = \sqrt{3^2+3^2} = \sqrt{9+9} = \sqrt{2\cdot 9} = 3\sqrt{2},$$

$$\cos\varphi = \frac{-3}{3\sqrt{2}} = -\frac{1}{\sqrt{2}} = -\frac{\sqrt{2}}{2},$$

$$\sin\varphi = \frac{-3}{3\sqrt{2}} = -\frac{1}{\sqrt{2}} = -\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Stąd $\varphi = \frac{5\pi}{4}$, zatem postać trygonometryczna liczby z to $z = 3\sqrt{2}\left(\cos\frac{5\pi}{4} + i\sin\frac{5\pi}{4}\right)$. Korzystając ze wzoru de Moivre'a otrzymujemy

$$\begin{aligned} z^6 &= (3\sqrt{2})^6\left(\cos\frac{30\pi}{4} + i\sin\frac{30\pi}{4}\right) = 3^6\cdot 2^3\left(\cos\left(6\pi + \frac{6}{4}\pi\right) + i\sin\left(6\pi + \frac{6}{4}\pi\right)\right) \\ &= 5832\left(\cos\frac{3\pi}{2} + i\sin\frac{3\pi}{2}\right) = -5832i. \end{aligned}$$

Przykład 5.8. Wyliczamy wartość wyrażenia
$$\frac{(-2+2i)^{10}}{(1-\sqrt{3}i)^{16}}.$$
Oznaczmy $z=-2+2i$ oraz $w=1-\sqrt{3}i$. Mamy wówczas $|z|=2\sqrt{2}$ oraz $|w|=2$. Niech teraz φ oznacza argument główny liczby z, zaś ψ argument główny liczby w. Mamy:
$$\begin{cases}\cos\varphi &= -\frac{\sqrt{2}}{2}\\ \sin\varphi &= \frac{\sqrt{2}}{2}\end{cases} \quad \text{oraz} \quad \begin{cases}\cos\psi &= \frac{1}{2}\\ \sin\psi &= -\frac{\sqrt{3}}{2}\end{cases}$$
skąd $\varphi=\frac{3}{4}\pi$, zaś $\psi=\frac{5}{3}\pi$. Korzystając ze wzoru de Moivre'a obliczymy teraz z^{10} oraz w^{16}. Mamy
$$z^{10}=(2\sqrt{2})^{10}\left(\cos\frac{30\pi}{4}+i\sin\frac{30\pi}{4}\right)=2^{15}\left(\cos\frac{3\pi}{2}+i\sin\frac{3\pi}{2}\right),$$
$$w^{16}=2^{16}\left(\cos\frac{80\pi}{3}+i\sin\frac{80\pi}{3}\right)=2^{16}\left(\cos\frac{2\pi}{3}+i\sin\frac{2\pi}{3}\right).$$
Stosując twierdzenie obliczamy
$$\begin{aligned}\frac{z^{10}}{w^{16}} &= \frac{2^{15}}{2^{16}}\left(\cos\left(\frac{3\pi}{2}-\frac{2\pi}{3}\right)+i\sin\left(\frac{3\pi}{2}-\frac{2\pi}{3}\right)\right)=\frac{1}{2}\left(\cos\frac{5\pi}{6}+i\sin\frac{5\pi}{6}\right)=\frac{1}{2}\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}+i\frac{1}{2}\right)\\ &= -\frac{\sqrt{3}}{4}-\frac{1}{4}i.\end{aligned}$$

5.6. Postać wykładnicza liczby zespolonej.

Definicja 5.8. Symbol $e^{i\varphi}$ Niech $\varphi\in\mathbb{R}$. Symbolem $e^{i\varphi}$ oznaczamy liczbę zespoloną $\cos\varphi+i\sin\varphi$. Mamy zatem
$$e^{i\varphi}=\cos\varphi+i\sin\varphi. \tag{51}$$

Wprost z definicji wynika,że $|e^{i\varphi}|=1$ oraz $\arg(e^{i\varphi})=\varphi+2k\pi$ dla $k\in\mathbb{Z}$.

Twierdzenie 5.8. Własności symbolu $e^{i\varphi}$. *Niech φ, φ_1, φ_2 będą dowolnymi liczbami rzeczywistymi i niech k będzie dowolną liczbą całkowitą. Wówczas*
1) $e^{i(\varphi_1+\varphi_2)}=e^{i\varphi_1}\cdot e^{i\varphi_2}$;
2) $e^{i(\varphi_1-\varphi_2)}=\dfrac{e^{i\varphi_1}}{e^{i\varphi_2}}$;
3) $(e^{i\varphi})^k=e^{ik\varphi}$;
4) $e^{i(\varphi+2k\pi)}=e^{i\varphi}$;
5) $e^{i\varphi}\neq 0$;
6) $e^{i\varphi_1}=e^{i\varphi_2} \iff \varphi_1=\varphi_2+2k\pi$.

Definicja 5.9. Postać wykładnicza liczby zespolonej. Każdą liczbę zespoloną z można zapisać w postaci
$$z=re^{i\varphi}, \tag{52}$$
gdzie r oznacza moduł, zaś $\varphi\in\mathbb{R}$ jest argumentem liczby z. Postać $z=re^{i\varphi}$ nazywamy postacią wykładniczą liczby zespolonej.

Przykład 5.9. Zapiszemy liczbę $z=-i$ w postaci wykładniczej. Aby tego dokonać rozpoczynamy od obliczenia modułu i argumentu liczby z. Mamy: $|z|=\sqrt{0^2+1^2}=1$. Następnie:
$$\begin{cases}\cos\varphi &= \frac{0}{1} &= 0\\ \sin\varphi &= \frac{-1}{1} &= -1\end{cases}$$
Argumentem głównym z jest $\varphi=\frac{3\pi}{2}$, zatem $z=1e^{i\frac{3\pi}{2}}$.

Warto zapamiętać, że podobnie jak w przypadku postaci trygonometrycznej, zapis liczby zespolonej w postaci wykładniczej nie jest jednoznaczny. Wynika to z faktu, że dowolna liczba zespolona ma nieskończenie wiele argumentów.

Twierdzenie 5.9. Równość liczb zespolonych w postaci wykładniczej. *Niech* $z_1 = r_1 e^{i\varphi_1}$ *oraz* $z_2 = r_2 e^{i\varphi_2}$ *będą dwiema liczbami zespolonymi w postaci wykładniczej. Wówczas* $z_1 = z_2$ *wtedy i tylko wtedy, gdy* $r_1 = r_2$ *oraz* $\varphi_1 = \varphi_2 + 2k\pi$, *dla pewnej liczby całkowitej* k.

Twierdzenie 5.10. Działania na liczbach zespolonych w postaci wykładniczej. *Niech* $z = re^{i\varphi}$, $z_1 = r_1 e^{i\varphi_1}$ *oraz* $z_2 = r_2 e^{i\varphi_2}$ *będą liczbami zespolonymi w postaci wykładniczej oraz niech* k *będzie liczbą całkowitą, wówczas*

(1.) $\overline{z} = re^{-i\varphi}$;
(2.) $z_1 \cdot z_2 = r_1 \cdot r_2 e^{i(\varphi_1+\varphi_2)}$;
(3.) $\dfrac{z_1}{z_2} = \dfrac{r_1}{r_2} e^{i(\varphi_1-\varphi_2)}$ *dla* $z_2 \in \mathbb{C} \setminus 0$;
(4.) $\dfrac{1}{z} = \dfrac{1}{r} e^{-i\varphi}$ *dla* $z \in \mathbb{C} \setminus 0$;
(5.) $z^k = r^k e^{ik\varphi}$.

Przy pomocy liczby $e^{i\varphi} = \cos\varphi + i\sin\varphi$ wyrażamy cosinus i sinus kąta φ. Mamy mianowicie

Twierdzenie 5.11. Wzory Eulera.

$$\cos\varphi = \frac{e^{i\varphi} + e^{-i\varphi}}{2}, \qquad \sin\varphi = \frac{e^{i\varphi} - e^{-i\varphi}}{2i}. \tag{53}$$

Warto wspomnieć w tym miejscu o jeszcze jednym wzorze, również nazywamy wzorem Eulera lub tożsamością Eulera. Przedstawiając mianowicie liczbę -1 w postaci wykładniczej, tj. jako $-1 = e^{i\pi}$, otrzymujemy wzór łączącym pięć najważniejszych stałych matematycznych:

$$e^{i\pi} + 1 = 0. \tag{54}$$

Przez wielu wzór ten uważany jest za najpiękniejszy wzór matematyczny.

6. Liczby zespolone - c.d.

6.1. Pierwiastki z liczby zespolonej.

Definicja 6.1. Pierwiastek z liczby zespolonej. Niech n będzie liczbą naturalną. Pierwiastkiem stopnia n z liczby zespolonej z nazywamy każdą liczbę zespoloną w spełniającą warunek

$$w^n = z \tag{55}$$

Symbolem $\sqrt[n]{z}$ oznaczamy zbiór pierwiastków n tego stopnia z liczby zespolonej z.

Przykład 6.1. Obliczmy $\sqrt{3-4i}$. Zgodnie z definicją poszukujemy wszystkich liczb zespolonych $w = x + iy$ spełniających równanie

$$w^2 = 3 - 4i \quad \Leftrightarrow \quad (x+iy)^2 = 3 - 4i \quad \Leftrightarrow \quad x^2 + 2ixy - y^2 = 3 - 4i$$

$$\begin{cases} x^2 - y^2 & = & 3 \\ 2xy & = & -4 \end{cases}$$

Wyliczając z drugiego równania $y = \frac{-2}{x}$ (zauważmy, że dla $x = 0$ równanie to jest sprzeczne, a zatem możemy założyć, że $x \neq 0$) i wstawiając do równania pierwszego otrzymujemy

$$x^2 - \frac{4}{x^2} = 3,$$

skąd z kolei, mnożąc obustronnie przez x^2 i przenosząc wszystko na lewą stronę otrzymujemy równanie dwukwadratowe

$$x^4 - 3x^2 - 4 = 0.$$

Wstawiając następnie pomocniczą zmienną $t = x^2$, gdzie $t > 0$ dostajemy równanie kwadratowe

$$t^2 - 3t - 4 = 0,$$

którego rozwiązaniami są liczby $t_1 = 4$ i $t_2 = -1$, przy czym t_2 nie spełnia założenia $t > 0$. Zatem $x^2 = 4$, a stąd $x_1 = 2$ lub $x_2 = -2$. Otrzymaliśmy już części rzeczywiste szukanych pierwiastków, pozostaje jeszcze wyliczyć części urojone, korzytając z wcześniej wyprowadzonej zależności $y = \frac{-2}{x}$. I tak: dla $x_1 = 2$ otrzymujemy $y_1 = -1$, zaś dla $x_2 = -2$, $y_2 = 1$. Wobec tego poszukiwanymi pierwiastkami są liczby

$$w_1 = 2 - i, \quad w_2 = -2 + i.$$

Twierdzenie 6.1. Wzór na pierwiastki z liczby zespolonej. *Dla każdej różnej od zera liczby zespolonej z i dla każdej liczby naturalnej n istnieje dokładnie n różnych pierwiastków zespolonych stopnia n z liczby z, tworzących zbiór $\{w_0, w_1 \ldots, w_{n-1}\}$. Jeżeli liczba z jest postaci $z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$, to pierwiastki te wyrażają się wzorami*

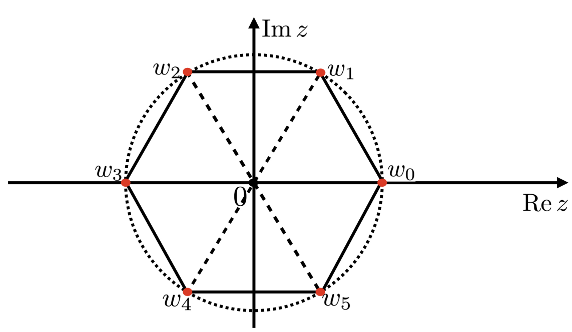
$$w_k = \sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\varphi + 2k\pi}{n} + i\sin\frac{\varphi + 2k\pi}{n}\right), \quad k = 0, 1 \ldots, n-1. \tag{56}$$

Podkreślmy, że symbol $\sqrt[n]{r}$ występujący w powyższym wzorze oznacza "zwykły" pierwiastek arytmetyczny stopnia n z liczby rzeczywistej r, jest zatem określony jednoznacznie. Warto zapamiętać, że w interpretacji geometrycznej wszystkie pierwiastki zespolone stopnia n z liczby $z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$ leżą na okręgu o środku w punkcie $(0, 0)$ i promieniu $\sqrt[n]{r}$, w punktach będących wierzchołkami n-kąta foremnego wpisanego w ten okrąg. Warto także zaznaczyć, że zbiór pierwiastków z liczby zespolonej z nie zależy od wyboru argumentu tej liczby.

Przykład 6.2. Obliczymy pierwiastki stopnia 6 z liczby $z = 1$. Łatwo zauważyć, że liczbę $z = 1$ możemy zapisać jako $1 = 1(\cos 0 + i \sin 0)$, stąd $r = 1$ oraz $\varphi = 0$. Oznaczmy $\sqrt[6]{1} = \{w_0, \dots, w_5\}$ i zastosujemy wzór (56). Mamy

$$\begin{aligned}
w_0 &= \sqrt[6]{1}(\cos\frac{0+0}{6} + i\sin\frac{0+0}{6}) = 1(1+0i) = 1\\
w_1 &= \sqrt[6]{1}(\cos\frac{0+2\pi}{6} + i\sin\frac{0+2\pi}{6}) = 1(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}) = \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2},\\
w_2 &= \sqrt[6]{1}(\cos\frac{0+4\pi}{6} + i\sin\frac{0+4\pi}{6}) = 1(\cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3}) = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2},\\
w_3 &= \sqrt[6]{1}(\cos\frac{0+6\pi}{6} + i\sin\frac{0+6\pi}{6}) = 1(\cos\pi + i\sin\pi) = -1\\
w_4 &= \sqrt[6]{1}(\cos\frac{0+8\pi}{6} + i\sin\frac{0+8\pi}{6}) = 1(\cos\frac{4\pi}{3} + i\sin\frac{4\pi}{3}) = -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2},\\
w_5 &= \sqrt[6]{1}(\cos\frac{0+10\pi}{6} + i\sin\frac{0+10\pi}{6}) = 1(\cos\frac{5\pi}{3} + i\sin\frac{5\pi}{3}) = \frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}.
\end{aligned}$$

Zaznaczając liczby w_0, w_1, w_2, w_3, w_4 i w_5 na płaszczyźnie zespolonej otrzymamy



RYSUNEK 12. Interpretacja geometryczna zbioru pierwiasków 6-go stopnia z liczby zespolonej $z = 1$.

Zapiszmy teraz $z = 1(\cos 2\pi + i \sin 2\pi)$. Tym razem zastosujemy wzór (56) dla $r = 1$ i $\varphi = 2\pi$. Mamy:

$$\begin{aligned}
w_0 &= \sqrt[6]{1}(\cos\frac{2\pi+0}{6} + i\sin 2\pi + 06) = 1(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}) = \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2},\\
w_1 &= \sqrt[6]{1}(\cos\frac{2\pi+2\pi}{6} + i\sin\frac{2\pi+2\pi}{6}) = 1(\cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3}) = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2},\\
w_2 &= \sqrt[6]{1}(\cos\frac{2\pi+4\pi}{6} + i\sin\frac{2\pi+4\pi}{6}) = 1(\cos\pi + i\sin\pi) = -1.\\
w_3 &= \sqrt[6]{1}(\cos\frac{2\pi+6\pi}{6} + i\sin\frac{2\pi+6\pi}{6}) = 1(\cos\frac{4\pi}{3} + i\sin\frac{4\pi}{3}) = -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2},\\
w_4 &= \sqrt[6]{1}(\cos\frac{2\pi+8\pi}{6} + i\sin\frac{2\pi+8\pi}{6}) = 1(\cos\frac{5\pi}{3} + i\sin\frac{5\pi}{3}) = \frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2},\\
w_5 &= \sqrt[6]{1}(\cos\frac{2\pi+10\pi}{6} + i\sin\frac{2\pi+10\pi}{6}) = 1(1+0i) = 1.
\end{aligned}$$

Łatwo widać, że otrzymane liczby różnią się tylko kolejnością.

Przykład 6.3. Obliczmy pierwiastki stopnia 4 z liczby $z = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$. Rozpoczniemy od przedstawienia liczby z w postaci trygonometrycznej. Mamy: $|z| = \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{3}{4}} = 1$ oraz

$$\begin{cases} \cos\varphi = \frac{-\frac{1}{2}}{1} = -\frac{1}{2} \\ \sin\varphi = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{1} = \frac{\sqrt{3}}{2}. \end{cases}$$

Argumentem głównym liczby z jest $\varphi = \frac{2\pi}{3}$, stąd

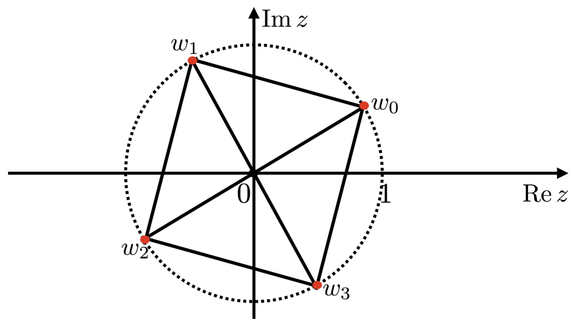
$$z = 1(\cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3}).$$

Do obliczenia pierwiastków z liczby z wykorzystamy wzór (56). Mamy:

$$\begin{aligned}
w_0 &= \sqrt[4]{1}(\cos\frac{\frac{2\pi}{3}+0}{4} + i\sin\frac{\frac{2\pi}{3}+0}{4}) = 1(\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6}) = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i,\\
w_1 &= \sqrt[4]{1}(\cos\frac{\frac{2\pi}{3}+2\pi}{4} + i\sin\frac{\frac{2\pi}{3}+2\pi}{4}) = 1(\cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3}) = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i,\\
w_2 &= \sqrt[4]{1}(\cos\frac{\frac{2\pi}{3}+4\pi}{4} + i\sin\frac{\frac{2\pi}{3}+4\pi}{4}) = 1(\cos\frac{7\pi}{6} + i\sin\frac{7\pi}{6}) = -\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i,\\
w_3 &= \sqrt[4]{1}(\cos\frac{\frac{2\pi}{3}+6\pi}{4} + i\sin\frac{\frac{2\pi}{3}+6\pi}{4}) = 1(\cos\frac{5\pi}{3} + i\sin\frac{5\pi}{3}) = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i.
\end{aligned}$$

Na płaszczyźnie zespolonej otrzymane pierwiastki tworzą kwadrat o środku w punkcie (0,0), jak na rysunku 13

Bywa, że łatwo jest odgadnąć jeden z pierwiastków z danej liczby zespolonej. Na przykład liczba $w_0 = 1$ jest jednym z pierwiastków (dowolnego stopnia) z liczby $z = 1$. W takiej sytuacji do obliczenia pozostałych pierwiastków wygodnie jest zastosować następujące twierdzenie:



Rysunek 13. Interpretacja geometryczna zbioru pierwiastków z liczby z.

Twierdzenie 6.2. *Jeżeli w_0 jest jednym z pierwiastków n-tego stopnia z liczby z to wówczas pozostałe pierwiastki wyrażają się wzorem:*

$$w_k = w_0(\cos\frac{2k\pi}{n} + i\sin\frac{2k\pi}{n}), \quad k = 1, \ldots, n-1. \tag{57}$$

Przykład 6.4. Obliczmy pierwiastki stopnia 3 z liczby $(2+2i)^6$. Poszukujemy zatem liczb $w_0, w_1, w_2 \in \sqrt[3]{(2+2i)^6}$. Zapisując $(2+2i)^6$ jako $((2+2i)^2)^3$ łatwo zauważyć, że jednym z pierwiastków jest liczba $(2+2i)^2$. Niech zatem

$$w_0 = (2+2i)^2.$$

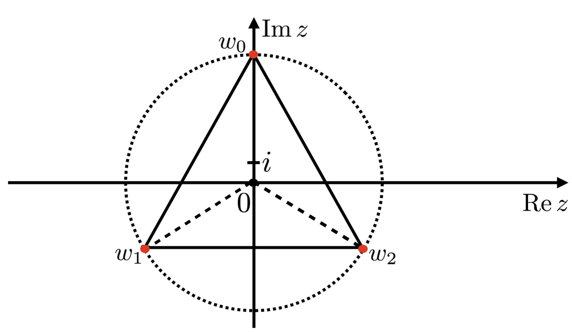
Wykorzystując wzór skróconego mnożenia otrzymujemy

$$w_0 = 4 + 8i + 4i^2 = 8i.$$

Aby obliczyć pozostałe pierwiastki wykorzystamy wzór (57). Mamy:

$$\begin{aligned} w_1 &= w_0(\cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3}) = 8i(-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i) = -4i + 4\sqrt{3}i^2 = -4\sqrt{3} - 4i, \\ w_2 &= w_0(\cos\frac{4\pi}{3} + i\sin\frac{4\pi}{3}) = 8i(-\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i) = -4i - 4\sqrt{3}i^2 = 4\sqrt{3} - 4i. \end{aligned}$$

Na koniec zilustrujemy graficznie otrzymamy zbiór pierwiastków:



Rysunek 14. Interpretacja geometryczna zbioru pierwiastków z liczby z.

6.2. **Równania w zbiorze liczb zespolonych.**

Przykład 6.5. Rozwiążemy równanie: $(z+\overline{z})+i(z-\overline{z})+z=2i-6$ z niewiadomą $z\in\mathbb{Z}$. Do rozwiązania zastosujemy postać algebraiczną liczby z Niech zatem $z=x+iy$, gdzie $x,y\in\mathbb{R}$. Otrzymujemy :

$$(x+iy+x-iy)+i(x+iy-(x-iy))+x+iy=2i-6.$$

stąd

$$2x+i(2iy)+x+iy=2i-6 \quad\Rightarrow\quad 3x-2y+iy=2i-6.$$

Porównując części rzeczywiste i urojone prawej i lewej strony równania otrzymujemy układ równań.

$$\begin{cases} 3x-2y &= -6 \\ y &= 2 \end{cases}$$

którego rozwiązaniem jest

$$\begin{cases} x &= -\frac{2}{3} \\ y &= 2 \end{cases}$$

Rozwiązaniem równania jest więc liczba $z=-\frac{2}{3}+2i$.

Przykład 6.6. Rozwiążemy równanie

$$2z^2-2z+1=0$$

Do rozwiązania zastosujemy wzory na pierwiastki równania kwadratowego. Mamy

$$\Delta=(-2)^2-4\cdot2\cdot1=4-8=-4=4i^2,$$

skąd $\sqrt{\Delta}=\sqrt{4i^2}=2i$ lub $\sqrt{\Delta}=-2i$ Do obliczenia rozwiązań równania wystarczy użyć jednego z wyliczonych powyżej pierwiastków z Δ, w tym przypadku przyjmiemy $\sqrt{\Delta}=2i$. Mamy zatem

$$z_1=\frac{2-2i}{4}=\frac{1}{2}-\frac{1}{2}i,$$

oraz

$$z_2=\frac{2+2i}{4}=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}i.$$

Łatwo sprawdzić, że podstawiając do wzorów $\sqrt{\Delta}=-2i$ otrzymamy taki sam zbiór pierwiastków wyjściowego równania.

Przykład 6.7. Rozwiążemy równanie

$$z^4=(1-i)^4.$$

Na podstawie definicji pierwiastków zespolonych wnioskujemy, że zbiór rozwiązań równania pokrywa się ze zbiorem pierwiastków stopnia 4 z liczby $(1-i)^4$. Zatem z_0, z_1, z_2, z_3 są rozwiązaniami wyjściowego równania wtedy i tylko wtedy, gdy z_0, z_1, z_2, $z_3\in\sqrt[4]{(1-i)^4}$. Łatwo stwierdzamy, że jedną z takich liczb jest $1-i$. Przyjmijmy wobec tego

$$z_0=1-i.$$

Pozostałe rozwiązania obliczymy wykorzystując wzór de Morgana. Mamy:

$$\begin{aligned} z_1 &= z_0(\cos\frac{2\pi}{4}+i\sin\frac{2\pi}{4})=(1-i)(0+i)=i-i^2=1+i; \\ z_2 &= z_0(\cos\frac{4\pi}{4}+i\sin\frac{4\pi}{4})=(1-i)(-1+0i)=-1+i; \\ z_3 &= z_0(\cos\frac{6\pi}{4}+i\sin\frac{6\pi}{4})=(1-i)(0-i)=-i+i^2=-1-i. \end{aligned}$$

Ostatecznie więc zbiorem rozwiązań równania jest

$$\{1-i, 1+i, -1-i, -1+i\}.$$

6.3. **Zbiory liczb zespolonych – interpretacja geometryczna.** Rozpoczniemy od interpretacji geometrycznej liczb zespolonych w postaci algebraicznej

Przykład 6.8. Rozważmy nierówność

$$\operatorname{Re} z + 2\operatorname{Im} z \leqslant 1,$$

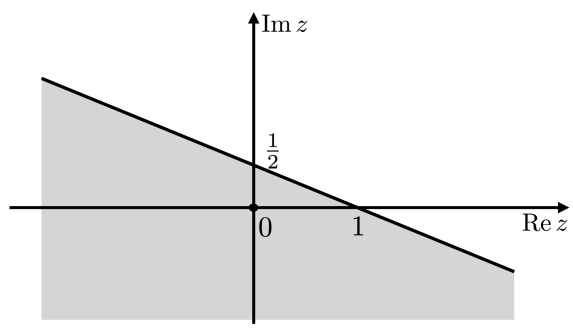
gdzie z jest liczbą zespoloną. Zauważamy, że choć między liczbamy zespolonymi nie określa się nierówności to nasza nierówność dotyczy w istocie liczb rzeczywistych, bowiem zarówno $\operatorname{Re} z$ jak i $\operatorname{Im} z$ są liczbami rzeczywistymi. W rozwiązaniu wykorzystamy postać algebraiczna liczby z Niech $z = x + iy$, gdzie $x, y \in \mathbb{R}$. Rozważna nierówność ma teraz postać

$$x + 2y \leqslant 1,$$

co po przekrztałceniu daje

$$y \leqslant -\frac{x}{2} + \frac{1}{2}.$$

Geometrycznie zatem rozwiązaniem jest zbiór



Rysunek 15. Interpretacja geometryczna rozwiązania z Przykładu 6.8.

Przykład 6.9. Na płaszczyźnie zespolonej narysujemy zbiór liczb zespolonych spełniających warunek:

$$\operatorname{Im}[(1+2i)z - 3i] < 0.$$

Skorzystamy z postaci algebraicznej liczby z. Niech $z = x + iy$, gdzie $x, y \in \mathbb{R}$. Oznaczmy przez w liczbę $(1+2i)z - 3i$. Mamy:

$$w = (1+2i)(x+iy) - 3i = x + iy + 2ix + 2i^2y - 3i = x - 2y + i(y + 2x - 3).$$

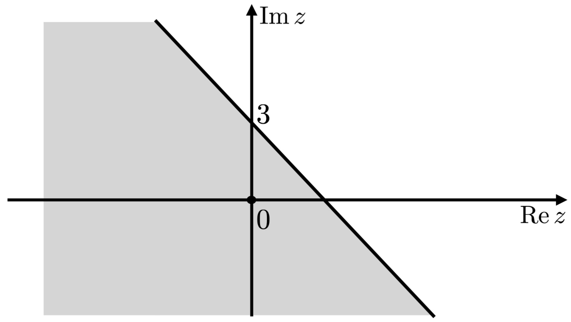
Rozwiązując nierówność $\operatorname{Im} w < 0$ otrzymujemy

$$y + 2x - 3 < 0,$$

co po przekształceniu daje

$$y < -2x + 3.$$

Rozwiązanie zadania przedstawia się zatem następująco



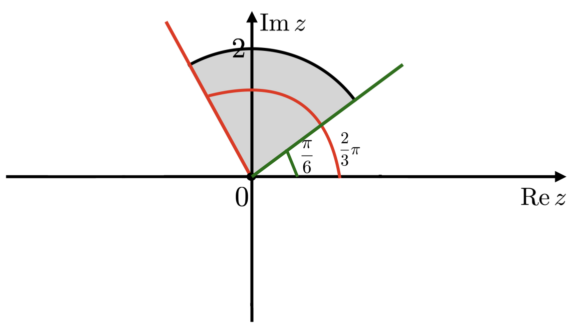
Rysunek 16. Interpretacja geometryczna rozwiązania z Przykładu 6.9.

Bardzo ważna jest umiejętność interpretacji geometrycznej równań i nierówności z modułem i argumentem liczby zespolonej.

Przykład 6.10. Na płaszczyźnie zespolonej narysujemy zbiór liczb zespolonych spełniających warunki:

$$\frac{\pi}{6} < \operatorname{Arg} z \leqslant \frac{2}{3}\pi \quad \text{oraz} \quad |z| \leqslant 2.$$

Mamy kolejno: zbiór liczb zespolonych z takich, że $\operatorname{Arg} z > \frac{\pi}{6}$ nastepnie zbiór liczb zespolonych z takich,że $\operatorname{Arg} z \leqslant \frac{2}{3}\pi$ oraz zbiór liczb zespolonych z takich, że $|z| \leqslant 2$ Częścią wspólną jest zatem



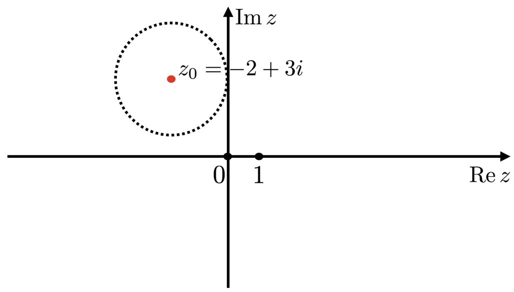
Rysunek 17. Interpretacja geometryczna rozwiązania z Przykładu 6.10.

Przykład 6.11. Na płaszczyźnie zespolonej narysujemy zbiór liczb zespolonych spełniających warunek

$$|z + 2 - 3i| < 2.$$

Nierówność $|z - z_0| < r$ dla $r > 0$ opisuje zbiór liczb zespolonych leżących w odległości mniejszej od r od liczby z_0. Geometrycznie jest to zatem koło bez brzegu o środku w punkcie z_0 i promieniu równym r. Przekształcamy wyjściową nierówność

$$|z + 2 - 3i| < 2 \iff |z - (-2 + 3i)| < 2,$$



Rysunek 18. Interpretacja geometryczna rozwiązania z Przykładu 6.11.

skąd $z_0 = -2+3i$ oraz $r = 2$. Wobec tego rozwiązaniem nierówności $|z+2-3i| < 2$ jest zbiór

6.4. **Zadania do samodzielnego rozwiązania.**

Zadanie 6.1. Oblicz i^n dla $n = 1,2,3,4,5....$ Przedyskutuj rozwiązanie.

Zadanie 6.2. Dane są liczby zespolone w poniższej postaci. Wykonać niezbędne obliczenia a następnie wskazać $\operatorname{Re} z$ oraz $\operatorname{Im} z$

1. $z = \dfrac{4i(1-16i)-(1+i)^2}{(i+2)(2i+1)}$, Odp. $\dfrac{2}{5} - \dfrac{64}{5}i \Rightarrow \operatorname{Re} z = \dfrac{2}{5}$ oraz $\operatorname{Im} z = -\dfrac{64}{5}$
2. $z = i^{135}$, Odp. $-i \Rightarrow \operatorname{Re} z = 0$ oraz $\operatorname{Im} z = -1$
3. $z = \dfrac{(1-i)^2}{(-2+2i)^2 i^{63}}$, Odp. $\dfrac{i}{4} = \dfrac{1}{4}i \Rightarrow \operatorname{Re} z = 0$ oraz $\operatorname{Im} z = \dfrac{1}{4}$

Zadanie 6.3. Obliczyć $\operatorname{Re} z$, $\operatorname{Im} z$, $|z|$ i $\overline{z}$.

1. $z = (3-i)(2-5i)+i$,
2. $z = \dfrac{3-i}{4-3i}$,
3. $z = \dfrac{i}{1+2i} - 4 + 3i$,
4. $z = \dfrac{5+3i}{2+3i} + 2 + 4i$,
5. $z = \dfrac{3}{1-i} - (1-2i)(1+i)$,
6. $z = \dfrac{4+i}{i-2}(3-i) + 2 - 7i$.

Zadanie 6.4. Przedstawić w postaci algebraicznej liczby zespolone

1. $(2+i)(3-i)+(2+3i)(3+4i)$,
2. $(4+\sqrt{3}i)(5-2\sqrt{2}i) - (\sqrt{2}-\sqrt{6}i)$,
3. $\dfrac{(5+i)(7-6i)}{3+i}$,
4. $(3+i)^3 + (3-i)^3$,
5. $\dfrac{(1+i)^5}{(1-i)^3}$,
6. $\dfrac{(1-i)^5-1}{(1+i)^5+1}$,
7. $\dfrac{(1+i)^n}{(1-i)^{n-2}}$, dla $n = 2,3,4\ldots$,
8. $(1-i)^{4n}$, dla $n \in \mathbb{N}$.

Zadanie 6.5. Wykonać podane działania dla $z = 5-2i$, $w = 3+4i$:

1. $z \cdot \bar{w}$, Odp. $7-26i$.
2. $\dfrac{z^2}{w}$, Odp. $-\dfrac{17}{25} - i\dfrac{144}{25}$.

3. $\dfrac{z-w}{\bar{z}+\bar{w}}$, Odp. $\dfrac{7}{17}-i\dfrac{11}{17}$. 4. $\dfrac{\mathrm{Re}\, z + i\mathrm{Im}\, w}{z+w}$, Odp. $\dfrac{12}{17}+i\dfrac{11}{34}$.

Zadanie 6.6. Znaleźć liczby rzeczywiste x, y spełniające podane równanie:

$$\frac{x+yi}{x-yi}=\frac{9-2i}{3+yi}$$

Odp. $x=\frac{2}{3}\sqrt{19}-\frac{38}{3}$ i $y=2\sqrt{19}$ lub $x=-\frac{2}{3}\sqrt{19}-\frac{38}{3}$ i $y=-2\sqrt{19}$.

Zadanie 6.7. Rozwiązć podane równanie przyjmując, że $z=x+iy$

1. $\dfrac{2+i}{z-1+4i}=\dfrac{1-i}{2z+i}$, Odp. $z=\dfrac{7}{6}-i\dfrac{1}{6}$.

Zadanie 6.8. Niech $z_1=-2\sqrt{3}+2i$, $z_2=-8i$, $z_3=-\sqrt{3}-i$. Obliczyć:

1. $z_1\cdot z_2$, Odp. $16+16i\sqrt{3}$. 2. $z_1\cdot z_3$, Odp. 8. 3. $\dfrac{z_1}{z_2}$, Odp. $-\dfrac{1}{4}-\dfrac{\sqrt{3}}{4}i$.

4. $\dfrac{z_1}{z_3}$, Odp. $1-i\sqrt{3}$. 5. z_1^{12}, Odp. 4^{12}. 6. $\dfrac{z_1^{12}}{z_3^{99}}$, Odp. $\dfrac{1}{2^{75}}i$.

Zadanie 6.9. Znaleźć na płaszczyźnie zespolonej zbiór punktów:

1. $A=\{z\in\mathbb{C}: |z-3+2i|=4\}$
2. $B=\{z\in\mathbb{C}: |z+1-3i|=2\}$
3. $C=\{z\in\mathbb{C}: |z-3+2i|\leqslant 9\}$
4. $D=\{z\in\mathbb{C}: 1<|z+3i|<2\}$
5. $F=\{z\in\mathbb{C}: \mathrm{Im}\,(z-3+2i)>4\}$
6. $G=\{z\in\mathbb{C}: \mathrm{Re}\,(z+3i)<2\}$
7. $H=\{z\in\mathbb{C}: \mathrm{Re}\,(z^2+2i)\geqslant 6\}$
8. $I=\{z\in\mathbb{C}: \mathrm{Re}\, z\geqslant 7\}$
9. $J=\{z\in\mathbb{C}: \mathrm{Im}\,(\bar{z}-i+2)\leqslant 3\}$
10. $K=\{z\in\mathbb{C}: |z+4-i|\geqslant 4\}$
11. $L=\{z\in\mathbb{C}: 1<|z+1+i|<100\}$
12. $M=\{z\in\mathbb{C}: \mathrm{Re}\, z>7\wedge \mathrm{Im}\, z<2\}$
13. $N=\{z\in\mathbb{C}: |z|=2\}$
14. $O=\{z\in\mathbb{C}: |z+i|\leqslant 1\}$
15. $P=\{z\in\mathbb{C}: \mathrm{Re}\, z+\mathrm{Im}\, z=2\}$
16. $S=\{z\in\mathbb{C}: 1\leqslant|\mathrm{Re}\, z|<2\}$
17. $T=\{z\in\mathbb{C}: 0<\mathrm{Re}\,(iz)<1\}$

Zadanie 6.10. Rozwiązać w dziedzinie zespolonej równania

1. $x^2+9=0$
2. $x^2+5=0$
3. $x^2-25=0$
4. $x^2-2x+5=0$
5. $x^2-6x+13=0$
6. $x^2+x-2=0$
7. $x^2-(2-i)x-1+5i=0$
8. $|z|-z=1+2i$,
9. $z^2=i$,
10. $z^2=3-4i$,
11. $z^2=\bar{z}$,
12. $z^3=\bar{z}$,
13. $z^2+2|z|^2=2$,
14. $z^3+|z|^2+z=0$,
15. $(z+i)(\bar{z}-i)^2(iz-1)^3=64$.
16. $z^2+2z+2=0$.

17. $z^2 + (2+2i)z + 2i = 0.$
18. $z^2 + (1+4i)z - 5 - i = 0.$
19. $(2+3i)z^2 + (4i-6)z + 6 + 9i = 0.$
20. $(i-3)z^2 + (2+6i)z - 27 - 11i = 0.$
21. $(1+i)z^2 + (2i-6)z + 3 - 9i = 0.$

Zadanie 6.11. Rozwiązać równania w zbiorze liczb zespolonych:

1. $x^2 - (5-2i)x + 9 - 7i = 0$, Odp. $3+i$, $2-3i$.
2. $x^2 - (2+i)x - 1 + 7i = 0.$ Odp. $3-i$, $-1+2i$.

Zadanie 6.12. Zapisać liczby zespolone w postaci trygonometrycznej:

1. $z = -\sqrt{2}$
2. $z = 5i$
3. $z = 2 - i\sqrt{12}$
4. $z = -2 + 2i$
5. i,
6. $2 + 2i$,
7. $-1 + \sqrt{3}i$,
8. $\dfrac{3+2i}{-2+3i}$,
9. $(\sqrt{3}+1) + (\sqrt{3}-1)i$,
10. $2 + \sqrt{3} + i.$
11. $\sqrt{3}i - 1.$
12. $3 - \sqrt{3}i.$
13. $\dfrac{\sqrt{3}+i}{2}.$
14. $i - 1.$
15. $i - 4.$
16. $2 + 2i.$
17. $-8i.$
18. $3 - 3i.$
19. $-7 - 7i$ Odp. $7\sqrt{2}(\cos\frac{5}{4}\pi + i\sin\frac{5}{4}\pi)$
20. $-5 + 5\sqrt{3}i$ Odp. $10(\cos\frac{2}{3}\pi + i\sin\frac{2}{3}\pi)$

Zadanie 6.13. Obliczyć (rozwiązanie przedstawić w postaci kanonicznej)

1. $(\sqrt{3}i - 1)^{12}$
2. $(\sqrt{3} + i)^{21}$
3. $(-1 - i)^{17}$
4. $(\sqrt{2}i - \sqrt{2})^{15}$
5. $(3 - 3i)^{16}$
6. $(\sqrt{3} + 3i)^{11}$
7. $(-i)^{123}.$
8. $(1 - \sqrt{3}i)^{12}.$

Zadanie 6.14. Obliczyć wartości podanych wyrażeń, wynik podać w postaci algebraicznej:

1. $(\cos\frac{\pi}{4} - i\sin\frac{\pi}{4})^{10}$, Odp. $-i$.
2. $\dfrac{(1+i)^{22}}{(2-2\sqrt{3}i)^6}$, Odp. $-\frac{1}{2}i.$

Zadanie 6.15. Korzystając z definicji obliczyć podane pierwiastki:

1. $\sqrt{5 - 12i}$, Odp. $-3 + 2i, 3 - 2i.$
2. $\sqrt[4]{i}$. Odp. $z_0 = \dfrac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2} + i\dfrac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}$, $z_1 = -\dfrac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2} + i\dfrac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}$, $z_2 = -\dfrac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2} - i\dfrac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}$, $z_3 = \dfrac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2} - i\dfrac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}$.
3. $\sqrt[3]{i}.$

Zadanie 6.16. Obliczyć pierwiastki wykorzystując postać trygonometryczną liczby zespolonej. Wyniki podać w postaci algebraicznej.

1. $\sqrt[3]{-27i}$ Odp. $3i$, $-\frac{3}{2}(\sqrt{3}+i)$, $\frac{3}{2}(\sqrt{3}-i)$. 2. $\sqrt[4]{-4}$, Odp. $1+i$, $1-i$, $-1-i$, $-1+i$.

Zadanie 6.17. Znaleźć pierwiastki liczby zespolonej:

1. $\sqrt[4]{3i-1}$
2. $\sqrt[3]{2i-2}$
3. $\sqrt[4]{-1}$
4. $\sqrt[3]{8i}$
5. $\sqrt[3]{-2\sqrt{3}+2i}$
6. $\sqrt[3]{-8i}$
7. $\sqrt[3]{1-i}$
8. $\sqrt[4]{-1}$
9. $\sqrt[3]{8}$
10. $\sqrt{7-24i}$
11. $z^4 = \sqrt{6}i - \sqrt{2}$
12. $z^4 = -2-2\sqrt{3}i$
13. $z^3 = -64i$
14. $z^3 = 125$

7. Powtórzenie materiału

7.1. Podstawy logiki matematycznej.

Przykład 7.1. Sprawdzić czy podane wyrażenie logiczne jest tautologią:

$$\sim(p \Rightarrow q) \Leftrightarrow (p \wedge \sim q).$$

Rozwiązanie.

p	q	$p \Rightarrow q$	$\sim(p \Rightarrow q)$	$\sim q$	$p \wedge \sim q$	$\sim(p \Rightarrow q) \Leftrightarrow (p \wedge \sim q)$
0	0	1	0	1	0	1
0	1	1	0	0	0	1
1	0	0	1	1	1	1
1	1	1	0	0	0	1

Odp. Powyższe zdanie logiczne jest tautologią.

Przykład 7.2. Sprawdzić czy podane wyrażenie logiczne jest tautologią:

$$p \Rightarrow [(p \wedge q) \Leftrightarrow p]$$

Rozwiązanie.

p	q	$\sim p$	$p \wedge q$	$(p \wedge q) \Leftrightarrow p$	$p \Rightarrow [(p \wedge q) \Leftrightarrow p]$
0	0	1	0	1	1
0	1	1	0	1	1
1	0	0	0	0	0
1	1	0	1	1	1

Odp. Podane zdanie logiczne nie jest tautologią.

7.2. Zbiory liczbowe.

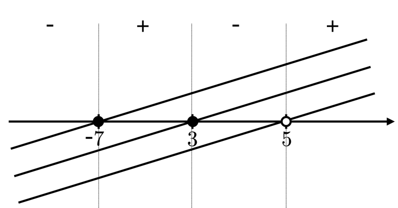
Przykład 7.3. Dane są zbiory:

$$A = \left\{ x \in \mathbb{R} : \frac{(x-3)(x+7)}{(x-5)} \leqslant 0 \right\}, \qquad B = \{x \in \mathbb{R} : |x+2| \leqslant 5\}.$$

Zapisać je w postaci przedziałów i określić $A \cup B$ i $A \cap B$.

Rozwiązanie. Dla zbioru A mamy:

$$\frac{(x-3)(x+7)}{(x-5)} \leqslant 0 \quad \wedge \quad x - 5 \neq 0 \quad \Leftrightarrow \quad (x-3)(x+7)(x-5) \leqslant 0 \quad \wedge \quad x \neq 5$$



$$A = (-\infty, -7] \cup [3, 5).$$

Dla zbioru B mamy:

$$|x+2| \leqslant 5 \quad \Leftrightarrow \quad x+2 \leqslant 5 \quad \wedge \quad x+2 \geqslant -5 \quad \Leftrightarrow \quad x \leqslant 3 \quad \wedge \quad x \geqslant -7.$$

Zatem

$$B = [-7, 3].$$

Odp. $A \cup B = (-\infty, 5)$, $A \cap B = \{-7, 3\}$.

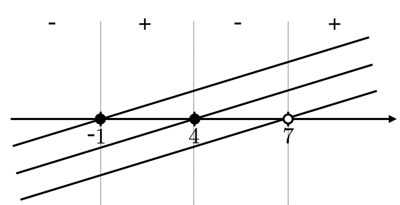
Przykład 7.4. Dane są zbiory:

$$A = \left\{ x \in \mathbb{R} : \frac{(x+1)(x-4)}{(x-7)} > 0 \right\}, \qquad B = \{x \in \mathbb{R} : |x-3| \leqslant 4\}.$$

Zapisać je w postaci przedziałów i określić $A \cup B$ i $A \cap B$.

Rozwiązanie. Dla zbioru A mamy:

$$\frac{(x+1)(x-4)}{(x-7)} > 0 \quad \wedge \quad x-7 \neq 0 \quad \Leftrightarrow \quad (x+1)(x-4)(x-7) > 0 \quad \wedge \quad x \neq 7.$$



$$A = (-1, 4) \cup (7, \infty).$$

Dla zbioru B mamy:

$$|x-3| \leqslant 4 \quad \Leftrightarrow \quad x-3 \leqslant 4 \quad \wedge \quad x-3 \geqslant -4 \quad \Leftrightarrow \quad x \leqslant 7 \quad \wedge \quad x \geqslant -1.$$

Zatem

$$B = [-1, 7].$$

Odp. $A \cup B = [-1, \infty)$, $A \cap B = (-1, 4)$.

7.3. **Ciągi nieskończone.**

Przykład 7.5. Obliczyć granicę ciągu o wyrazie ogólnym

$$a_n = \frac{-3n^2 + 2n + 3}{n + 2n^2}.$$

Rozwiązanie.

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{-3n^2 + 2n + 3}{n + 2n^2} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^2(-3 + \frac{2}{n} + \frac{3}{n^2})}{n^2(\frac{1}{n} + 2)} = \lim_{n\to\infty} \frac{\cancel{n^2}(-3 + \frac{2}{n} + \frac{3}{n^2})}{\cancel{n^2}(\frac{1}{n} + 2)} = \frac{-3}{2}.$$

Odp. Granica ciągu a_n przy $n \to \infty$ wynosi $\frac{-3}{2}$.

Przykład 7.6. Obliczyć granicę ciągu o wyrazie ogólnym

$$a_n = \frac{\sqrt{9n^2+5n-2}}{3n+2}.$$

Rozwiązanie.

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{9n^2+5n-2}}{3n+2} = \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{n^2(9+\frac{5}{n}-\frac{2}{n^2})}}{n(3+\frac{2}{n})} = \lim_{n\to\infty} \frac{n\sqrt{9+\frac{5}{n}-\frac{2}{n^2}}}{n(3+\frac{2}{n})}$$
$$= \lim_{n\to\infty} \frac{\cancel{n}\sqrt{9+\frac{5}{n}-\frac{2}{n^2}}}{\cancel{n}(3+\frac{2}{n})} = \frac{3}{3} = 1.$$

Odp. Granica ciągu a_n przy $n \to \infty$ wynosi 1.

Przykład 7.7. Obliczyć granicę ciągu o wyrazie ogólnym

$$a_n = 3n - \sqrt{9n^2+2n-4}.$$

Rozwiązanie.

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} (3n - \sqrt{9n^2+2n-4}) = \lim_{n\to\infty} \frac{(3n-\sqrt{9n^2+2n-4})(3n+\sqrt{9n^2+2n-4})}{3n+\sqrt{9n^2+2n-4}}$$
$$= \lim_{n\to\infty} \frac{9n^2-9n^2-2n+4}{3n+\sqrt{9n^2+2n-4}} = \lim_{n\to\infty} \frac{-2n+4}{3n+\sqrt{n^2(9+\frac{2}{n}-\frac{4}{n^2})}} = \lim_{n\to\infty} \frac{-2n+4}{3n+n\sqrt{9+\frac{2}{n}-\frac{4}{n^2}}}$$
$$= \lim_{n\to\infty} \frac{n(-2+\frac{4}{n})}{n\left(3+\sqrt{9+\frac{2}{n}-\frac{4}{n^2}}\right)} = \lim_{n\to\infty} \frac{\cancel{n}(-2+\frac{4}{n})}{\cancel{n}\left(3+\sqrt{9+\frac{2}{n}-\frac{4}{n^2}}\right)} = \frac{-2}{3+3} = -\frac{1}{3}.$$

Odp. Granica ciągu a_n przy $n \to \infty$ wynosi $-\frac{1}{3}$.

Przykład 7.8. Obliczyć granicę ciągu o wyrazie ogólnym

$$a_n = \sqrt{4n^2+6n-2} - 2n.$$

Rozwiązanie.

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \sqrt{4n^2+6n-2} - 2n = \lim_{n\to\infty} \frac{(\sqrt{4n^2+6n-2}-2n)(\sqrt{4n^2+6n-2}+2n)}{\sqrt{4n^2+6n-2}+2n}$$
$$= \lim_{n\to\infty} \frac{4n^2+6n-2-4n^2}{\sqrt{4n^2+6n-2}+2n} = \lim_{n\to\infty} \frac{6n-2}{\sqrt{n^2(4+\frac{6}{n}-\frac{2}{n^2})}+2n} = \lim_{n\to\infty} \frac{6n-2}{n\sqrt{(4+\frac{6}{n}-\frac{2}{n^2})}+2n}$$
$$= \lim_{n\to\infty} \frac{n(6-\frac{2}{n})}{n\left(\sqrt{4+\frac{6}{n}-\frac{2}{n^2}}+2\right)} = \lim_{n\to\infty} \frac{\cancel{n}(6-\frac{2}{n})}{\cancel{n}\left(\sqrt{4+\frac{6}{n}-\frac{2}{n^2}}+2\right)} = \frac{6}{2+2} = \frac{6}{4} = \frac{3}{2}.$$

Odp. Granica ciągu a_n przy $n \to \infty$ wynosi $\frac{3}{2}$.

7.4. **Szeregi.**

Przykład 7.9. Zbadać zbieżność szeregu
$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2n+1}{3n-1}\right)^n.$$

Rozwiązanie. Zbadamy warunek konieczny zbieżności szeregu
$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\left(\frac{2n+1}{3n-1}\right)^n &= \lim_{n\to\infty}\left(\frac{3n-1-n+2}{3n-1}\right)^n = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{2-n}{3n-1}\right)^n\\ &= \lim_{n\to\infty}\left(\left(1+\frac{2-n}{3n-1}\right)^{\frac{3n-1}{2-n}}\right)^{\frac{2-n}{3n-1}\cdot n} = \left[e^{-\infty}\right]=0.\end{aligned}$$
Stosując kryterium Cauchy'ego zbieżności szeregu otrzymujemy:
$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\left(\frac{2n+1}{3n-1}\right)^n} = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{2n+1}{3n-1}\right) = \frac{2}{3} < 1.$$
Zatem na mocy tego kryterium szereg jest zbieżny.

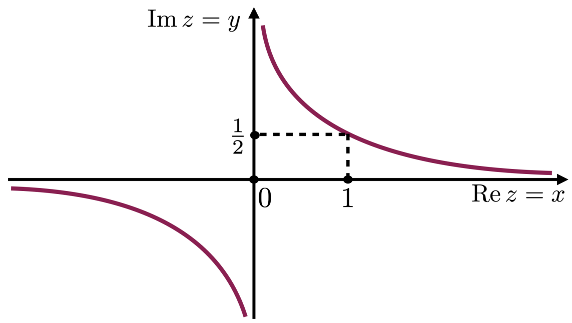
Przykład 7.10. Zbadać zbieżność szeregu
$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n\sqrt[3]{n}+3}{n^2}.$$

Rozwiązanie. Zbadamy warunek konieczny zbieżności szeregu. Skoro $n^1\cdot n^{\frac{1}{3}} = n^{\frac{4}{3}}$ zatem
$$\lim_{n\to\infty}\frac{n\sqrt[3]{n}+3}{n^2}=0.$$
Oszacujmy nasz szereg z dołu, tj.:
$$\frac{n\sqrt[3]{n}+3}{n^2} \geqslant \frac{n\sqrt[3]{n}}{n^2} = \frac{\cancel{n}\sqrt[3]{n}}{n^{\cancel{2}}} = n^{-\frac{2}{3}} = \frac{1}{n^{\frac{2}{3}}}$$
Szereg
$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{\frac{2}{3}}}$$
jest szeregiem harmonicznym stopnia $\frac{2}{3} < 1$ więc jest rozbieżny, zatem na mocy kryterium porównawczego badany szereg jest rozbieżny.

7.5. **Liczby zespolone.**

Zadanie 7.1. Znaleźć na płaszczyźnie zespolonej zbiór punktów: $\{z\in\mathbb{C} : \mathrm{Im}(z^2)=1\}$

Rozwiązanie. Oznaczmy $z=x+iy$, gdzie $x,y\in\mathbb{R}$, wówczas
$$z^2=(x+iy)^2=x^2+2ixy-y^2=x^2-y^2+i\cdot 2xy$$
Zatem część urojona liczby z^2 wynosi $2xy$ oraz:
$$\mathrm{Im}(z^2)=1 \quad\Leftrightarrow\quad 2xy=1 \quad\Leftrightarrow\quad y=\frac{1}{2x},\quad x\neq 0.$$
Zbiór punktów spełniających powyższą zależność przedstawiony jest na Rysunku 19.



RYSUNEK 19. Zbiór $\{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Im}(z^2) = 1\}$.

Zadanie 7.2. Znaleźć pierwiastki liczby zespolonej $\sqrt[3]{8}$.

ROZWIĄZANIE. Oznaczmy przez $z = x + iy = 8$, zatem $|z| = |8| = 8$ oraz

$$\cos\varphi = \frac{x}{|z|} = \frac{8}{8} = 1$$

$$\sin\varphi = \frac{y}{|z|} = \frac{0}{8} = 0$$

stąd $\varphi = 0$. Korzystając ze wzoru na pierwiastki z liczby zespolonej:

$$w_k = \sqrt[n]{r}(\cos\frac{\varphi + 2k\pi}{n} + i\sin\frac{\varphi + 2k\pi}{n}), \quad k = 0, 1 \ldots, n-1,$$

otrzymujemy trzy pierwiastki liczby zespolonej $z = 8$ i są one następujące:

$$\begin{aligned}
w_0 &= \sqrt[3]{8}\left(\cos\frac{0+0}{3} + i\sin\frac{0+0}{3}\right) = 2(1+0i) = 2\\
w_1 &= \sqrt[3]{8}\left(\cos\frac{0+2\pi}{3} + i\sin\frac{0+2\pi}{3}\right) = 2\left(\cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3}\right) = 2\left(-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = -1 + i\sqrt{3},\\
w_2 &= \sqrt[3]{8}\left(\cos\frac{0+4\pi}{3} + i\sin\frac{0+4\pi}{3}\right) = 2\left(\cos\frac{4\pi}{3} + i\sin\frac{4\pi}{3}\right) = 2\left(-\cos\frac{\pi}{3} - i\sin\frac{\pi}{3}\right)\\
&= 2\left(-\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = -1 - i\sqrt{3}.
\end{aligned}$$

8. Funkcja jednej zmiennej

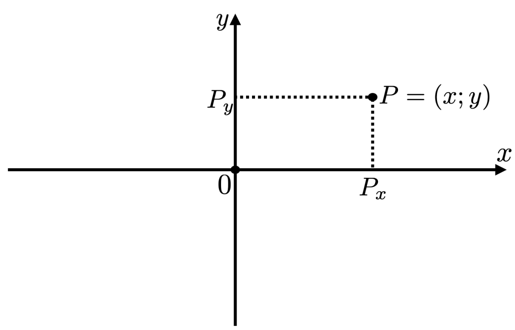
8.1. **Definicje i podstawowe własności funkcji.**

Definicja 8.1. Funkcja. Niech X, Y będą zbiorami liczb rzeczywistych. Mówimy, że na zbiorze X jest określona funkcja f o wartościach w zbiorze Y, jeżeli każdej liczbie $x \in X$ została przyporządkowana liczba $y = f(x) \in Y$. Zapisujemy

$$f : X \to Y$$

Zbiór X, na którym określona jest funkcja f nazywamy **dziedziną** tej funkcji natomiast zbór Y nazywamy **przeciwdziedziną** lub **zbiorem wartości** tej funkcji. Dla oznaczenia *wartości* funkcji f w punkcie $x \in X$ używamy oznaczenia $f(x)$ lub y. Zmienną x nazywamy *argumentem* funkcji f.

Wprowadźmy na płaszczyźnie układ dwóch prostopadłych osi liczbowych przecinających się w punkcie 0, które nazwiemy osią x-ów i osią y-ów. Dla dowolnie ustalonego punktu P płaszczyzny niech P_x będzie jego rzutem prostokątnym na oś x-ów, zaś P_y jego rzutem prostokątnym na oś y-ów (patrz Rys.20).



Rysunek 20. Prostokątny układ współrzędnych.

Oznaczmy dalej przez x rzut P_x a przez y rzut P_y. Liczby x i y nazywamy współrzędnymi punktu P, przy czym x jest **odciętą** punktu P a y jest **rzędną** punktu P. Układ osi nazywamy **prostokątnym układem współrzędnych** i oznaczamy go przez $\mathbb{R}^2$. Stosujemy zapis

$$P = (x, y)$$

utożsamiając tym punkty płaszczyzny $\mathbb{R}^2$ z parami liczb rzeczywistych. Punkt $O = (0, 0)$ nazywamy **początkiem układu współrzędnych**. **Wykresem funkcji** f nazywamy zbiór punktów płaszczyzny $\mathbb{R}^2$ postaci (x, y) takich, że $y = f(x)$.

Definicja 8.2. Monotoniczność Mówimy, że funkcja f jest:

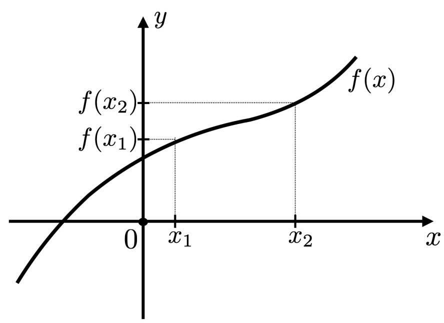
- **rosnąca**, jeżeli
$$f(x_1) \leqslant f(x_2) \quad \text{dla} \quad x_1 < x_2;$$
- **ściśle rosnąca**, jeżeli
$$f(x_1) < f(x_2) \quad \text{dla} \quad x_1 < x_2;$$
- **malejąca**, jeżeli
$$f(x_1) \geqslant f(x_2) \quad \text{dla} \quad x_1 < x_2;$$

- **ściśle malejąca**, jeżeli

$$f(x_1) > f(x_2) \quad \text{dla} \quad x_1 < x_2.$$

Definicja 8.3. Różnowartościowość. Mówimy, że funkcja f jest różnowartościowa, jeżeli

$$f(x_1) \neq f(x_2) \quad \text{dla} \quad x_1 \neq x_2.$$

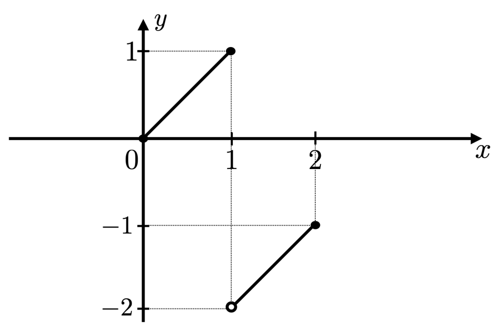


Rysunek 21. Funkcja rosnąca i różnowartościowa.

Przykład 8.1. Każda funkcja ściśle monotoniczna jest różnowartościowa, ale nie na odrót. Na przykład funkcja

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{dla} \quad 0 \leqslant x \leqslant 1 \\ x - 3 & \text{dla} \quad 1 < x \leqslant 2 \end{cases}$$

jest różnowartościowa ale nie jest ściśle monotoniczna w przedziale $[0, 2]$.



Rysunek 22. Funkcja różnowartościowa która nie jest funkcją monotoniczną.

Definicja 8.4. Funkcja odwrotna Jeżeli f jest funkcją różnowartościową, to możemy określić nową funkcję g przyjmując

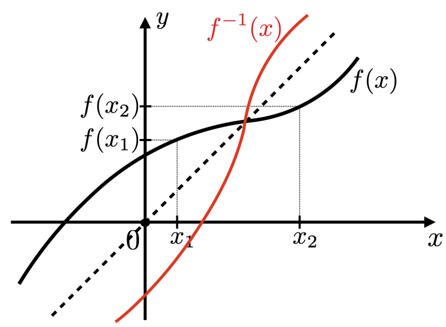
$$g(y) = x.$$

Funkcja g jest dobrze określona na zbiorze wartości funkcji f, gdyż na mocy założenia, każdej liczbie y należącej do tego zbioru wartości odpowiada dokładnie jedna liczba x taka, że zachodzi

$$f(x) = y.$$

Funkcję g nazywamy **funkcją odwrotną** do funkcji f i oznaczamy przez

$$g = f^{-1}$$



RYSUNEK 23. Funkcja monotoniczna i różnowartościowa $f(x)$ oraz funkcja do niej odwrotna $f^{-1}(x)$.

Twierdzenie 8.1. *Jeżeli f jest funkcją ściśle rosnącą (ściśle malejącą), to funkcja f^{-1} ma tę samą własność, tzn. jest ściśle rosnąca (ściśle malejąca)*

DOWÓD. Dowód podamy dla funkcji ściśle rosnącej. Załóżmy, że

$$y_1 = f(x_1) < f(x_2) = y_2,$$

wobec tego, skoro z założenia, funkcja f posiada funkcje odwrotną f^{-1} to możemy zapisać

$$x_1 = f^{-1}(y_1), \quad x_2 = f^{-1}(y_2).$$

Gdyby było $x_1 > x_2$, czyli $f^{-1}(y_1) > f^{-1}(y_2)$, to na mocy założenia, że funkcja f jest ścisśle rosnąca, otrzymalibyśmy, że

$$f(x_1) > f(x_2),$$

a to z kolei oznaczałoby, że

$$y_1 > y_2$$

wbrew założeniu. ■

Definicja 8.5. Parzystość i nieparzystość. Niech f będzie funkcją określoną na całym zbiorze $\mathbb{R}$. Mówimy, że f jest **parzysta** jeżeli dla $x \in \mathbb{R}$

$$f(-x) = f(x).$$

Mówimy, że f jest **nieparzysta** jeżeli dla $x \in \mathbb{R}$

$$f(-x) = -f(x).$$

Przykład 8.2. Przykładem funkcji parzystej jest funkcja cosinus, gdyż dla dowolnego $x \in \mathbb{R}$

$$\cos(-x) = \cos(x).$$

Przykładem funkcji nieparzystej jest natomiast funkcja sinus, gdyż dla dowolnego $x \in \mathbb{R}$

$$\sin(-x) = -\sin(x).$$

Wykres funkcji parzystej jest symetryczny względem osi y-ów, wykres funkcji nieparzystej jest symetryczny względem początku układu współrzędnych.

8.2. **Funkcje elementarne.**

8.2.1. **Funkcja liniowa.** Niech $a, b \in \mathbb{R}$. Funkcję liniową zapisujemy w postaci ogólnej następująco:

$$f(x) = ax + b, \quad a \neq 0 \tag{58}$$

Dla $a > 0$ funkcja f jest rosnąca a dla $a < 0$ funkcja f jest malejąca. Miejsce zerowe tej funkcji jest w punkcie

$$y = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = -\frac{b}{a}, \quad a \neq 0.$$

Monotoniczna funkcja liniowa jest funkcją różnowartościową, a zatem istnieje do niej funkcja odwrotna. Rozwiązując równanie

$$y = ax + b, \quad a \neq 0$$

względem x otrzymujemy

$$x = \frac{y - b}{a}$$

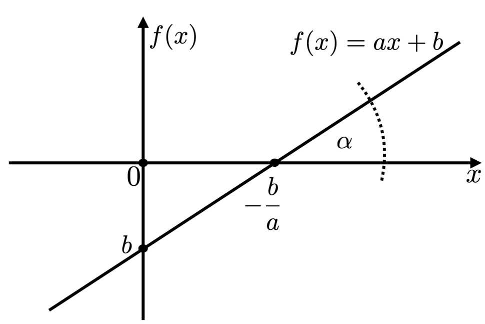
zatem

$$f^{-1}(y) = \frac{1}{a}y - \frac{b}{a}.$$

Dla $a = 0$ funkcja f jest stała i jest postaci

$$f(x) = b$$

Wykresem funkcji liniowej jest linia prosta, wykresem funkcji stałej jest linia prosta równoległa do osi x-ów.



RYSUNEK 24. Funkcja liniowa $f(x) = ax + b$.

8.2.2. **Wielomiany.** Dla ustalonej liczby całkowitej nieujemnej n, funkcję

$$w(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + a_{n-2}x^{n-2} + \cdots + a_1 x + a_0, \quad a_n \neq 0, \tag{59}$$

nazywamy **wielomianem stopnia** n, zaś liczby rzeczywiste a_j, $j = 0, 1, \dots, n$ **współczynnikami** wielomianu w. Wielomian jest funkcją określoną dla wszystkich $x \in \mathbb{R}$.

W szczególności wielomian stopnia $n = 1$ jest funkcją liniową $f(x) = a_1 x + a_0$ a wielomian stopnia $n = 0$ jest funkcją stałą $f(x) = a_0$.

Wykresem wielomianu jest krzywa, która przecina oś x-ow lub odbija się od niej w punktach, gdzie znajdują się miejsca zerowe wielomianu.

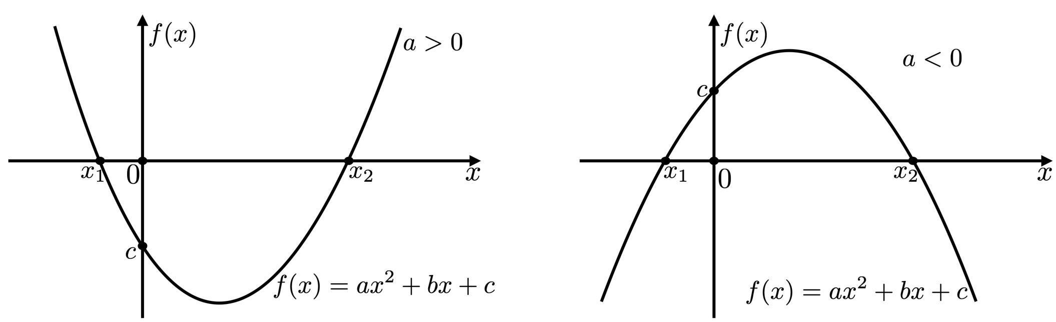
Przykład 8.3. Funkcja kwadratowa. Przyjmijmy $n = 2$, niech $a, b, c \in \mathbb{R}$ oraz $a \neq 0$. Zapiszmy wielomian drugiego stopnia

$$f(x) = ax^2 + bx + c$$

Jest to funkcja kwadratowa o współczynnikach a, b i c. Wykresem tej funkcji jest parabola, która dla $a > 0$ ma ramiona skierowane ku górze a dla $a < 0$ – do dołu oraz przecina oś y w punkcie $y_0 = c$, (por rys.27). Miejsca zerowe znajdują się w punktach

$$y = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} \quad \text{gdzie} \quad \Delta = b^2 - 4ac.$$

Oczywiście gdy $\Delta < 0$, $\sqrt{\Delta}$ nie istnieje w $\mathbb{R}$ i wówczas mówimy, że funkcja kwadratowa nie ma pierwiastków w zbiorze liczb rzeczywistych.



Rysunek 25. Funkcja kwadratowa $f(x) = ax^2 + bx + c$.

8.2.3. **Funkcje wymierne.** *Funkcją wymierną* nazywamy funkcję postaci

$$f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}, \quad Q(x) \neq 0, \tag{60}$$

gdzie P i Q są wielomianami, przy czym Q nie jest funkcją stałą. Funkcja wymierna jest określona dla każdego $x \in \mathbb{R}$ nie będącego miejscem zerowym mianownika.

8.2.4. **Funkcja potęgowa.** Przy danej liczbie $\alpha \in \mathbb{R}$ funkcję

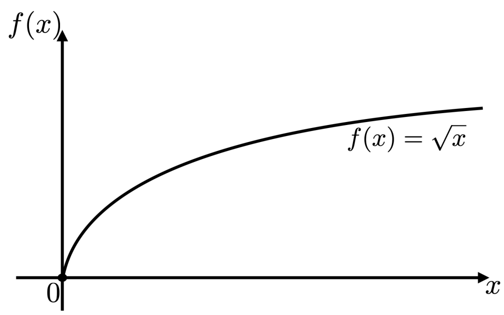
$$f(x) = x^{\alpha}, \qquad x > 0 \tag{61}$$

nazywamy **funkcją potęgową o wykładniku** α.

Funkcja

$$g(x) = \sqrt[\alpha]{x}$$

jest funkcją odwrotną do funkcji potęgowej f danej wzorem (61). Funkcja g jest określona w całym przedziale $[0, \infty)$.



RYSUNEK 26. Funkcja $\sqrt[n]{x}$.

8.2.5. **Funkcje: wykładnicza i logarytmiczna.** **Funkcją wykładniczą o podstawie** a (gdzie $a > 0$ jest daną liczbą) nazywamy funkcję

$$f(x) = a^x \quad (x \in \mathbb{R}) \tag{62}$$

Przy założeniu $a > 1$ jest to funkcja ściśle rosnąca natomiast dla $0 < a < 1$ jest to funkcja ściśle malejąca i równania

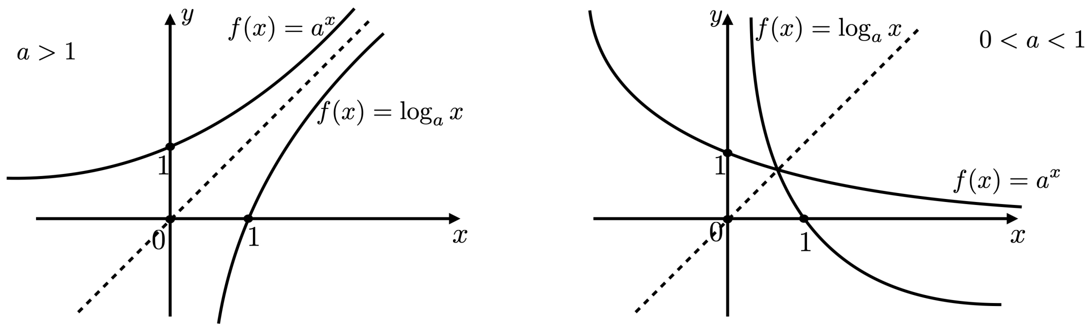
$$x = a^y \qquad \text{oraz} \qquad y = \log_a x \tag{63}$$

są równoważne. **Funkcja logarytmiczna** $\log_a x$ określona jest na zbiorze wartości funkcji wykładniczej czyli na przedziale $(0, \infty)$. W przypadku gdy $a = e$ wzory (63) określają **logarytm naturalny**, który oznaczamy symbolem ln, piszemy wówczas:

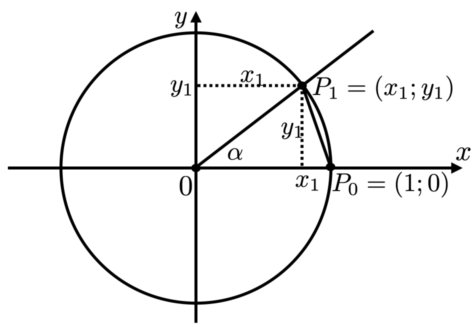
$$y = \ln x.$$

Twierdzenie 8.2. *Dla $a > 0, a \neq 1$, dla $x, x_1, x_2 > 0$ oraz dla dowolnego $\alpha \in \mathbb{R}$ zachodzą wzory:*

$$\log_a(x_1 x_2) = \log_a x_1 + \log_a x_2$$
$$\log_a x^{\alpha} = \alpha \log_a x$$



Rysunek 27. Funkcja wykładnicza $f(x) = a^x$ i funkcja logarytmiczna $y = \log_a x$.



Rysunek 28. Wyprowadzenie funkcji trygonometrycznych.

8.2.6. **Funkcje trygonometryczne.** Wprowadźmy na płaszczyźnie z prostokątnym układem współrzędnych okrąg o środku w początku układu i promieniu jednostkowym. Oznaczmy przez P_0 jego punkt przecięcia z dodatnią półosią x-ów (rys.28) i niech $P_1 = (x_1, y_1)$ będzie dowolnie obranym punktem okręgu. Oznaczmy przez α kąt, o jaki należy obrócić półprostą $0P_0$ tak, aby punkt P_0 pokrył się z punktem P_1.

Przypomnijmy znane z kursu szkolnego definicje funkcji trygonometrycznych kąta α (którego miara może przyjmować dowolne wartości rzeczywiste, dodatnie lub ujemne)

$$\sin\alpha = y_1, \qquad \cos\alpha = x_1,$$
$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{y_1}{x_1},\ (x_1 \neq 0), \qquad \operatorname{ctg}\alpha = \frac{x_1}{y_1},\ (y_1 \neq 0).$$

Z sensu geometrycznego podanych definicji łatwo wynikają własności tych funkcji:

a) okresowość

$$\sin(\alpha + 2\pi) = \sin\alpha,$$
$$\cos(\alpha + 2\pi) = \cos\alpha,$$
$$\operatorname{tg}(\alpha + \pi) = \operatorname{tg}\alpha,$$
$$\operatorname{ctg}(\alpha + \pi) = \operatorname{ctg}\alpha$$

b)

$$\sin 0 = \sin \pi = 0, \quad \sin \frac{1}{2}\pi = 1, \quad \sin \frac{3}{2}\pi = -1,$$
$$\cos 0 = 1, \quad \cos \frac{1}{2}\pi = \cos \frac{3}{2}\pi = 0, \quad \cos \pi = -1.$$

c)

$$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1,$$

d)

$$\sin(-\alpha) = -\sin \alpha, \qquad \cos(-\alpha) = \cos \alpha.$$

e) Przypominamy jeszcze wzory

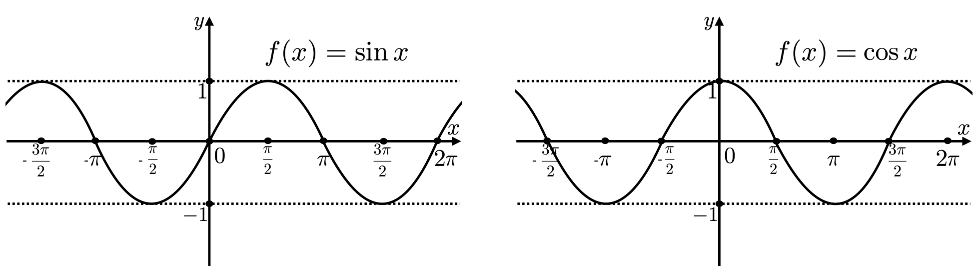
$$\sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta$$
$$\cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta$$

f) z których wynika po uwzględnieniu d)

$$2 \sin \alpha \cos \beta = \sin(\alpha + \beta) + \sin(\alpha - \beta)$$
$$2 \cos \alpha \cos \beta = \cos(\alpha + \beta) + \cos(\alpha - \beta)$$
$$2 \sin \alpha \sin \beta = \cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta).$$

Wzory f) mają zastosowanie w rachunku całkowym.

Wraz ze wzrostem kąta α zmiana wartości funkcji trygonometrycznych przedstawiona jest na poniższych wykresach:



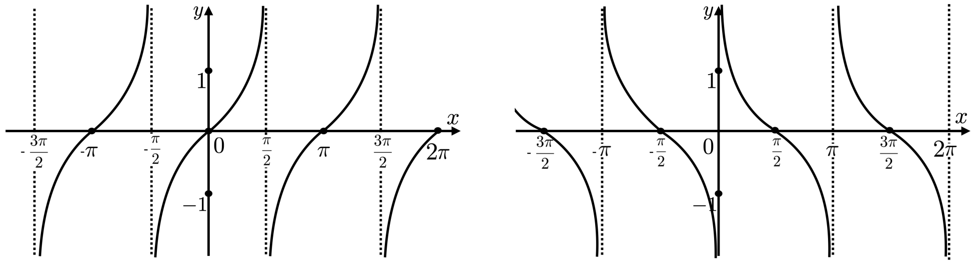
Rysunek 29. Wartości funkcji sinus (na lewo) i wartości funkcji cosinus (na prawo).

8.2.7. **Funkcje cyklometryczne.** Funkcje trygonometryczne

$$\sin x, \quad \cos x, \quad \operatorname{tg} x, \quad \operatorname{ctg} x$$

są ściśle monotoniczne oraz różnowartościowe odpowiednio w przedziałach

$$\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right], \quad [0; \pi], \quad \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right), \quad (0, \pi)$$

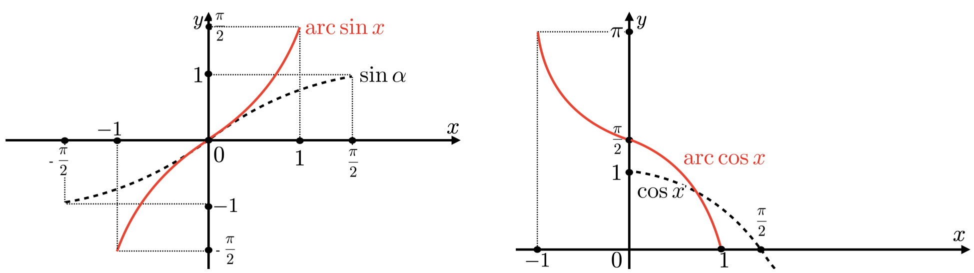


RYSUNEK 30. Wartości funkcji tangens (na lewo) i wartości funkcji cotangens (na prawo).

istnieją więc w tych przedziałach funkcje odwrotne. Przyjmujemy, że

$$\begin{aligned} y &= \arcsin x \quad \text{gdy} \quad x = \sin y, \quad -\frac{\pi}{2} \leqslant y \leqslant \frac{\pi}{2}, \\ y &= \arccos x \quad \text{gdy} \quad x = \cos y, \quad 0 \leqslant y \leqslant \pi, \\ y &= \operatorname{arc\,tg} x \quad \text{gdy} \quad x = \operatorname{tg} y, \quad -\frac{\pi}{2} < y < \frac{\pi}{2}, \\ y &= \operatorname{arc\,ctg} x \quad \text{gdy} \quad x = \operatorname{ctg} y, \quad 0 < y < \pi. \end{aligned}$$

Wprowadzone w ten sposób funkcje odwrotne do trygonometrycznych noszą nazwę *funkcji kołowych* lub *cyklometrycznych*. Na rysunkach 31 i 32 przedstawione są wykresy funkcji cyklometrycznych.



RYSUNEK 31. Wartości funkcji arcus sinus (na lewo) i wartości funkcji arcus cosinus (na prawo).

8.2.8. **Funkcja złożona (superpozycja).** Niech f będzie funkcją określoną na zbiorze $D \subset \mathbb{R}$ zaś g funkcją określoną na zbiorze $f(D)$. Możemy wówczas utworzyć nową funkcję

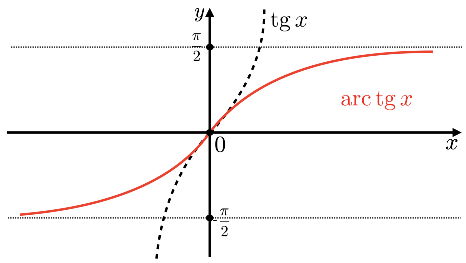
$$h(x) = g(y) \quad \text{gdzie} \quad y = f(x), \quad x \in D$$

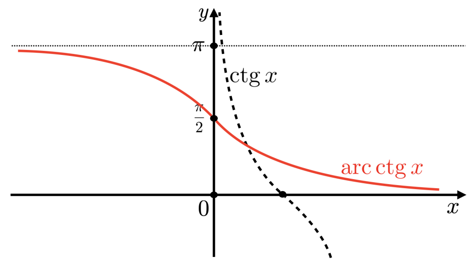
czyli

$$h(x) = g(f(x)), \quad x \in D.$$

Funkcję h nazywamy **superpozycją funkcji f, g** (lub **funkcją złożoną z funkcji** f, g). Używany jest zapis

$$h = f \circ g$$





RYSUNEK 32. Wartości funkcji arcus tangens (na lewo) i wartości funkcji arcus cotangens (na prawo).

oraz

$$h(x) = (f \circ g)(x)$$

Przykład 8.4. Niech

$$f(x) = 1 + \sin x, \quad g(y) = \sqrt{y}.$$

Funkcja g jest określona dla $y \geqslant 0$, zaś

$$f(x) \geqslant 0 \quad \text{dla} \quad x \in \mathbb{R}.$$

Wobec tego funkcja złożona

$$h(x) = \sqrt{1 + \sin x}$$

jest określona dla wszystkich $x \in \mathbb{R}$.

8.3. **Zadania.**

Zadanie 8.1. Wyznaczyć dziedzinę funkcji

1. $f(x) = \dfrac{2x}{x^2+1}$.
2. $f(x) = \sqrt{2x - x^2}$.
3. $f(x) = \sqrt{\sin x}$.
4. $f(x) = \ln(\sin x)$.
5. $f(x) = x + \ln|x|$.
6. $f(x) = \sqrt{\ln(x^2 - 3x + 3)}$.
7. $f(x) = e^{\sqrt{\frac{x^2-4}{x}}}$.
8. $f(x) = e^{\sqrt{\frac{x+1}{x}}}$.
9. $f(x) = \sqrt[3]{\dfrac{x^3+3x^2}{2-x^2}}$.
10. $f(x) = \dfrac{x}{\ln x + 5}$.
11. $f(x) = \dfrac{e^x}{(x+1)^2}$.
12. $f(x) = \sqrt{x^2+2x-3} + \dfrac{1}{x+3}$.
13. $f(x) = \sqrt{-x^2+4x-3} + \dfrac{1}{x-3}$.
14. $f(x) = \dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{\operatorname{tg} x}$.
15. $f(x) = \dfrac{e^x - e^{-x}}{\sin x}$.

Zadanie 8.2. Znaleźć funkcję odwrotną do podanej

1. $y = \dfrac{x-2}{x+4}$.
2. $y = e^{\frac{x+1}{x}}$.
3. $y = -\log_4(-x) + 1$.
4. $y = \dfrac{2x-1}{x+1}$.
5. $y = \dfrac{1-x}{1+x}$.

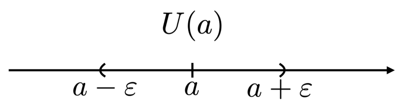
Zadanie 8.3. Naszkicować wykres funkcji

1. $y = 3^x$.
2. $y = 2^{-x}$.
3. $y = (x+1)^3$.
4. $y = 2(x-1)^2$.
5. $y = -(x+2)^2$.

9. Granica i ciągłość funkcji.

9.1. Definicja granicy funkcji.

Definicja 9.1. Otoczenie punktu. Niech $a \in \mathbb{R}$ będzie ustalonym punktem osi liczbowej. Każdy przedział otwarty $(a - \varepsilon, a + \varepsilon)$, gdzie $\varepsilon > 0$ jest liczbą rzeczywistą, nazywamy *otoczeniem punktu* a i oznaczamy symbolem $U(a)$.



Rysunek 33. Otoczenie epsilonowe $U(a) = (a - \varepsilon, a + \varepsilon)$ punktu a.

Otoczeniem lewostronnym punktu a nazywamy zbiór:

$$U^-(a) = \{x \in U(a) : x \leqslant a\}.$$

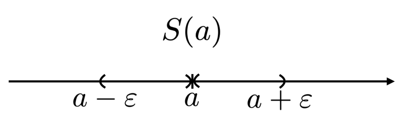
Otoczeniem prawostronnym punktu a nazywamy zbiór:

$$U^+(a) = \{x \in U(a) : x \geqslant a\}.$$

Definicja 9.2. Sąsiedztwo punktu $a \in \mathbb{R}$ jest to zbiór postaci

$$S(a) = U(a) \setminus \{a\},$$

gdzie $U(a)$ jest otoczeniem punktu a.



Rysunek 34. Sąsiedztwo epsilonowe $S(a) = U(a) \setminus \{a\}$ punktu a.

Sąsiedztwem lewostronnym punktu a nazywamy zbiór

$$S^-(a) = \{x \in S(a) : x < a\}.$$

Sąsiedztwem prawostronnym punktu a nazywamy zbiór:

$$S^+(a) = \{x \in S(a) : x > a\}.$$

W przypadku gdy $a = +\infty$ lub $a = -\infty$ *sąsiedztwem punktu* a nazywamy każde jego otoczenie, czyli

- każdy przedział $(P, +\infty)$ gdy $a = +\infty$
- każdy przedział $(-\infty, p)$ gdy $a = -\infty$

Definicja 9.3. Niech f będzie funkcją określoną w sąsiedztwie punktu $a \in \mathbb{R}$ i niech g będzie liczbą rzeczywistą. Mówimy, że **funkcja** f **ma granicę** g **przy** $x \to a$, wtedy i tylko wtedy, gdy dla dowolnego $\varepsilon > 0$ istnieje $\delta > 0$ taka, że dla

$$0 < |x - a| < \delta$$

zachodzi

$$|f(x) - g| < \varepsilon.$$

Piszemy wówczas

$$\lim_{x \to a} f(x) = g. \tag{64}$$

W przypadku gdy $a \in \mathbb{R}$, możemy również mówić **granica funkcji** f **w punkcie** a. Jeżeli $g = +\infty$ lub $g = -\infty$, to mówimy, że funkcja f ma **granicę niewłaściwą** przy $x \to a$.

Przykład 9.1. Niech

$$f(x) = x^2 + 3x - 1.$$

Granica funkcji f przy $x \to \infty$ wynosi:

$$\lim_{x \to \infty} f(x) = \lim_{x \to \infty} x^2 + 3x - 1 = \infty.$$

Natomiast przy $x \to 0$ wynosi:

$$\lim_{x \to 0} x^2 + 3x - 1 = -1.$$

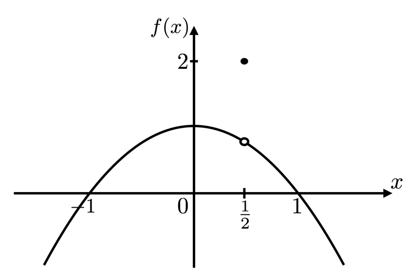
Niech teraz $x \to -\frac{3}{4}$, mamy wówczas

$$\lim_{x \to -\frac{3}{4}} x^2 + 3x - 1 = \left(-\frac{3}{4}\right)^2 + 3 \cdot \left(-\frac{3}{4}\right) - 1 = -\frac{43}{16}.$$

Przykład 9.2. Niech

$$f(x) = \begin{cases} 1 - x^2 & \text{dla} \quad x \neq \frac{1}{2} \\ 2 & \text{dla} \quad x = \frac{1}{2} \end{cases}$$

Wówczas granica funkcji f przy $x \to \frac{1}{2}$ wynosi



Rysunek 35. Wykres funkcji $f(x)$.

$$\lim_{x \to \frac{1}{2}} f(x) = \lim_{x \to \frac{1}{2}} 1 - x^2 = \frac{3}{4}$$

Zauważmy, że w podanym przykładzie granica funkcji w punkcie $x = \frac{1}{2}$ nie jest równa wartości funkcji w tym punkcie.

9.2. **Działania na granicach.**

Twierdzenie 9.1. *Zakładamy, że funkcje f, g są określone w sąsiedztwie punktu $a \in \mathbb{R}_\infty$ i że mają skończoną granicę przy $x \to a$. Wówczas istnieją granice przy $x \to a$ funkcji $f(x) \pm g(x)$ oraz $f(x)g(x)$, przy czym zachodzą równości*

$$\lim_{x\to a} (f(x) \pm g(x)) = \lim_{x\to a} f(x) \pm \lim_{x\to a} g(x), \tag{65}$$

$$\lim_{x\to a} f(x)g(x) = \left(\lim_{x\to a} f(x)\right)\left(\lim_{x\to a} g(x)\right). \tag{66}$$

Jeżeli założymy dodatkowo, że

$$\lim_{x\to a} g(x) \neq 0,$$

to $g(x) \neq 0$ w pewnym sąsiedztwie punktu a oraz istnieje granica przy $x \to a$ funkcji $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ przy czym

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim\limits_{x\to a} f(x)}{\lim\limits_{x\to a} g(x)}. \tag{67}$$

Twierdzenie 9.2. *Zakładamy, że funkcje f, g określone w sąsiedztwie punktu $a \in \mathbb{R}_\infty$ spełniają nierówność*

$$f(x) \leqslant g(x)$$

oraz że funkcje te mają skończone granice przy $x \to a$. Wówczas

$$\lim_{x\to a} f(x) \leqslant \lim_{x\to a} g(x). \tag{68}$$

Twierdzenie 9.3 (o trzech funkcjach)**.** *Zakłóżmy, że funkcje f, g, h określone w sąsiedztwie punktu $a \in \mathbb{R}_\infty$ spełniają w tym sąsiedztwie nierówności*

$$f(x) \leqslant g(x) \leqslant h(x)$$

oraz że

$$\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a} h(x) = G, \tag{69}$$

gdzie G jest liczbą rzeczywistą. Wówczas

$$\lim_{x\to a} g(x) = G, \tag{70}$$

Przykład 9.3.

$$\lim_{x\to 0} \sin x = 0.$$

Przykład 9.4.

$$\lim_{x\to 0} \cos x = 1.$$

Twierdzenie 9.4.

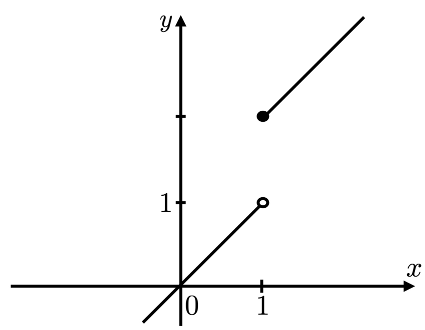
$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1.$$

Przykład 9.5. Dla dowolnie ustalonej liczby $a \neq 0$
$$\lim_{x\to 0} a^x = 1.$$

Przykład 9.6. Dla dowolnej liczby $a > 1$ mamy
$$\lim_{x\to\infty} a^x = \infty, \qquad \lim_{x\to-\infty} a^x = 0.$$

Definicja 9.4. **Granicę lewostronną** funkcji f w punkcie a zapisujemy jako
$$\lim_{x\to a^-} f(x),$$
natomiast **granicę prawostronną** funkcji f w punkcie a zapisujemy jako
$$\lim_{x\to a^+} f(x),$$

Przykład 9.7. Niech
$$f(x) = \begin{cases} x+1 & \text{dla} \quad x \geqslant 1 \\ x & \text{dla} \quad x < 1 \end{cases}$$



Rysunek 36. Wykres funkcji $f(x)$.

Mamy
$$\lim_{x\to 1^+} f(x) = 2, \qquad \lim_{x\to 1^-} f(x) = 1.$$

Definicja 9.5. Funkcja f ma granicę g w punkcie a, to jest:
$$\lim_{x\to a} f(x) = g,$$
wtedy i tylko wtedy gdy
$$\lim_{x\to a^-} f(x) = \lim_{x\to a^+} f(x) = g.$$

Przykład 9.8.
$$\lim_{x\to\infty} \left(1+\frac{1}{x}\right)^x = \lim_{x\to-\infty} \left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e$$

Przykład 9.9.
$$\lim_{x\to 0} (1+x)^{\frac{1}{x}} = e$$

9.3. **Ciągłość funkcji w punkcie.**

Definicja 9.6. Niech f będzie funkcją określoną w pewnym otoczeniu punktu $a \in \mathbb{R}$. Mówimy, że f jest **ciągła w punkcie** a (lub dla $x = a$), jeżeli spełnione są warunki

(i) istnieje granic $\lim\limits_{x \to a} f(x) = g$, $g \in \mathbb{R}$,

(ii) $f(a) = g$.

Przykład 9.10. Wiemy, że

$$\lim_{x \to 0} x \sin \frac{1}{x} = 0.$$

Wobec tego funkcja p określona wzorem

$$p(x) = \begin{cases} x \sin \frac{1}{x} & \text{dla} \quad x \neq 0 \\ 0 & \text{dla} \quad x = 0 \end{cases}$$

jest ciągła w punkcie $x = 0$. Natomiast funkcja

$$q(x) = \begin{cases} x \sin \frac{1}{x} & \text{dla} \quad x \neq 0 \\ 1 & \text{dla} \quad x = 0 \end{cases}$$

nie jest ciągła w punkcie $x = 0$ ponieważ

$$\lim_{x \to 0} q(x) = \lim_{x \to 0} x \sin \frac{1}{x} = 0 \neq 1 = q(0).$$

Definicja 9.7. Załóżmy, że funkcja f jest określona w przedziale $P = (a, b)$, gdzie $-\infty \leqslant a < b \leqslant \infty$ Mówimy, że funkcja f jest ciągła w przedziale P jeżeli jest ona ciągła w każdym punkcie tego przedziału. Jeżeli przedział P zawiera jeden ze swoich końców tzn. jest postaci

$[a, b]$, gdzie $-\infty < a < b < \infty$ lub
$(a, b]$, gdzie $-\infty \leqslant a < b < \infty$ lub
$[a, b)$, gdzie $-\infty < a < b \leqslant \infty$

to o funkcji f mówimy dodatkowo, że jest ciągła prawostronnie w lewym końcu przedziału P względnie ciągła lewostronnie w prawym końcu przedziału P

Przykład 9.11. Niech

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{dla} \quad x = 0, \\ \frac{1}{x} & \text{dla} \quad x > 0. \end{cases}$$

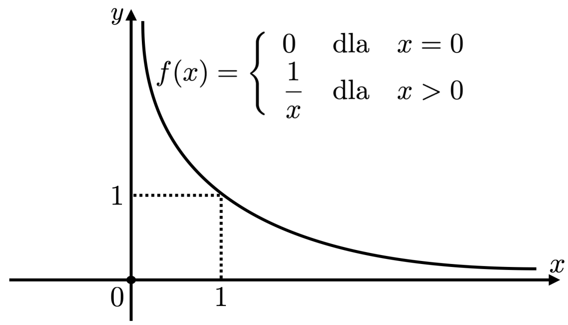
Dla dowolnego $x_0 > 0$ mamy

$$\lim_{x \to x_0} \frac{1}{x} = \frac{1}{x_0}$$

zatem funkcja f jest ciągła w przedziale $(0, \infty)$. Nie jest natomiast ciągła w przedziale $[0, \infty)$ gdyż

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{1}{x} = \infty.$$

Funkcja f nie ma skończonej graniczy prawostronnej przy $x \to 0$, nie jest zatem prawostronnie ciągła w lewym krańcu przedziału $[0, \infty)$.



RYSUNEK 37. Wykres funkcji $f(x)$.

9.4. **Działania na funkcjach ciągłych i ciągłość funkcji elementarnych.** Z twierdzeń o działaniach na granicach wynika natychmiast

Twierdzenie 9.5. *Załóżmy, że funkcje f, g określone w otoczeniu punktu a są ciągłe w tym punkcie. Wówczas*

(i) funkcje $f + g$, $f - g$ oraz fg są ciągłe w punkcie a;

(ii) jeżeli $g(a) \neq 0$, to funkcja $\dfrac{f}{g}$ jest ciągła w punkcie a.

Przedyskutujemy teraz ciągłość funkcji elementarnych.

1^0 **Funkcja liniowa.** Funkcja stała $f(x) = c$ (gdzie $c \in \mathbb{R}$) oraz funkcja tożsamościowa $f(x) = x$ są ciągłe w każdym punkcie $x_0 \in \mathbb{R}$.

2^0 **Wielomian** jest funkcją ciągłą w całym zbiorze liczb rzeczywistych $\mathbb{R}$.

3^0 **Funkcja wymierna** jest ciągła w każdym punkcie nie będącym miejscem zerowym mianownika

4^0 **Funkcja wykładnicza** jest ciągła w całym zbiorze liczb rzeczywistych $\mathbb{R}$

5^0 **Funkcja logarytmiczna** jest funkcją ciągłą w zbiorze liczb rzeczywistych dodatnich $\mathbb{R}_+$

6^0 **Funkcje trygonometryczne.** Funkcje $\sin, \cos$ są ciągłe w całym zbiorze liczb rzeczywistych $\mathbb{R}$. Funkcja tg jest ciągła w każdym punkcie $x_0 \in \mathbb{R}$ takim, że $\cos x_0 \neq 0$ (gdyż $\operatorname{tg} x = \frac{\sin x}{\cos x}$). Funkcja ctg jest ciągła w każdym punkcie $x_0 \in \mathbb{R}$ takim, że $\sin x_0 \neq 0$ (gdyż $\operatorname{ctg} x = \frac{1}{\operatorname{tg} x} = \frac{\cos x}{\sin x}$).

Przykład 9.12. Funkcja postaci

$$f(x) = |x|$$

jest ciągła w każdym punkcie swojej dziedziny (patrz Rys.42)

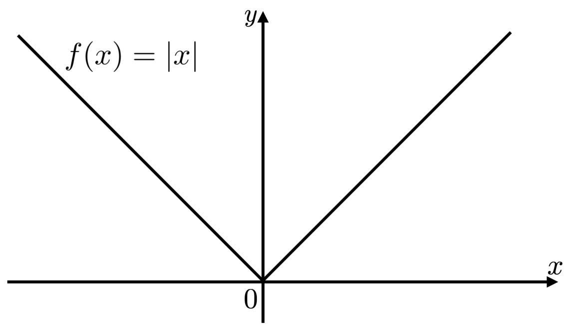
Przykład 9.13. Rozważmy funkcję

$$f(x) = [x]$$

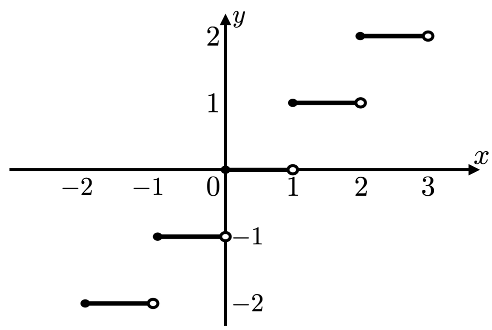
Funkcja ta nosi nazwę *całość z x* i wynosi k gdy $k \leqslant x < k+1$, gdzie k jest dowolną liczbą całkowitą, (por. Rys.39).

Zauważmy, że

$$\lim_{x \to k^-} f(x) = k - 1, \qquad \text{natomiast} \qquad \lim_{x \to k^+} f(x) = k = f(k)$$



Rysunek 38. Wykres funkcji $f(x) = |x|$.



Rysunek 39. Wykres funkcji $f(x) = [x]$.

Zatem funkcja f jest ciągła prawostronnie w każdym punkcie całkowitym k.

9.5. **Funkcje ograniczone, kres górny i dolny funkcji.**

Definicja 9.8. Mówimy, że funkcja f określona na zbiorze $D \subset \mathbb{R}$ jest w tym zbiorze **ograniczona** jeżeli zbiór jej wartości $f(D)$ jest ograniczony, to znaczy istnieje stała $A > 0$ taka, że dla dowolnego $x \in D$

$$|f(x)| \leqslant A.$$

Definicja 9.9. **Kresem górnym** funkcji f na zbiorze D nazywamy liczbę M spełniającą warunek

$$\forall_{x \in D} \quad f(x) \leqslant M.$$

Piszemy wówczas:

$$M = \sup_D f \qquad \text{lub} \qquad M = \sup_{x \in D} f(x).$$

Definicja 9.10. **Kresem dolnym** funkcji f na zbiorze D nazywamy liczbę m spełniającą warunek

$$\forall_{x \in D} \quad f(x) \geqslant m.$$

Piszemy wówczas:

$$m = \inf_D f \qquad \text{lub} \qquad m = \inf_{x \in D} f(x).$$

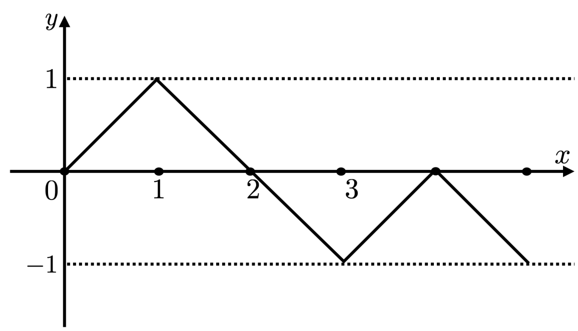
Twierdzenie 9.6 (Weierstrassa)**.** *Funkcja ciągła w przedziale domkniętym jest w tym przedziale ograniczona i osiąga w nim swoje kresy (górny i dolny).*

Uwaga 9.1. Jeżeli funkcja f określona w przedziale P osiąga w nim swój kres górny M (kres dolny m), to liczba ta stanowi jej największą (najmniejszą) wartość w przedziale P. W związku z tym niekiedy liczbę M nazywa się *maksimum absolutnym* (lub *globalnym*) funkcji f, zaś liczbę m – *minimum absolutnym* (lub *globalnym*) funkcji f w przedziale P.

Przykład 9.14. Niech

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{dla} \quad 0 \leqslant x \leqslant 1, \\ 2-x & \text{dla} \quad 1 < x < 3, \\ x-4 & \text{dla} \quad 3 \leqslant x < 4, \\ 4-x & \text{dla} \quad 4 \leqslant x \leqslant 5. \end{cases}$$

Jest to funkcja *przedziałami liniowa* (Rys.40). W każdym z przedziałów $(0;1)$, $(1;3)$, $(3;4)$, $(4;5)$



Rysunek 40. Wykres funkcji $f(x)$.

funkcja f jest ciągła jako funkcja liniowa. Aby wykazać jej ciągłość w całym przedziale $[0;5]$ wystarczy zbadać granice jednostronne na krańcach wspomnianych przedziałów. Mamy

$$\begin{aligned} &\lim_{x\to 0^+} f(x) = 0 = f(0), \\ &\lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1^+} f(x) = 1 = f(1), \\ &\lim_{x\to 3^-} f(x) = \lim_{x\to 3^+} f(x) = -1 = f(3), \\ &\lim_{x\to 4^-} f(x) = \lim_{x\to 4^+} f(x) = 0 = f(4), \\ &\lim_{x\to 5^-} f(x) = -1 = f(5), \end{aligned}$$

skąd wynika ciągłość w punktach załamania wykresu. Zatem f jest ciągła w przedziale domnkniętym $P = [0;5]$. Z Rysunku 40 widać, że

$$m = -1 = f(3) = f(5) \qquad \text{oraz} \qquad M = 1 = f(1),$$

funkcja f osiąga więc w przedziale P oba swoje kresy – zgodnie z Twierdzeniem 9.6. Zbiór wartości funkcji $f(P)$, czyli rzut wykresu na os y-ów jest przedziałem $[-1;1]$.

Twierdzenie 9.7 (o ciągłości funkcji odwrotnej)**.** *Jeżeli f jest funkcją ciągłą i ściśle monotoniczną w przedziale domkniętym $P = [a;b]$, to funkcja odwrotna jest ciągła w przedziale $f(P)$.*

9.6. **Zadania.**

Zadanie 9.1. Obliczyć granicę funkcji:

1. $\lim\limits_{x\to 1}(2x^2-x)$. Odp. ...
2. $\lim\limits_{x\to\infty}(x^2-5x)$ Odp. ...
3. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2-x}{2x^2+3}$. Odp. ...
4. $\lim\limits_{x\to\infty}(\sqrt{x^2+1}-x)$ Odp. ...
5. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{e^{-x}}{\ln(x+1)}$ Odp. ...
6. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{3x-1}{3x+2}\right)^x$ Odp. ...
7. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2-x-2}{x-2}$. Odp. ...
8. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{5^x}{2^x+7^x}$. Odp. ...
9. $\lim\limits_{x\to 0}\operatorname{arc\,tg}\left(\dfrac{1}{1-\sin(\arccos x)}\right)$. Odp. ...
10. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{1}{2}\right)^{\dfrac{1}{\cos(\operatorname{arc\,tg} x)}}$. Odp. ...

Zadanie 9.2. Znaleźć granicę lewostronną i granicę prawostronną następujących funkcji:

1. $\lim\limits_{x\to 0^-} e^{3x+1}$, Odp. ...
2. $\lim\limits_{x\to 1^+}\log(2x-1)$, Odp. ...
3. $\dfrac{x}{1+e^{\frac{1}{x}}}$ w punkcie $x=0$, Odp. ...
4. $2^{\frac{1}{x-2}}$ w punkcie $x=2$, Odp. ...

Zadanie 9.3. Obliczyć granicę funkcji $f(x)$ w zadanym punkcie x_0:

1. $f(x)=\dfrac{x-1}{x^2+2}$, $x_0=2$. Odp. $\frac{1}{6}$
2. $f(x)=\dfrac{3x^2-5x-2}{5x^2-20}$, $x_0=2$. Odp. $\frac{7}{20}$
3. $f(x)=\dfrac{2x^3+250}{x^2+4x-5}$, $x_0=-5$. Odp. -25
4. $f(x)=\dfrac{1}{x}$, $x_0=0$. Odp. ...
5. $f(x)=\dfrac{1}{x^2}$, $x_0=0$. Odp. ...
6. $f(x)=\dfrac{1}{x^3}$, $x_0=0$. Odp. ...
7. $f(x)=[x]$, $x_0=3$. Odp. ...
8. $f(x)=\dfrac{2\sin x}{3x}$, $x_0=0$. Odp. $\frac{2}{3}$
9. $f(x)=\dfrac{1}{1-x^2}$, $x_0=1$. Odp. ...

Zadanie 9.4. Wyznaczyć granicę funkcji w zadanym punkcie:

1. $f(x)=e^{\frac{1}{x}}$, $x=0$.
2. $f(x)=e^{\frac{1}{1-x^2}}$, $x=1$.
3. $f(x)=xe^{\frac{1}{x}}$, $x=0$.
4. $f(x)=\dfrac{e^{\frac{1}{x}}-1}{e^{\frac{1}{x}}+1}$, $x=0$.

Zadanie 9.5. Zbadać ciągłość następujących funkcji:

1. $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2-25}{x-5} & \text{dla} \quad x\neq 5,\\ -10 & \text{dla} \quad x=5.\end{cases}$
2. $f(x)=\begin{cases}\dfrac{\sin x}{x} & \text{dla} \quad x\neq 0,\\ 1 & \text{dla} \quad x=0.\end{cases}$
3. $f(x)=\begin{cases}\dfrac{\sin x}{|x|} & \text{dla} \quad x\neq 0,\\ 1 & \text{dla} \quad x=0.\end{cases}$
4. $f(x)=x+\dfrac{1}{x}$

Zadanie 9.6. Dla jakich wartości parametru $a \in \mathbb{R}$ funkcja

$$f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{a}{x}} & \text{dla} \quad x < 0 \\ \log_2(\cos x) & \text{dla} \quad x \in [0, \frac{\pi}{3}] \\ -a^2 & \text{dla} \quad x > \frac{\pi}{3} \end{cases}$$

jest ciągła.

Zadanie 9.7. Określić funkcje $f(x)$ w punkcie $x = 0$ tak aby była ona ciągła:

1. $f(x) = \dfrac{\sqrt{1+x}-1}{x}$.
2. $f(x) = x \sin \frac{\pi}{x}$.
3. $f(x) = \dfrac{\sin^2 x}{1 - \cos x}$.

10. Pochodna funkcji

10.1. **Pochodna i jej interpretacja geometryczna.**

Definicja 10.1. Niech f będzie funkcją określoną w otoczeniu ustalonego punktu $x_0 \in \mathbb{R}$. Wyrażenie

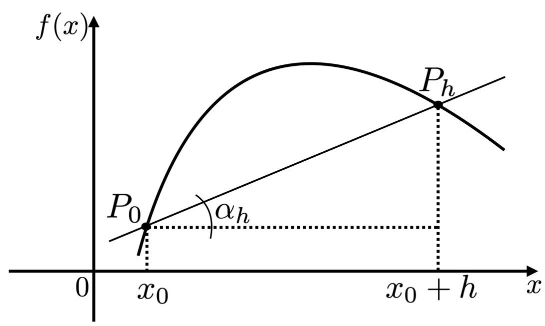
$$\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$$

określone dla dostatecznie małych $|h| \neq 0$, nazywamy **ilorazem różnicowym funkcji** f **w punkcie** x_0. Jeżeli istnieje skończona granica ilorazu różnicowego przy $h \to 0$, to nazywamy ją **pochodną funkcji** f **w punkcie** x_0 i oznaczamy

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} = f'(x_0) \tag{71}$$

O funkcji f mówimy wówczas, że jest różniczkowalna w punkcie x_0.

Interpretacja geometryczna pochodnej. Rozważmy wykres pewnej funkcji f przedstawiony na Rysunku 41. Poprowadźmy przez punkty $P_0 = (x_0, f(x_0))$ oraz $P_h = (x_0+h, f(x_0+h))$ prostą



Rysunek 41. Interpretacja geometryczna pochodnej pewnej funkcji $f(x)$.

(zwaną *sieczną wykresu*) i oznaczmy przez α_h kąt między dodatnią półosią x-ów a sieczną P_0P_h tzn. kąt, o jaki należy obrócić dodatnią półoś x-ów, aby przyjęła położenie równoległe do siecznej (przypominamy, że kąt α_h ma miarę dodatnią, gdy obracamy w kierunku przeciwnym do ruchu wskazówek zegara oraz miarę ujemną, gdy obrót jest zgodny z ruchem wskazówek zegara). Graniczne położenie siecznej P_0P_h gdy $h \to 0$ nazywamy **styczną do wykresu funkcji** f **w punkcie** P_0. Jeżeli przez α oznaczymy kąt między dodatnią półosią x-ów a styczną, to ze wzoru (71) wynika, że

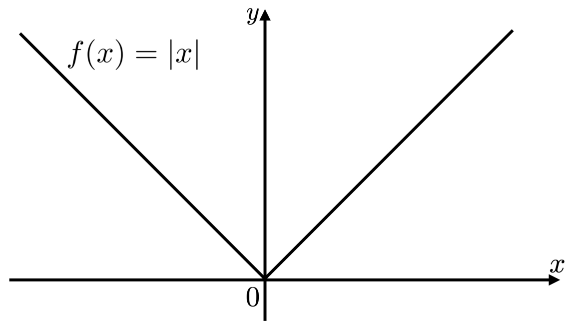
$$f'(x_0) = \operatorname{tg}\alpha.$$

Twierdzenie 10.1. *Jeżeli funkcja f jest różniczkowalna w punkcie x_0 to jest w tym punkcie ciągła.*

Przykład 10.1. Niech

$$f(x) = |x|.$$

Funkcja $|x|$ jest ciągła w punkcie $x_0 = 0$ (por. Przykład 9.12) ale nie jest w tym punkcie różnicz-



Rysunek 42. Wykres funkcji $f(x) = |x|$.

kowalna. Istotnie, zbadajmy wartość ilorazu różnicowego tej funkcji przy $h \to 0$:

$$\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} = \frac{|x_0+h|-|x_0|}{h} = \frac{|0+h|-|0|}{h} = \frac{|h|}{h} = \begin{cases} 1 & \text{dla} \quad h>0 \\ -1 & \text{dla} \quad h<0 \end{cases}.$$

Zatem nie istnieje jednoznaczna granica ilorazu różnicowego funkcji $f(x) = |x|$ w punkcie $x_0 = 0$ a więc funkcja ta nie jest różniczkowalna w zerze. Ponadto z Rysunku 42 widać, że w punkcie $(0,0)$ nie istnieje styczna do wykresu funkcji.

10.2. **Działania na funkcjach różniczkowalnych.** W dalszej części wykładu będziemy zakładali, że funkcje f, g są określone w pewnym otoczeniu punktu $x_0 \in \mathbb{R}$.

Twierdzenie 10.2 (o pochodnych sumy, różnicy i iloczynu)**.** *Jeżeli funkcje f, g są różniczkowalne w punkcie x_0 oraz $c \in \mathbb{R}$ jest stałą, to funkcje*

$$f+g, \quad f-g, \quad cf, \quad f\cdot g$$

są również różniczkowalne w punkcie x_0 oraz zachodzą wzory:

$$\begin{aligned} (f+g)'(x_0) &= f'(x_0)+g'(x_0), \\ (f-g)'(x_0) &= f'(x_0)-g'(x_0), \\ (cf)'(x_0) &= cf'(x_0), \\ (fg)'(x_0) &= f'(x_0)g(x_0)+f(x_0)g'(x_0) \end{aligned}$$

Twierdzenie 10.3 (o pochodnej ilorazu)**.** *Jeżeli funkcje f, g są różniczkowalne w punkcie x_0 oraz $g(x_0) \neq 0$ to*

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(x_0) = \frac{f'(x_0)g(x_0)-f(x_0)g'(x_0)}{[g(x_0)]^2}$$

Twierdzenie 10.4 (o pochodnej funkcji złożonej)**.** *Zakładamy, że*

(i) funkcja f jest określona w otoczeniu punktu $x_0 \in \mathbb{R}$,
(ii) funkcja g jest określona w otoczeniu punktu $y_0 = f(x_0)$,
(iii) f jest różniczkowalna w punkcie x_0,
(iv) g jest różniczkowalna w punkcie y_0,

Wówczas funkcja

$$h(x_0) = (f \circ g)(x_0) = g(f(x_0))$$

jest różniczkowalna w punkcie x_0 oraz

$$h'(x_0) = g'(f(x_0)) \cdot f'(x_0)$$

Uwaga 10.1. Inne oznaczenia pochodnej:

$$f'(x) = [f(x)]' = \frac{df(x)}{dx} = \frac{d}{dx}f(x) = y' = \frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}y.$$

Pochodną w punkcie x_0 zapisujemy także:

$$f'(x_0) = \left.\frac{df(x)}{dx}\right|_{x=x_0} = \left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=x_0}.$$

10.3. **Pochodne funkcji elementarnych.** Podamy teraz wzory rachunkowe pozwalające znaleźć pochodne funkcji elementarnych. Czynność obliczania pochodnej danej funckji nazywamy **różniczkowaniem**.

1. Funkcja stała

$$f(x) = c, \qquad f'(x) = 0.$$

2. Funkcja liniowa

$$f(x) = ax + b, \qquad f'(x) = a.$$

3. Funkcja potęgowa o wykładniku naturalnym $n \in \mathbb{N}$

$$f(x) = x^n, \qquad f'(x) = nx^{n-1},$$

$$f(x) = x^{-1} = \frac{1}{x}, \qquad f'(x) = -x^{-2} = \frac{-1}{x^2}.$$

4. Funkcja potęgowa o wykładniku rzeczywistym $\alpha \in \mathbb{R}$

$$f(x) = x^\alpha, \qquad f'(x) = \alpha x^{\alpha-1},$$

$$f(x) = x^{\frac{1}{2}} = \sqrt{x}, \qquad f'(x) = \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

5. Funkcje trygonometryczne

$$f(x) = \sin x, \qquad f'(x) = \cos x,$$

$$f(x) = \cos x, \qquad f'(x) = -\sin x,$$

$$f(x) = \operatorname{tg} x, \qquad f'(x) = \frac{1}{\cos^2 x},$$

$$f(x) = \operatorname{ctg} x, \qquad f'(x) = -\frac{1}{\sin^2 x}.$$

6. Funkcja wykładnicza

$$f(x) = a^x, \qquad f'(x) = a^x \ln a,$$

$$f(x) = e^x, \qquad f'(x) = e^x.$$

7. Funkcja logarytmiczna

$$f(x) = \log_a x, \qquad f'(x) = \frac{1}{x \ln a},$$

$$f(x) = \ln x, \qquad f'(x) = \frac{1}{x}.$$

8. Funkcje cyklometryczne

$$f(x) = \arcsin x, \qquad f'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, \quad \text{dla} \quad -1 < x < 1,$$

$$f(x) = \arccos x, \qquad f'(x) = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}, \quad \text{dla} \quad -1 < x < 1,$$

$$f(x) = \operatorname{arc\,tg} x, \qquad f'(x) = \frac{1}{1+x^2}, \quad \text{dla} \quad x \in \mathbb{R}$$

$$f(x) = \operatorname{arc\,ctg} x, \qquad f'(x) = \frac{-1}{1+x^2}, \quad \text{dla} \quad x \in \mathbb{R}$$

Przykład 10.2. Wyznaczymy pochodną funkcji

$$f(x) = \frac{1}{x^n}, \quad n \in \mathbb{N}, \quad x \neq 0.$$

Pochodną tę można obliczyć dwoma sposobami:

1 sposób. Zapiszmy funkcje f w postaci

$$f(x) = x^{-n}$$

wówczas, korzystając ze wzoru na pochodną funkcji potęgowej o wykładniku naturalnym otrzymamy

$$f'(x) = -nx^{-n-1} = \frac{-n}{x^{n+1}}.$$

2 sposób. Można zastosować wzór na pochodną ilorazu i wówczas dostaniemy

$$f'(x) = \frac{0 \cdot x^n - 1 \cdot nx^{n-1}}{(x^n)^2} = \frac{-nx^{n-1}}{x^{2n}} = -nx^{n-1-2n} = -nx^{-n-1} = \frac{-n}{x^{n+1}}.$$

Przykład 10.3. Obliczymy teraz pochodną funkcji

$$f(x) = e^{\cos x}.$$

Jest to funkcja złożona $f(x) = g(h(x))$ gdzie funkcją zewnętrzną jest $g(x) = e^x$ a funkcją wewntętrzną jest $h(x) = \cos x$. Korzystając z twierdzenia o pochodnej funkcji złożonej otrzymamy:

$$f'(x) = (e^{\cos x})' \cdot (\cos x)' = e^{\cos x} \cdot (-\sin x) = -e^{\cos x} \sin x$$

10.4. **Zastosowanie pochodnej do badania ekstremów funkcji.**

10.4.1. *Ekstrema funkcji.* Przypomnijmy jeszcze raz definicję ekstremum funkcji.

Definicja 10.2. Niech f będzie funkcją określoną w pewnym otoczeniu U punktu $x_0 \in \mathbb{R}$. Mówimy, że funkcja f ma

maksimum (lokalne) w punkcie x_0, jeżeli

$$f(x) \leqslant f(x_0) \quad \text{dla każdego} \quad x \in U;$$

minimum (lokalne) w punkcie x_0, jeżeli

$$f(x) \geqslant f(x_0) \quad \text{dla każdego} \quad x \in U.$$

Mówimy, że funkcja f ma w punkcie x_0 **extremum (lokalne)**, jeżeli ma w tym punkcie maksimum (lokalne) lub minimum (lokalne).

Uwaga 10.2. Terminów *maksimum lokalne* i *minimum lokalne* używa się dla podkreślenia, że chodzi o zachowanie się funkcji w pewnym otoczeniu punktu x_0. Dla największej i najmniejszej wartości funkcji w całym przedziale, czyli jej kresu górnego i dolnego używa się nazwy *maksimum globalne* i *minimum globalne*

Warunek konieczny istnienia ekstremum

Twierdzenie 10.5 (Fermata)**.** *Jeżeli funkcja różniczkowalna w przedziale $\mathbb{P}$ osiąga w pewnym punkcie wewnętrznym $x = x_0$ tego przedziału ekstremum lokalne, to pochodna w tym punkcie*

$$f'(x_0) = 0.$$

10.4.2. *Znak pochodnej a monotoniczność funkcji.*

Twierdzenie 10.6. *Niech f będzie funkcją różniczkowalną w przedziale (a, b) (ograniczonym lub nie). Wówczas*

(i) $f'(x) = 0$ dla $x \in (a, b)$ to f jest funkcją stałą,
(ii) $f'(x) \geqslant 0$ dla $x \in (a, b)$ to f jest funkcją rosnącą w przedziale (a, b),
(iii) $f'(x) > 0$ dla $x \in (a, b)$ to f jest funkcją ściśle rosnącą w przedziale (a, b),
(iv) $f'(x) \leqslant 0$ dla $x \in (a, b)$ to f jest funkcją malejącą w przedziale (a, b).
(v) $f'(x) < 0$ dla $x \in (a, b)$ to f jest funkcją ściśle malejącą w przedziale (a, b),

Warunek dostateczny istnienia ekstremum

Twierdzenie 10.7. *Niech f będzie funkcją różniczkowalną w przedziale otwartym $\mathbb{P}$ i niech*

$$f'(x_0) = 0$$

gdzie x_0 jest punktem przedziału $\mathbb{P}$. Jeżeli istnieje takie $\varepsilon > 0$, że

$$f'(x) \begin{cases} < 0 & \textit{dla} \quad x_0 - \varepsilon < x < x_0, \\ > 0 & \textit{dla} \quad x_0 < x < x_0 + \varepsilon, \end{cases}$$

to funkcja f osiąga minimum w punkcie x_0. Jeżeli natomiast

$$f'(x) \begin{cases} > 0 & \textit{dla} \quad x_0 - \varepsilon < x < x_0, \\ < 0 & \textit{dla} \quad x_0 < x < x_0 + \varepsilon, \end{cases}$$

to funkcja f osiąga maksimum w punkcie x_0.

Przykład 10.4. Niech

$$f(x) = x^2, \qquad g(x) = x^3, \qquad x \in \mathbb{R},$$

wówczas

$$f'(x) = 2x, \qquad g'(x) = 3x^2, \qquad x \in \mathbb{R}.$$

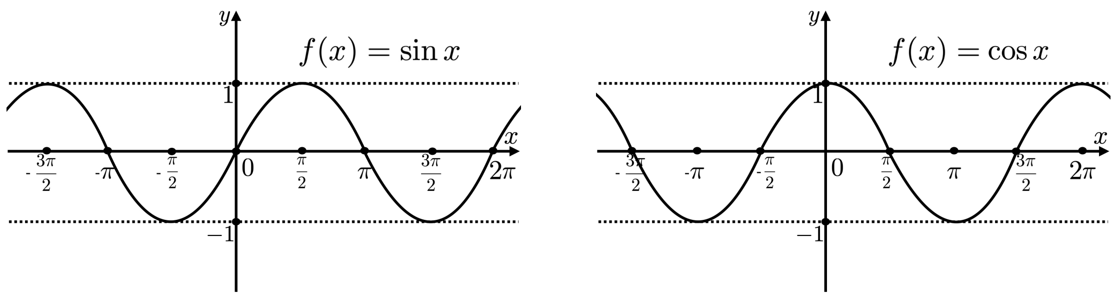
Mamy

$$g'(x) > 0 \quad \text{dla} \quad x \neq 0$$

a więc zgodnie w twierdzeniem 10.6 funckja g jest ściśle rosnąca w każdym z przedziałów $(-\infty, 0]$, $[0, \infty)$, natomiast

$$f'(x) \begin{cases} > 0 & \text{dla} \quad x > 0, \\ < 0 & \text{dla} \quad x < 0 \end{cases}$$

skąd wynika, że f jest ściśle malejąca w przedziale $(-\infty, 0]$ i ściśle rosnąca w przedziale $[0, \infty)$.



Rysunek 43. Wykresy funkcji $f(x) = \sin x$ i $f(x) = \cos x$

Przykład 10.5. Zbadamy ekstrema funkcji

$$f(x) = \sin x.$$

Mamy

$$f'(x) = \cos x,$$

a więc warunek

$$f'(x) = 0$$

jest spełniony w punktach

$$x_k = \frac{\pi}{2} + k\pi, \quad k \in Z,$$

oraz

$$f'(x) \begin{cases} > 0 & \text{dla} \quad \frac{\pi}{2} + (2k-1)\pi < x < \frac{\pi}{2} + 2k\pi, \\ < 0 & \text{dla} \quad \frac{\pi}{2} + 2k\pi < x < \frac{\pi}{2} + (2k+1)\pi, \end{cases}$$

Zatem funkcja sinus ma maksima lokalne w punktach

$$x_{2k} = \frac{\pi}{2} + 2k\pi.$$

oraz minima lokalne w punktach

$$x_{2k+1} = \frac{3\pi}{2} + (2k+1)\pi$$

10.5. **Nieoznaczoności i reguły de l'Hospitala.**

Twierdzenie 10.8. *Załóżmy, że*

(i) funkcje f, g są ciągłe w otoczeniu punktu $a \in \mathbb{R}$ i różniczkowalne w jego sąsiedztwie,
(ii) $g'(x) \neq 0$ w sąsiedztwie punktu a,
(iii) $f(a) = g(a) = 0$.

Wówczas

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to a} \frac{f'(x)}{g'(x)} \tag{72}$$

o ile istnieje granica (skończona lub niewłaściwa) po prawej stronie wzoru (72).

Uwaga 10.3. Twierdzenie 10.8 pozostaje prawdziwe, jeżeli w założeniach (i), (ii) zastąpimy otoczenie i sąsiedztwo punktu a przez otoczeni względnie sąsiedztwo prawostronne (lewostronne). Granicę we wzorze (72) należy wówczas zastąpić przez granicę prawostronną (lewostronną).

Przykład 10.6. Obliczymy granicę

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}.$$

W przykładzie tym mamy do czynienia z *nieoznaczonością* typu $\frac{0}{0}$. Funkcje $f(x)=\sin x$ i $g(x)=x$ spełniają założenia twierdzenia 10.8, możemy więc zastosować wzór (72), który daje

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{\cos x}{1}=\lim_{x\to 0}\cos x=1.$$

Twierdzenie 10.9. *Załóżmy, że*

(i) funkcje f,g są różniczkowalne dla $x>A>0$,
(ii) $g'(x)\neq 0$ dla $x>A$,
(iii) $\lim_{x\to\infty} f(x)=\lim_{x\to\infty} g(x)=0$.

Wówczas

$$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to\infty}\frac{f'(x)}{g'(x)} \tag{73}$$

o ile istnieje granica (skończona lub niewłaściwa) po prawej stronie wzoru (73).

Twierdzenie 10.10. *Załóżmy, że*

(i) funkcje f,g są różniczkowalne dla $x>A$ (gdzie $A>0$ jest odpowiednio dobraną liczbą),
(ii) $g'(x)\neq 0$ dla $x>A$,
(iii) $\lim_{x\to\infty} f(x)=\lim_{x\to\infty} g(x)=\infty$.

Wówczas

$$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to\infty}\frac{f'(x)}{g'(x)} \tag{74}$$

o ile istnieje granica po prawej stronie wzoru (74) *(skończona lub niewłaściwa).*

Przykład 10.7. Obliczymy

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x}.$$

Mamy tu nieoznaczoność typu $\frac{\infty}{\infty}$. Funkcje $f(x)=\ln x$ oraz $g(x)=x$ spełniają założenia twierdzenia 10.10, zatem

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{1}{x}}{1}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x}=0.$$

10.6. **Zadania.**

Zadanie 10.1. Obliczyć pochodną funkcji

1. $f(x)=x^7+4x^5+13x^4-x+19$.
2. $f(x)=\frac{1}{3}x^3-\frac{3}{2}x^4+\frac{13}{5}x^5-2x^6$.
3. $f(x)=5x^{15}-x^2+\frac{1}{3}x-2$.
4. $f(x)=\dfrac{4}{x^3}$.
5. $f(x)=9x^7+3x^{-5}-3x^{-11}$.
6. $f(x)=\dfrac{4x^5-2}{\sqrt{2+\sqrt{3}}}$.

7. $f(x) = \dfrac{4x^7 + 3x^5 - 2x^4 + 7x - 2}{3x^4}$.

8. $f(x) = 2\dfrac{x+1}{x-1}$.

9. $f(x) = 4x^3\sqrt{x}$.

10. $f(x) = \dfrac{3x^2 - 4x\sqrt[3]{x^2}}{2\sqrt{x}}$.

11. $f(x) = \sqrt[3]{x^2\sqrt{x\sqrt[4]{x^3}}}$.

12. $f(x) = \sqrt[5]{x^2}$.

13. $f(x) = x^3 \cos x$.

14. $f(x) = \dfrac{2 - x^2}{2x^3 + x + 3}$.

15. $f(x) = (4x^5 - 7x^3 + 14x^2 - 5)^3$.

16. $f(x) = \sqrt{3x^2 - 7x + 12}$.

17. $f(x) = \sin 4x$.

18. $f(x) = \sqrt{x^2 - 4}$.

19. $f(x) = \cos^3 x$.

20. $f(x) = e^{-x}$.

21. $f(x) = e^{4x^3 - 6x + 1}$.

22. $f(x) = \operatorname{tg}^4 2x$.

23. $f(x) = \sin^3\sqrt{\dfrac{1-2x}{x}}$.

24. $f(x) = \dfrac{x+1}{\sqrt{1-x}}$.

25. $f(x) = x\sqrt{x^2+1}$.

26. $f(x) = 4^x \operatorname{arc\,tg} x$.

27. $f(x) = 2\sin 3x + x$.

28. $f(x) = \dfrac{x \sin x}{1 + \operatorname{tg} x}$.

29. $f(x) = (4\sin x - 8\sin^3 x)\cos x$.

30. $f(x) = e^{3x}$.

31. $f(x) = 3e^{-2x}$.

32. $f(x) = e^{\sin x}$.

33. $f(x) = 5e^{\cos x}$.

34. $f(x) = (10x^2 - 1)e^{3x}$.

35. $f(x) = \ln 3x$.

36. $f(x) = 5\ln 10x$.

37. $f(x) = \ln \frac{30}{x+3}$.

38. $f(x) = \dfrac{e^x}{1+x^2}$.

39. $f(x) = e^{\sqrt{x^2+1}}$.

40. $f(x) = \dfrac{\ln x}{1+x^2}$.

41. $f(x) = \ln(\sin x)$.

42. $f(x) = \sin\sqrt{1+x^2}$.

43. $f(x) = \cos^3 4x$.

Zadanie 10.2. Wyznaczyć ekstrema funkcji

1. $y = x^3 + 3x^2 - 9x - 2$.

2. $y = x^3(x-1)(x-2)^2$.

3. $y = \dfrac{2x-3}{x+1}$.

4. $y = \dfrac{-2x}{(1+x^2)^2}$.

5. $y = \dfrac{x^2}{x^2-4}$.

6. $y = \dfrac{x^2-3}{x-2}$.

7. $y = x - \dfrac{4}{x^2}$.

8. $y = \dfrac{x^3}{x^2-x-2}$.

9. $y = \sqrt{x^2-4x+3}$.

10. $f(x) = \frac{1}{x}\sin x$.
11. $f(x) = \frac{1}{x}\sin x^2$.
12. $f(x) = \cos x$.
13. $f(x) = \ln(1+x)$.
14. $f(x) = \frac{x}{1+x}$.
15. $f(x) = x + \sin x$.
16. $f(x) = \sqrt{x^2-1}$.
17. $f(x) = e^{-x^2}$.
18. $f(x) = e^{-\frac{1}{x+1}}$.
19. $f(x) = \frac{x^3}{1+x^2}$.
20. $f(x) = x - \frac{2}{x} - 3\ln x$.
21. $f(x) = \frac{5-3x}{x^2-1}$.
22. $f(x) = e^x - x$.
23. $f(x) = 5 - x - \frac{4}{x}$.
24. $f(x) = xe^{-x}$.

Zadanie 10.3. Korzystając z reguły de l'Hospitala wyznaczyć granice funkcji z zadania 9.4

1. $f(x) = xe^{\frac{1}{x}}$, $x = 0$. Odp. ...

   $f(x) = \frac{e^{\frac{1}{x}}-1}{e^{\frac{1}{x}}+1}$, $x = 0$. Odp. ...

Zadanie 10.4. Określić nieoznaczoność wyrażenia i obliczyć granicę stosując regułę de l'Hospitala

1. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{e^{3x}-3x-1}{\sin^2 5x}$.
2. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{2\cos x - 2 + x^2}{x^2\sin^2 x}$.
3. $\lim\limits_{x\to 0^+} \frac{\ln x}{\operatorname{ctg} x}$.
4. $\lim\limits_{x\to 0^+} \frac{\ln x}{1+2\ln\sin x}$.
5. $\lim\limits_{x\to +\infty} \frac{x^2}{e^x}$.
6. $\lim\limits_{x\to +\infty} \frac{\ln x}{x^2}$.
7. $\lim\limits_{x\to 0^+} x\ln x$.
8. $\lim\limits_{x\to 1} \left(\frac{1}{x-1} - \frac{1}{\ln x}\right)$.
9. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{e^x - e^{-x}}{x}$.
10. $\lim\limits_{x\to 1} \frac{\ln x}{\sqrt{x^2-1}}$.

11. Pochodne wyższych rzędów

11.1. **Pochodna rzędu k.**

Definicja 11.1. Niech f będzie funkcją różniczkowalną w przedziale otwartym $\mathbb{P}$ i niech

$$[f(x)]' = f'(x), \quad x \in \mathbb{P}.$$

Jeżeli funkcja f' jest różniczkowalna w przedziale $\mathbb{P}$, to jej pochodną nazywamy **drugą pochodną funkcji** f i oznaczamy

$$[f'(x)]' = f''(x) = f^{(2)}(x), \quad x \in \mathbb{P}.$$

Ogólnie, przyjmujemy następującą rekurencyjną definicję **k-tej pochodnej** lub inaczej **pochodnej rzędu** k funkcji f[1]:

$$f^{(k)}(x) = [f^{(k-1)}(x)]', \quad x \in \mathbb{P}$$

Przez pochodną rzędu zerowego rozumiemy samą funkcję f, zaś dla $k = 2, 3$ używane jest oznaczenie

$$f^{(2)}(x) = f''(x),$$
$$f^{(3)}(x) = f'''(x).$$

Uwaga 11.1. Jeżeli $\mathbb{P}$ nie jest przedziałem otwartym, lecz zawiera swój lewy koniec a (względnie prawy koniec b), to przyjęta definicja k-tej pochodnej pozostaje w mocy z tym, że przez pochodną w punkcie a (względnie b) rozumiemy pochodną prawostronną (względnie lewostronną). Jeżeli funkcja ma skończoną pochodną prawostronną (względnie lewostronną) w punkcie x_0, to jest w tym punkcie ciągła prawostronnie (względnie lewostronnie).

Uwaga 11.2. Jeżeli funkcja f ma w przedziale $\mathbb{P}$ (otwartym lub nie) *skończone* pochodne do rzędu n włącznie, to mówimy, że jest ona w tym przedziale **n-krotnie różniczkowalna**. Jeżeli funkcja f jest n-krotnie różniczkowalna w przedziale $\mathbb{P}$ to ma w tym przedziale *ciągłe pochodne do rzędu* $n-1$ włącznie. Jeżeli również pochodna rzędu n jest ciągła w przedziale $\mathbb{P}$ to mówimy ,że f jest klasy C^n w tym przedziale (zapisujemy $f \in C^n(\mathbb{P})$). Jeżeli funkcja f ma w przedziale $\mathbb{P}$ pochodne dowolnego rzędu to mówimy, że f jest klasy C^∞ w tym przedziale (zapisujemy $f \in C^\infty(\mathbb{P})$).

11.2. **Funkcje wypukłe i funkcje wklęsłe.**

Definicja 11.2. Załóżmy, że funkcja f jest dwukrotnie różniczkowalna w przedziale $\mathbb{P}$. Mówimy, że f jest **wypukła** w przedziale $\mathbb{P}$, jeżeli

$$f''(x) \geqslant 0 \quad \text{dla} \quad x \in \mathbb{P};$$

f jest **wklęsła** w przedziale $\mathbb{P}$, jeżeli

$$f''(x) \leqslant 0 \quad \text{dla} \quad x \in \mathbb{P}.$$

---

[1]Zapiszmy pochodną funkcji f w tak zwanym zapisie Leibnitza czyli

$$f'(x) = \frac{df(x)}{dx}, \quad x \in \mathbb{P}$$

wówczas drugą pochodną tej funkcji możemy zapisać w postaci

$$f''(x) = \frac{d^2 f(x)}{dx^2}, \quad x \in \mathbb{P}.$$

Analogicznie, k-tą pochodną funkcji f zapiszemy w postaci

$$\frac{d^k f(x)}{dx^k} = \frac{d}{dx}\frac{d^{k-1} f(x)}{dx^{k-1}}, \quad x \in \mathbb{P}$$

dla $k \in \mathbb{N}$.

Uwaga 11.3. Oczywiście f jest wypukła (wklęsła) wtedy i tylko wtedy, gdy $-f$ jest wklęsła (wypukła) w przedziale $\mathbb{P}$.

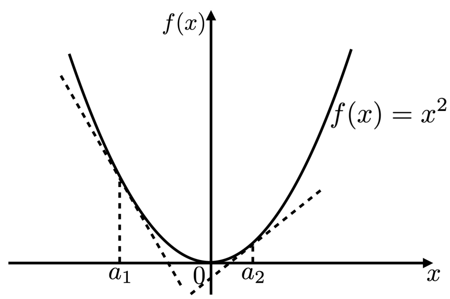
Przypomnijmy, że równanie stycznej do wykresu funkcji f w punkcie $(a, f(a))$ ma postać

$$y = f(a) + (x-a)f'(a).$$

Jeżeli f jest funkcją wypukłą w $\mathbb{P}$, to jej wykres leży nad styczną poprowadzoną w dowolnym punkcie $(a, f(a))$ gdzie $a \in \mathbb{P}$. Jeżeli f jest funkcją wklęsłą w $\mathbb{P}$, to zachodzi sytuacja przeciwna - wykres leży pod styczną poprowadzoną w punkcie $(a, f(a))$ dla dowolnego $a \in \mathbb{P}$.

Przykład 11.1. Niech (rys.44)

$$f(x) = x^2.$$



RYSUNEK 44. Wykres funkcji $f(x) = x^2$

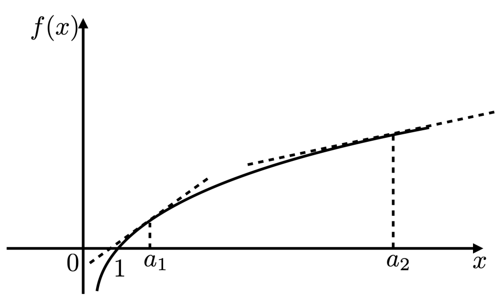
wówczas

$$f''(x) = 2$$

dla dowolnego x, zatem f jest wypukła w przedziale $\mathbb{P} = (-\infty, \infty)$. Z rysunku 44 widać, że parabola o równaniu $y = x^2$ leży nad styczną poprowadzoną w dowolnie obranym punkcie (a, a^2).

Przykład 11.2. Niech (rys.45)

$$f(x) = \ln x, \quad x > 0$$



RYSUNEK 45. Wykres funkcji $f(x) = \log x, \; x > 0$

wówczas
$$f''(x) = -\frac{1}{x^2} < 0,$$
zatem f jest wklęsla w przedziale $\mathbb{P} = (0, \infty)$. Z rys. 45 widać, że wykres funkcji f leży pod styczną poprowadzoną w dowolnie obranym punkcie $(a, \log a)$.

Przykład 11.3. Rozważmy funkcję potęgową
$$f(x) = x^\alpha, \qquad \alpha \in \mathbb{R}$$
określoną w przedziale $\mathbb{P} = (0, \infty)$. Mamy dla $x \in \mathbb{P}$
$$f''(x) = \alpha(\alpha - 1)x^{\alpha-2}$$
a stąd
$$f''(x) \begin{cases} < 0 & \text{gdy} \quad 0 < \alpha < 1, \\ > 0 & \text{gdy} \quad \alpha < 0 \text{ lub } \alpha > 1. \end{cases} \tag{75}$$
Dla $\alpha \in (0, 1)$ funkcja f jest wklęsła w przedziale $\mathbb{P}$, dla $\alpha \in (-\infty, 0) \cup (1, \infty)$ funkcja f jest wypukła w tym przedziale.

11.3. **Punkty przegięcia.**

Definicja 11.3. Niech f będzie funkcją klasy C^2 w przedziale otwartym $\mathbb{P}$. Mówimy, że funkcja f ma w punkcie $a \in \mathbb{P}$ **punkt przegięcia** jeżeli istnieje $r \in \mathbb{R}_+$ dla którego jest ona ściśle wklęsła na przedziale $[a - r, a]$ oraz ściśle wypukła na przedziale $[a, a + r]$ lub odwrotnie – ściśle wypukła na przedziale $[a - r, a]$ i ściśle wklęsła na $[a, a + r]$.

Warunek konieczny istnienia punktu przegięcia

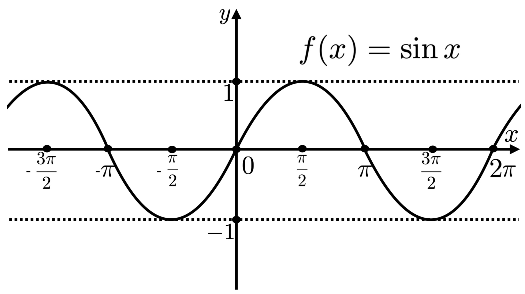
Twierdzenie 11.1. *Jeżeli f jest klasy C^2 w przedziale otwartym $\mathbb{P}$ oraz $a \in \mathbb{P}$ jest punktem przegięcia, to*
$$f''(a) = 0.$$

Warunek dostateczny istnienia punktu przegięcia

Twierdzenie 11.2. *Niech f będzie funkcją dwukrotnie różniczkowalną w przedziale otwartym $\mathbb{P}$ i niech*
$$f''(a) = 0$$
gdzie a jest punktem przedziału $\mathbb{P}$. Jeżeli istnieje takie $\delta > 0$, że
$$f''(x) \begin{cases} < 0 & \textit{dla} \quad a - \delta < x < a, \\ > 0 & \textit{dla} \quad a < x < a + \delta, \end{cases}$$
lub
$$f''(x) \begin{cases} > 0 & \textit{dla} \quad a - \delta < x < a, \\ < 0 & \textit{dla} \quad a < x < a + \delta, \end{cases}$$
to a jest punktem przegięcia funkcji f.

Przykład 11.4. Zbadamy punkty przegięcia funkcji
$$f(x) = \sin x.$$

Mamy
$$f'(x) = \cos x, \quad f''(x) = -\sin x,$$



RYSUNEK 46. Wykresy funkcji $f(x) = \sin x$.

Zatem

$$f''(x) = 0 \quad \text{dla} \quad x = \check{x}_k = k\pi \quad k \in Z$$

przy czym

$$f''(x) \begin{cases} > 0 & \text{dla} \quad (2k-1)\pi < x < 2k\pi, \\ < 0 & \text{dla} \quad 2k\pi < x < (2k+1)\pi, \end{cases}$$

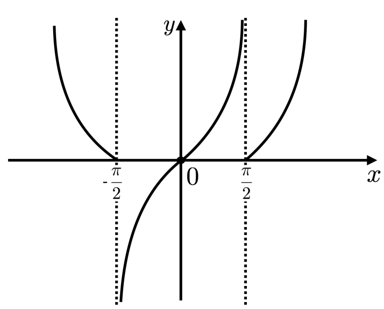
a więc funkcja ta jest wypukła w każdym przedziale $[(2k-1)\pi, 2k\pi]$ i wklęsła w każdym przedziale $[2k\pi, (2k+1)\pi]$, $k \in Z$. Wobec tego punkty $\check{x}_k$ są punktami przegięcia funkcji sinus.

11.4. **Asymptoty wykresu funkcji.**

Definicja 11.4. Niech f będzie funkcją określoną w sąsiectwie punktu $a \in \mathbb{P}$. Mówimy, że prosta $x = a$ jest **asymptotą pionową** wykresu funkcji f, jeżeli przynajmniej jedna z granic jednostronnych funkcji f w punkcie a jest granicą niewłaściwą (tzn. $+\infty$ lub $-\infty$).

Przykład 11.5. Niech

$$f(x) = \begin{cases} \left(x + \dfrac{\pi}{2}\right)^2 & \text{dla} \quad x \leqslant -\dfrac{\pi}{2}, \\ \operatorname{tg} x & \text{dla} \quad -\dfrac{\pi}{2} < x < \dfrac{\pi}{2}, \\ \left(x - \dfrac{\pi}{2}\right)^2 & \text{dla} \quad x \geqslant \dfrac{\pi}{2}, \end{cases}$$



RYSUNEK 47. Wykres funkcji $f(x)$

wówczas

$$\lim_{x\to -\frac{\pi}{2}^+} f(x) = -\infty, \qquad \lim_{x\to \frac{\pi}{2}^-} f(x) = +\infty,$$

zatem proste $x = -\dfrac{\pi}{2}$ oraz $x = \dfrac{\pi}{2}$ są asymptotami pionowymi wykresu funkcji f (rys. 47).

Oprócz asymptot pionowych rozważamy również **asymptoty skośne**.

Definicja 11.5. Niech l będzie prostą o równaniu

$$y(x) = Ax + B$$

Mówimy, że l jest **asymptotą skośną wykresu funkcji** f **przy** $y \to \infty$ jeżeli

$$\lim_{x\to\infty} (f(x) - y(x)) = 0 \tag{76}$$

(oczywiście zakładamy, że funkcja f jest określona przynajmniej dla dostatecznie dużych x).

Z podanej definicji łatwo wyprowadzić wzory pozwalające wyznaczyć współczynniki A,B w równaniu asymptoty. Z warunku (76) wynika, że również

$$\lim_{x\to\infty} \frac{f(x) - y(x)}{x} = 0$$

a to oznacza, że

$$\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = A. \tag{77}$$

Z (76) otrzymujemy teraz

$$\lim_{x\to\infty} (f(x) - Ax) = B. \tag{78}$$

Uwaga 11.4. Współczynnik A można również obliczyć ze wzoru

$$A = \lim_{x\to\infty} f'(x), \tag{79}$$

o ile funkcja f jest różniczkowalna dla dostatecznie dużych x i istnieje granica po prawej stronie.

Uwaga 11.5. Jeżeli

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = B,$$

to zgodnie z (77)

$$A = \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = 0,$$

zatem prosta

$$y = B$$

jest asymptotą skośną wykresu funkcji f przy $x \to \infty$.

W zupełnie podobny sposób możemy wprowadzić asymptoty przy $x \to -\infty$.

Przykład 11.6. Niech

$$f(x) = \frac{1}{x}\sin x, \qquad g(x) = \frac{1}{x}\sin x^2, \quad x > 0.$$

Zbadamy asymptoty wykresów obu funkcji przy $x \to \infty$. Mamy

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} g(x) = 0,$$

zatem prosta $y = 0$ jest asymptotą obu wykresów. Zauważmy, że w przypadku funkcji f współczynnik A można obliczyć również ze wzoru (79), gdyż

$$f'(x) = \frac{\cos x}{x} - \frac{\sin x}{x^2}$$

zatem

$$\lim_{x\to\infty} f'(x) = 0.$$

Natomiast

$$g'(x) = 2\cos x^2 - \frac{\sin x^2}{x^2},$$

wobec tego

$$\lim_{x\to\infty} g'(x)$$

nie istnieje i wzór (79) nie może być stosowany.

Przykład 11.7. Znajdziemy asymptoty wykresu funkcji

$$f(x) = \sqrt{1 + x^2}.$$

Mamy

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty} \sqrt{\frac{1}{x^2} + 1} = 1 = A$$

oraz (po przekształceniu)

$$f(x) - x = \frac{1}{\sqrt{1 + x^2} + x},$$

skąd

$$\lim_{x\to+\infty} (f(x) - x) = 0,$$

Zatem prosta

$$y = x$$

jest asymptotą wykresu przy $x \to +\infty$. Podobnie

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x} = -\lim_{x\to-\infty} \sqrt{\frac{1}{x^2 + 1}} = -1$$

oraz

$$f(x) + x = \frac{1}{\sqrt{1 + x^2} - x},$$

skąd

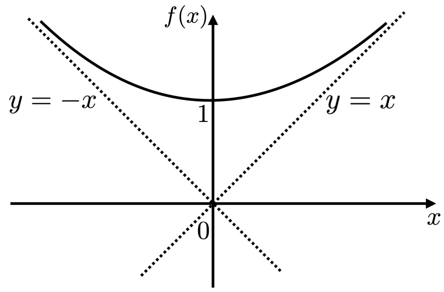
$$\lim_{x\to-\infty} (f(x) + x) = 0.$$

Zatem prosta

$$y = -x$$

jest asymptotą wykresu przy $x \to -\infty$. Zauważmy, że ten ostatni wynik można było przewidzieć bez rachunku. Funkcja f jest bowiem parzysta, zatem wykres jej jest symetryczny względem osi y-ów. Znając wykres dla $x > 0$ i asymptotę przy $x \to \infty$ znajdujemy pozostałą część wykresu (a więc i jego asymptotę przy $x \to -\infty$) przez odbicie w osi y-ów. Wykres funkcji f (rys. 44) stanowi górną gałąź hiperboli o równaniu

$$y^2 - x^2 = 1.$$



Rysunek 48. Wykres funkcji $f(x)=\sqrt{1+x^2}$.

11.5. **Zadania.**

Zadanie 11.1. Wyznaczyć pochodną trzeciego rzędu funkcji

1. $f(x)=e^{-\frac{1}{x}}$ dla $x>0$.
2. $f(x)=\operatorname{arc\,tg} x$.
3. $f(x)=\dfrac{1}{x}$ dla $x\neq 0$.
4. $f(x)=\log x$ dla $x>0$.
5. $f(x)=x\log x$ dla $x>0$.
6. $f(x)=\dfrac{\log x}{x}$ dla $x>0$.
7. $f(x)=x^2e^x$.
8. $f(x)=e^x\sin x$.
9. $f(x)=e^{2x}\cos x$.
10. $f(x)=x^\alpha$.
11. $f(x)=x^\alpha\sin\frac{1}{x}$ dla $x>0$.
12. $f(x)=\frac{1}{x}\sin x^2$ dla $x>0$.
13. $f(x)=\operatorname{tg} x-x$.

Zadanie 11.2. Zbadać punkty przegięcia funkcji

1. $f(x)=\cos x$.
2. $f(x)=\ln(1+x)$.
3. $f(x)=\dfrac{x}{1+x}$.
4. $f(x)=x+\sin x$.
5. $f(x)=\sqrt{x^2-1}$.
6. $f(x)=e^{-x^2}$.
7. $f(x)=e^{-\frac{1}{x+1}}$.
8. $f(x)=\dfrac{x^3}{1+x^2}$.
9. $f(x)=x-\frac{2}{x}-3\ln x$.
10. $f(x)=\dfrac{5-3x}{x^2-1}$.
11. $f(x)=e^x-x$.
12. $f(x)=5-x-\frac{4}{x}$.
13. $f(x)=xe^{-x}$.

Zadanie 11.3. Znaleźć równania asymptot funkcji

1. $f(x)=\sqrt{x^2-1}$.
2. $f(x)=e^{-x^2}$.
3. $f(x)=e^{-\frac{1}{x+1}}$.
4. $f(x)=\dfrac{x^3}{1+x^2}$.
5. $f(x)=x-\frac{2}{x}-3\ln x$.
6. $f(x)=\dfrac{5-3x}{x^2-1}$.
7. $f(x)=e^x-x$.
8. $f(x)=5-x-\frac{4}{x}$.
9. $f(x)=xe^{-x}$.

12. Badanie przebiegu zmienności funkcji.

Badanie funkcji celem sporządzenia jej wykresu przeprowadzamy według następującego planu:

(1) określenie dziedziny funkcji;
(2) monotoniczność funkcji, ekstrema;
(3) wypukłość funkcji i punkty przegięcia;
(4) granica funkcji w punktach końcowych przedziałów, w których jest określona;
(5) asymptoty wykresu;

W niektórych przypadkach badamy jeszcze

(6) punkty przecięcia wykresu z osiami oraz
(7) kierunek stycznej do wykresu w pewnych szczególnych punktach np. punktach przecięcia wykresu z osiami, punktach przegięcia, punktach końcowych przedziałów, w których funkcja jest określona.

Wyjaśnimy ten schemat na kilku przykładach.

Przykład 12.1. Niech

$$f(x) = e^{\frac{1}{x}}.$$

Funkcja f jest określona dla $x \neq 0$, zatem dziedzina jej jest sumą dwóch przedziałów $(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$. Policzmy pochodną funkcji:

$$f'(x) = -\frac{1}{x^2} e^{\frac{1}{x}}.$$

Ponieważ

$$f'(x) < 0$$

zatem funkcja jest ściśle malejąca w każdym z tych przedziałów. Różniczkując ponownie otrzymujemy

$$f''(x) = \frac{1}{x^4} \cdot 2x \cdot e^{\frac{1}{x}} + \frac{-1}{x^2} \cdot e^{\frac{1}{x}} \cdot \frac{-1}{x^2} = \frac{1}{x^4} e^{\frac{1}{x}} (2x + 1)$$

skąd

$$f''(x) \begin{cases} < 0 & \text{dla} \quad x < -\frac{1}{2}, \\ = 0 & \text{dla} \quad x = -\frac{1}{2}, \\ > 0 & \text{dla} \quad x > -\frac{1}{2}. \end{cases} \tag{80}$$

Punkt $x = -\frac{1}{2}$ jest jedynym punktem przegięcia. Z (80) wynika, że funkcja f jest wklęsła w przedziale $(-\infty, -\frac{1}{2})$ oraz wypukła w każdym z przedziałów $(-\frac{1}{2}, 0)$ i $(0, +\infty)$. Z definicji funkcji f otrzymujemy

$$\lim_{x \to 0^-} f(x) = \lim_{x \to 0^-} e^{\frac{1}{x}} = 0, \qquad \lim_{x \to 0^+} f(x) = \lim_{x \to 0^+} e^{\frac{1}{x}} = +\infty,$$

zatem prosta $x = 0$ jest asymptotą pionową wykresu.

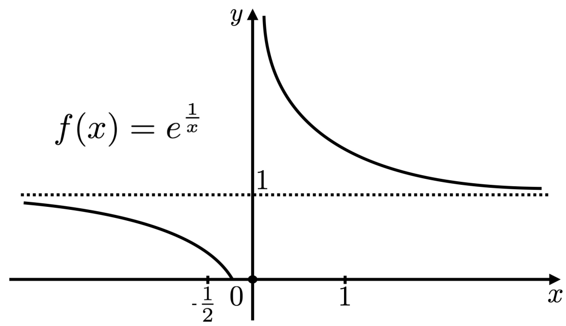
Mamy następnie

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to -\infty} \frac{f(x)}{x} = 0$$

oraz

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to -\infty} f(x) = 1$$

a więc prosta $y = 1$ jest asymptotą wykresu przy $x \to +\infty$ oraz przy $x \to -\infty$. Wykres funkcji f podany jest na rys. 49.



Rysunek 49. Wykres funkcji $f(x) = e^{\frac{1}{x}}$.

Przykład 12.2. Zbadajmy funkcję

$$f(x) = \frac{x^3 - 2x^2 + 3}{2x^2}.$$

Funkcja f jest określona dla $x \neq 0$, jej dziedzina jest zatem sumą dwóch przedziałów $(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$. Wykonując dzielenie możemy funkcję f przedstawić w postaci

$$f(x) = \frac{1}{2}x - 1 + \frac{3}{2x^2} \tag{81}$$

skąd przez różniczkowanie dostajemy

$$f'(x) = \frac{1}{2} - \frac{3}{x^3} = \frac{x^3 - 6}{2x^3}.$$

Warunek konieczny istnienia ekstremum.

$$f'(x) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x^3 - 6 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = \sqrt[3]{6}$$

Jedynym punktem stacjonarnym jest $x = \sqrt[3]{6}$. *Warunek dostateczny istnienia ekstremum.* Ponieważ

$$f'(x) \begin{cases} > 0 & \text{dla} \quad x < 0 \text{ oraz dla } x > \sqrt[3]{6}, \\ < 0 & \text{dla} \quad 0 < x < \sqrt[3]{6} \end{cases} \tag{82}$$

funkcja f jest ściśle rosnąca w każdym z przedziałów $(-\infty, 0)$ i $(\sqrt[3]{6}, \infty)$ i ściśle malejąca w przedziale $(0, \sqrt[3]{6})$. A więc dla $x = \sqrt[3]{6}$ funkcja f osiąga minimum lokalne.

Obliczamy drugą pochodną funkcji f

$$f''(x) = \frac{9}{x^4}.$$

Łatwo widać, że

$$f''(x) > 0$$

dla wszystkich $x \neq 0$.

Oznaczając przez $y^{\min}$ najmniejszą wartość funkcji f w przedziale $(0,\infty)$ (jest to kres dolny funkcji f w tym przedziale) mamy

$$y_{\min} = f(x_0) = \frac{9 - 2\sqrt[3]{36}}{2\sqrt[3]{36}}.$$

Można sprawdzić, że

$$y_{\min} > 0.$$

Istotnie, wyciągając pierwiastek trzeciego stopnia z obu stron nierówności $27 > 16$ dostajemy $3 > 2\sqrt[3]{2}$, skąd

$$9 > 6\sqrt[3]{2},$$

zaś z drugiej strony

$$2\sqrt[3]{36} = 2\sqrt[3]{2^2 \cdot 3^2} < 2\sqrt[3]{2 \cdot 3^3} = 6\sqrt[3]{2}.$$

Zestawienie otrzymanych nierówności daje $y_{\min} > 0$, skąd wynika, że w przedziale $(0,\infty)$ funkcja f przyjmuje wyłącznie wartości dodatnie. Natomiast w przedziale $(-\infty, 0)$ funkcja f przyjmuje wartości różnych znaków, gdyż

$$f(-1) = 0$$

a w przedziale tym funkcja f jest ściśle rosnąca. Z nierówności $f''(x) > 0$ wynika, że funkcja f jest wypukła w każdym z przedziałów $(-\infty, 0)$ i $(0,\infty)$.

Z przedstawienia (81) widać, że

$$\lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{2}x - 1 + \frac{3}{2x^2}\right) = +\infty,$$

zatem oś y-ów jest asymptotą pionową wykresu. Aby znaleźć asymptoty skośne zauważmy, że

$$\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x} = \frac{1}{2} = A$$

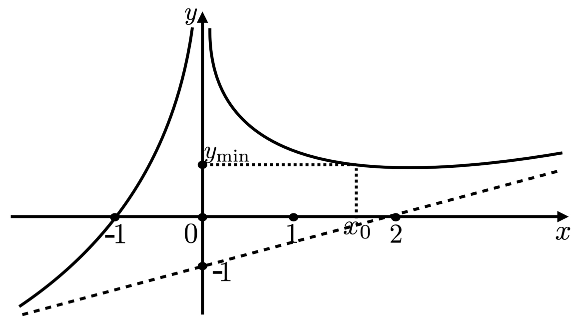
oraz

$$\lim_{x\to\infty} (f(x) - \frac{1}{2}x) = \lim_{x\to-\infty} (f(x) - \frac{1}{2}x) = -1 = B.$$

. Stwierdzamy, że prosta

$$y = \frac{1}{2}x - 1$$

jest asymptotą wykresu przy $x \to \infty$ oraz przy $x \to -\infty$. Wykres funkcji f przedstawiony jest na rysunku 50.



RYSUNEK 50. Wykres funkcji $f(x) = e^{\frac{1}{x}}$.

12.1. **Zadania z rozwiązaniami.**

Zadanie 12.1. Zbadać przebieg zmienności funkcji $y = xe^{-x}$.
ROZWIĄZANIE. Funkcja jest określona dla wszystkich wartości $x \in \mathbb{R}$. Obliczymy pierwszą pochodną

$$y' = 1 \cdot e^{-x} + xe^{-x}(-1) = (1-x)e^{-x}.$$

Warunek konieczny istnienia ekstremum: Pochodna jest równa zeru, gdy $x = 1$. *Warunek dostateczny istnienia ekstremum:* Pochodna jest większa od zera, gdy $x < 1$, natomiast mniejsza od zera gdy $x > 1$, zatem funkcja posiada maksimum lokalne w punkcie $x = 1$ i wówczas $f(1) = e^{-1}$.

Po powtórnym zróżniczkowaniu otrzymujemy

$$y'' = \left[(1-x)e^{-x}\right]' = (-1)e^{-x} + (1-x)e^{-x}(-1) = (-1-1+x)e^{-x} = (x-2)e^{-x}.$$

Warunek konieczny istnienia punktu przegięcia: Druga pochodna jest równa zeru, gdy $x = 2$; *Warunek dostateczny istnienia punktu przegięcia:* W powyższym punkcie następuje zmiana znaku drugiej pochodnej z minusa na plus a więc funkcja posiada punkt przegięcia w $x = 2$ i wtedy $f(2) = 2e^{-2}$.

Następnie obliczamy granice funkcji przy $x \to +\infty$ i przy $x \to -\infty$:

$$\lim_{x\to+\infty} xe^{-x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x}{e^x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{e^x} = 0,$$
$$\lim_{x\to-\infty} xe^{-x} = -\infty.$$

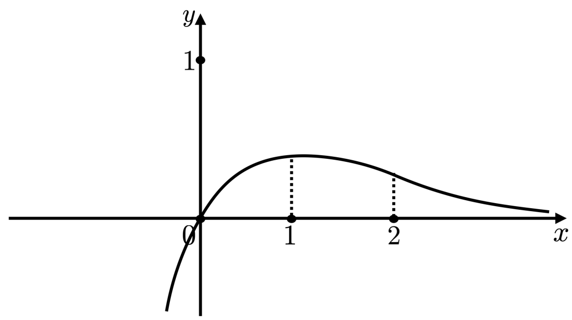
Krzywa ma jednostronną asymptotę poziomą $y = 0$, maksimum w punkcie $x = 1$ i punkt przegięcia, gdy $x = 2$. Układamy tabelkę przebiegu zmienności danej funkcji:

x	$-\infty$	$\dots$	1	$\dots$	2	$\dots$	$+\infty$
y''	$-$	$-$	$-$	$-$	0	$+$	$+$
y'	$+$	$+$	0	$-$	$-$	$-$	$-$
y	$-\infty$	$\nearrow$	e^{-1}	$\searrow$	$2e^{-2}$	$\searrow$	0

Wykres funkcji podaje rysunek 51.

Zadanie 12.2. Zbadać przebieg zmienności funkcji $y = (\ln x)^2 - 2\ln x$.
ROZWIĄZANIE. Funkcja jest określona dla $x > 0$. Obliczmy pochodną

$$y' = 2\ln x \cdot \frac{1}{x} - 2 \cdot \frac{1}{x} = \frac{2}{x}(\ln x - 1).$$



RYSUNEK 51. Wykres funkcji $y = xe^{-x}$.

Warunek konieczny istnienia ekstremum: Pochodna jest równa zeru, gdy $\ln x = 1$, czyli gdy $x = e$. *Warunek dostateczny istnienia ekstremum:* W otoczeniu punktu $x = e$ pochodna zmienia znak zatem w tym puncie istnieje minimum lokalne funkcji f oraz $f(e) = -1$.

Obliczamy drugą pochodną

$$y'' = \left[\frac{2}{x}(\ln x - 1)\right]' = \frac{-2}{x^2}(\ln x - 1) + \frac{2}{x} \cdot \frac{1}{x} = \frac{2}{x^2}(2 - \ln x).$$

Warunek konieczny istnienia punktu przegięcia: Druga pochodna jest równa zeru, gdy $\ln x = 2$, czyli $x = e^2$. *Warunek dostateczny istnienia punktu przegięcia:* W otoczeniu punktu $x = e^2$ druga pochodna zmienia znak zatem w tym punkcie funkcja ma punkt przegięcia oraz $f(e^2) = 0$.

Wiemy, że $\lim\limits_{x\to 0^+} \ln x = -\infty$, $\lim\limits_{x\to +\infty} \ln x = +\infty$. Z tego wynika, że

$$\lim_{x\to 0^+} y = \lim_{x\to 0^+} \big((\ln x)^2 - 2\ln x\big) = +\infty$$

$$\lim_{x\to +\infty} y = \lim_{x\to +\infty} \big((\ln x)^2 - 2\ln x\big) = \lim_{x\to +\infty} (\ln x - 2)\ln x = +\infty,$$

Układamy tabelkę przebiegu zmienności danej funkcji

x	0^+	...	e	...	e^2	...	$+\infty$
y''	$+$	$+$	$+$	$+$	0	$-$	$-$
y'	$-$	$-$	0	$+$	$+$	$+$	$+$
y	$+\infty$	$\searrow$	-1	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

Wykres funkcji podaje rysunek 52.

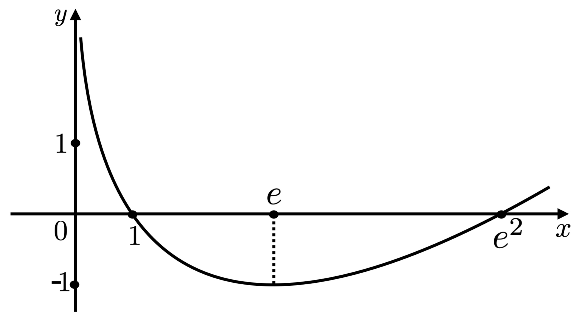
Zadanie 12.3. Zbadać przebieg zmienności funkcji $y = x\ln x$.
ROZWIĄZANIE. Funkcja jest określona dla $x > 0$ Obliczamy pochodną

$$y' = \ln x + x \cdot \frac{1}{x} = \ln x + 1.$$

Warunek konieczny istnienia ekstremum. Pochodna jest równa zeru, gdy $\ln x = -1$, czyli gdy $x = e^{-1}$; wtedy $f(e^{-1}) = -e^{-1}$. *Warunek dostateczny istnienia ekstremum.*

$$y' > 0 \quad \Leftrightarrow \quad \ln x + 1 > 0 \quad \Leftrightarrow \quad \ln x > -1 \quad \Leftrightarrow \quad x > e^{-1}$$

$$y' < 0 \quad \Leftrightarrow \quad \ln x + 1 < 0 \quad \Leftrightarrow \quad \ln x < -1 \quad \Leftrightarrow \quad x < e^{-1}$$



RYSUNEK 52. Wykres funkcji $y = (\ln x)^2 - 2\ln x$.

Krzywa osiąga minimum lokalne w punkcie $x = e^{-1}$. Badamy drugą pochodną

$$y'' = \frac{1}{x}.$$

Jest ona stale dodatnia ponieważ funkcja jest określona tylko dla $x > 0$. Badana krzywa jest więc wszędzie wklęsła i nie ma punktów przegięcia. Badamy granice

$$\lim_{x\to+\infty} x\ln x = +\infty, \qquad \lim_{x\to 0^+} x\ln x = 0$$

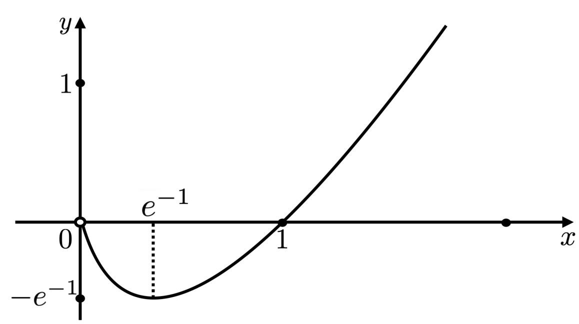
Ponadto

$$\lim_{x\to 0^+} y' = \lim_{x\to 0^+} (\ln x + 1) = -\infty,$$

a więc, przy $x \to 0^+$, wykres funkcji $y = x\ln x$ zbliża się stycznie do osi y zatem prosta $x = 0$ jest asymptotą pionową tej funkcji. Układamy tabelkę przebiegu zmienności danej funkcji:

x	0	$\dots$	e^{-1}	$\dots$	$+\infty$
y''	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$
y'	$-$	$-$	0	$+$	$+$
y	0	$\searrow$	$-e^{-1}$	$\nearrow$	$+\infty$

Wykres funkcji znajduje się na rysunku 53.



RYSUNEK 53. Wykres funkcji $y = x\ln x$.

Zadanie 12.4. Zbadać przebieg zmienności funkcji $y = \dfrac{x}{\ln x}$.

Rozwiązanie. Funkcja jest określona dla $x > 0$ i $x \neq 1$ co można zapisać w postaci sumy przedziałów $(0,1) \cup (1; +\infty)$. Obliczmy pochodną

$$y' = \frac{\ln x - x \cdot \frac{1}{x}}{(\ln x)^2} = \frac{\ln x - 1}{(\ln x)^2} = \frac{1}{\ln x} - \frac{1}{(\ln x)^2} = \frac{1}{\ln x}\left(1 - \frac{1}{\ln x}\right).$$

Warunek konieczny istnienia ekstremum. Pochodna równa się zeru, gdy $\ln x = 1$, czyli gdy $x = e$; wtedy $f(e) = e$. *Warunek dostateczny istnienia ekstremum.*

$$\begin{aligned} y' > 0 \quad &\Leftrightarrow \quad \ln x - 1 > 0 \quad \Leftrightarrow \quad \ln x > 1 \quad \Leftrightarrow \quad x > e \\ y' < 0 \quad &\Leftrightarrow \quad \ln x - 1 < 0 \quad \Leftrightarrow \quad \ln x < 1 \quad \Leftrightarrow \quad x < e \end{aligned}$$

Funkcja ma minimum lokalne w punkcie $x = e$.

Obliczamy drugą pochodną

$$y'' = \frac{-1}{(\ln x)^2} \cdot \frac{1}{x} + \frac{1}{\ln x}\left(\frac{1}{(\ln x)^2} \cdot \frac{1}{x}\right) = \frac{2 - \ln x}{x(\ln x)^3}.$$

Warunek konieczny istnienia punktu przegięcia. Druga pochodna równa się zeru gdy $\ln x = 2$ czyli gdy $x = e^2$. *Warunek dostateczny istnienia punktu przegięcia.*

$$\begin{aligned} y'' > 0 \quad &\Leftrightarrow \quad (2 - \ln x)\ln x > 0 \quad \Leftrightarrow \quad \ln x < 0 \quad \vee \quad \ln x > 2 \quad \Leftrightarrow \quad x < 1 \quad \vee \quad x > e^2 \\ y'' < 0 \quad &\Leftrightarrow \quad (2 - \ln x)\ln x < 0 \quad \Leftrightarrow \quad \ln x > 0 \quad \wedge \quad \ln x < 2 \quad \Leftrightarrow \quad x > 1 \quad \wedge \quad x < e^2 \end{aligned}$$

Krzywa ma punkt przegięcia, gdy $x = e^2$ oraz $f(e^2) = \dfrac{1}{2}e^2$.

Obliczmy granice

$$\lim_{x \to 0^+} y = \lim_{x \to 0^+} \frac{x}{\ln x} = \lim_{x \to 0^+} x \cdot \frac{1}{\ln x} = 0$$

oraz

$$\lim_{x \to 0^+} y' = \lim_{x \to 0^+} \left(\frac{1}{\ln x} - \frac{1}{(\ln x)^2}\right) = 0,$$

a więc krzywa, przy $x \to 0^+$ zbliża się stycznie do osi x. Gdy $x \to 1^+$, to $\ln x \to 0^+$, czyli $y \to +\infty$: gdy zaś $x \to 1^-$, to $\ln x \to 0^-$, czyli $y \to -\infty$, a więc prosta $x = 1$ jest asymptotą pionową krzywej w obu swoich zwrotach:

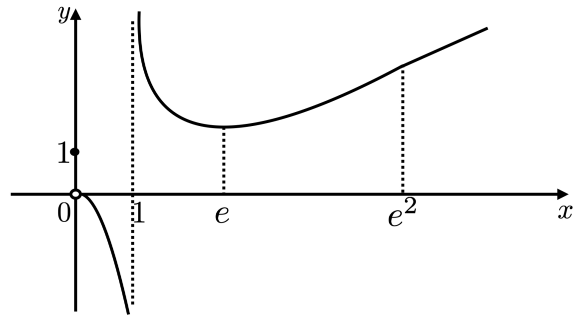
$$\lim_{x \to 1^+} y = \lim_{x \to 1^+} \frac{x}{\ln x} = +\infty,$$

$$\lim_{x \to 1^-} y = \lim_{x \to 1^-} \frac{x}{\ln x} = -\infty,$$

Układamy tabelkę przebiegu zmienności funkcji:

x	0	$\dots$	1^-	1^+	$\dots$	e	$\dots$	e^2	$\dots$	$-\infty$
y''	$-$	$-$	$-$	$+$	$+$	$+$	$+$	0	$-$	$-$
y'	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$	0	$+$	$+$	$+$	$+$
y	0	$\searrow$	$-\infty$	$+\infty$	$\searrow$	e	$\nearrow$	$\frac{1}{2}e^2$	$\nearrow$	$+\infty$

Wykres funkcji podaje rysunek 54.



Rysunek 54. Wykres funkcji $y = \dfrac{x}{\ln x}$.

Zadanie 12.5. Zbadać przebieg zmienności funkcji $y = (x^2 - 3)e^x$.
Rozwiązanie. Funkcja jest określona dla wszystkich $x \in \mathrm{R} = (-\infty; +\infty)$. Obliczmy pochodną

$$y' = (x^2 + 2x - 3)e^x.$$

Warunek konieczny istnienia ekstremum. Pochodna równa się zeru, gdy $x = -3$ i gdy $x = 1$. *Warunek dostateczny istnienia ekstremum.*

$$\begin{aligned} y' > 0 \quad &\Leftrightarrow \quad (x-1)(x+3) > 0 \quad \Leftrightarrow \quad x < -3 \quad \vee \quad x > 1 \\ y' < 0 \quad &\Leftrightarrow \quad (x-1)(x+3) < 0 \quad \Leftrightarrow \quad x \in (-3; 1) \end{aligned}$$

Funkcja ma maksimum lokalne w punkcie $x = -3$ oraz minimum lokalne w punkcie $x = 1$ oraz $f(-3) = 6e^{-3}$, $f(1) = -2e$. Obliczamy drugą pochodną

$$y'' = (x^2 + 4x - 1)e^x.$$

Warunek konieczny istnienia punktów przegięcia. Miejscami zerowymi drugiej pochodnej są liczby $x = -2 - \sqrt{5}$ i $x = -2 + \sqrt{5}$. *Warunek dostateczny istnienia punktów przegięcia.*

$$\begin{aligned} y'' > 0 \quad &\Leftrightarrow \quad (x + 2 + \sqrt{5})(x + 2 - \sqrt{5}) > 0 \quad \Leftrightarrow \quad x < -2 - \sqrt{5} \quad \vee \quad x > -2 + \sqrt{5} \\ y'' < 0 \quad &\Leftrightarrow \quad (x + 2 + \sqrt{5})(x + 2 - \sqrt{5}) < 0 \quad \Leftrightarrow \quad x \in (-2 - \sqrt{5}; -2 + \sqrt{5}) \end{aligned}$$

Funkcja ma punkty przegięcia dla $x = -2 - \sqrt{5}$ i $x = -2 + \sqrt{5}$ i wówczas $f(-2 - \sqrt{5}) = (6 + 4\sqrt{5})e^{-2-\sqrt{5}}$ i $f(-2 + \sqrt{5}) = (6 - 4\sqrt{5})e^{-2+\sqrt{5}}$. Obliczmy granicę

$$\lim_{x \to +\infty} (x^2 - 3)e^x = +\infty.$$

$$\lim_{x \to -\infty} (x^2 - 3)e^x = \lim_{x \to -\infty} \frac{x^2 - 3}{e^{-x}} = \lim_{x \to -\infty} \frac{2x}{-e^{-x}} = \lim_{x \to -\infty} \frac{2}{e^{-x}} = 0$$

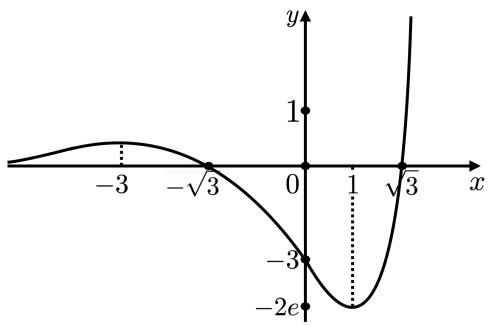
Krzywa ma jednostronną asymptotę poziomą $y = 0$.Wyznaczmy punkty przecięcia się wykresu z osiami układu współrzędnych.

$$\begin{aligned} x = 0 \quad &\Leftrightarrow \quad y = -3, \\ y = 0 \quad &\Leftrightarrow \quad (x^2 - 3)e^x = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = -\sqrt{3} \vee x = \sqrt{3}. \end{aligned}$$

Układamy tabelkę przebiegu zmienności danej funkcji:

x	$-\infty$	$\dots$	$-2-\sqrt{5}$	$\dots$	-3	$\dots$	$-2+\sqrt{5}$	$\dots$	1	$\dots$	$+\infty$
y''	$+$	$+$	0	$-$	$-$	$-$	0	$+$	$+$	$+$	$+$
y'	$+$	$+$	$+$	$+$	0	$-$	$-$	$-$	0	$+$	$+$
y	0	$\nearrow$	$(6+4\sqrt{5})e^{-2-\sqrt{5}}$	$\nearrow$	$6e^{-3}$	$\searrow$	$(6-4\sqrt{5})e^{-2+\sqrt{5}}$	$\searrow$	$-2e$	$\nearrow$	$+\infty$

Wykres funkcji podaje rysunek 55.



Rysunek 55. Wykres funkcji $y=(x^2-3)e^x$.

Zadanie 12.6. Zbadać przebieg zmienności funkcji

$$y = x^3(x-1)(x-2)^2.$$

Rozwiązanie. Obliczamy pochodną, stosując wzór na pochodną iloczynu trzech czynników:

$$(uvw)' = u'vw + uv'w + uvw'.$$

Otrzymujemy więc

$$\begin{aligned} y' &= 3x^2(x-1)(x-2)^2 + x^3(x-2)^2 + 2x^3(x-1)(x-2) \\ &= x^2(x-2)(3(x-1)(x-2) + x(x-2) + 2x(x-1)). \end{aligned}$$

Po redukcji otrzymujemy

$$y' = x^2(x-2)(6x^2-13x+6) \quad \text{czyli} \quad y' = 6x^2(x-2)(x-\frac{2}{3})(x-\frac{3}{2}).$$

Warunek konieczny istnienia ekstremum. Punktami zerowymi pochodnej są: $x=0$ (pierwiastek podwójny), $x=2$, $x=\dfrac{2}{3}$, $x=\dfrac{3}{2}$. *Warunek dostateczny istnienia ekstremum.*

$$\begin{aligned} y' > 0 \quad &\Leftrightarrow \quad (x-2)(x-\frac{2}{3})(x-\frac{3}{2}) > 0 \quad \Leftrightarrow \quad x \in (-\frac{3}{2}; \frac{2}{3}) \cup (2;\infty) \\ y' < 0 \quad &\Leftrightarrow \quad (x-2)(x-\frac{2}{3})(x-\frac{3}{2}) < 0 \quad \Leftrightarrow \quad x \in (-\infty; -\frac{3}{2}) \cup (\frac{2}{3}; 2) \end{aligned}$$

Pochodna zmienia znak w otoczeniu powyższych punktów. Funkcja f posiada zatem minima lokalne w $x=\frac{2}{3}$ i w $x=2$ oraz maksiumum lokalne w $x=\frac{3}{2}$. Obliczamy wartości funkcji $y=f(x)$ w tych punktach i dostajemy:

$$f\left(\frac{2}{3}\right) = -\frac{2^7}{3^6}, \quad f\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{3^3}{2^6}, \quad f(2) = 0.$$

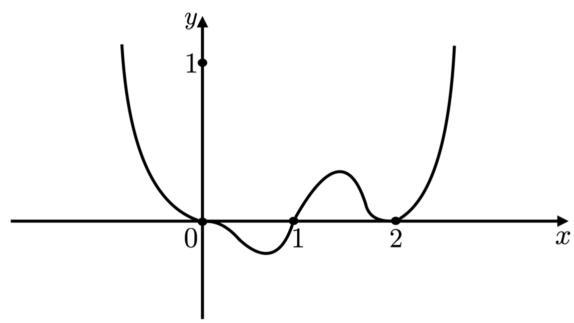
Układamy tabelkę przebiegu zmienności danej funkcji:

x	$-\infty$	$\dots$	0	$\dots$	$\frac{2}{3}$	$\dots$	$\frac{3}{2}$	$\dots$	2	$\dots$	$+\infty$
y'	$-$	$-$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	$+$
y	$+\infty$	$\searrow$	0	$\searrow$	$-\frac{2^7}{3^6}$	$\nearrow$	$\frac{3^3}{2^6}$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

Zauważmy, że

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = +\infty \quad \text{i} \quad \lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty,$$

a to dlatego, że $f(x)$ jest wielomianem stopnia parzystego (szóstego) i współczynnik przy x^6 jest dodatni. Wykres funkcji $y = x^3(x-1)(x-2)^2$ podany jest na rysunku 62.



Rysunek 56. Wykres funkcji $y = x^3(x-1)(x-2)^2$.

Zadanie 12.7. Zbadać przebieg zmienności funkcji

$$y = \frac{2x-3}{x+1}.$$

Rozwiązanie. Jest to tzw. funkcja homograficzna (iloraz dwóch funkcji liniowych). Funkcja jest określona gdy $x+1 \neq 0$, tzn. gdy $x \neq -1$. Obliczamy pochodną

$$y' = \frac{2(x+1)-(2x-3)}{(x+1)^2} = \frac{5}{(x+1)^2}.$$

Dla $x \neq -1$ pochodna $y' = f'(x)$ jest stale dodatnia, a więc funkcja $y = f(x)$ jest stale rosnąca w każdym z przedziałów $(-\infty, -1)$ oraz $(-1, +\infty)$.

Zbadajmy zachowanie się funkcji w otoczeniu punktu $x = -1$. Gdy $x \to -1^-$ (szukamy granicy lewostronnej), to $y \to +\infty$, a gdy $x \to -1^+$ (szukamy granicy prawostronnej), to $y \to -\infty$:

$$\lim_{x\to-1^-} \frac{2x-3}{x+1} = +\infty, \qquad \lim_{x\to-1^+} \frac{2x-3}{x+1} = -\infty,$$

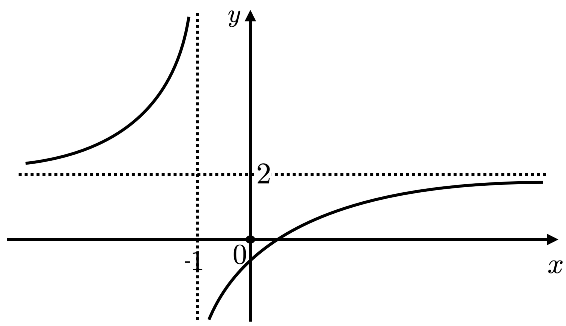
W takim przypadku mówimy , że prosta $x = -1$ jest asymptotą pionową krzywej $y = f(x)$. Zbadajmy granice funkcji, gdy $x \to \pm\infty$:

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{2x-3}{x+1} = 2 \quad \text{i} \quad \lim_{x\to+\infty} \frac{2x-3}{x+1} = 2,$$

a więc prosta $y = 2$ jest dwustronną asymptotą poziomą krzywej. Układamy tabelkę przebiegu zmienności danej funkcji:

x	$-\infty$	$\dots$	-1^-	-1^+	$\dots$	$+\infty$
y'	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$
y	2	$\nearrow$	$+\infty$	$-\infty$	$\nearrow$	2

Wykres funkcji przedstawia rysunek 57.



RYSUNEK 57. Wykres funkcji $y = \dfrac{2x-3}{x+1}$.

Zadanie 12.8. Zbadać przebieg zmienności funkcji

$$y = \frac{1}{1+x^2}.$$

ROZWIĄZANIE. Funkcja jest określona dla wszystkich wartości x. Obliczmy pochodną

$$y' = \frac{-2x}{(1+x^2)^2}.$$

Warunek konieczny istnienia ekstremum. Pochodna przyjmuje wartość zerową, gdy $x = 0$. *Warunek dostateczny istnienia ekstremum.* Pochodna, dla $x < 0$ jest dodatnia, a dla $x > 0$ jest ujemna. Zatem w punkcie $x = 0$ funkcja osiąga maksimum lokalne oraz $f(0) = 1$. Obliczamy drugą pochodną

$$y'' = -2\frac{(1+x^2)^2 - x \cdot 2(1+x^2)\cdot 2x}{(1+x^2)^4} = \frac{2(3x^2-1)}{(1+x^2)^3}.$$

Warunek konieczny istnienia punktów przegięcia. Druga pochodna osiąga wartość zero dla $x = -\dfrac{1}{\sqrt{3}}$ oraz dla $x = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$. *Warunek dostateczny istnienia punktów przegięcia.* Mianownik jest dodatni, a więc znak y'' jest zgodny ze znakiem $3x^2 - 1$. Gdy $-\dfrac{1}{\sqrt{3}} < x < \dfrac{1}{\sqrt{3}}$, druga pochodna $f''(x)$ jest ujemna, więc krzywa $y = f(x)$ jest wklęsła, a dla $x < -\dfrac{1}{\sqrt{3}}$ albo $x > \dfrac{1}{\sqrt{3}}$ jest $f''(x) > 0$, więc krzywa $y = f(x)$ jest wypukła. Zatem funkcja posiada dwa punkty przegięcia w $x = -\dfrac{1}{\sqrt{3}}$ i $x = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$.

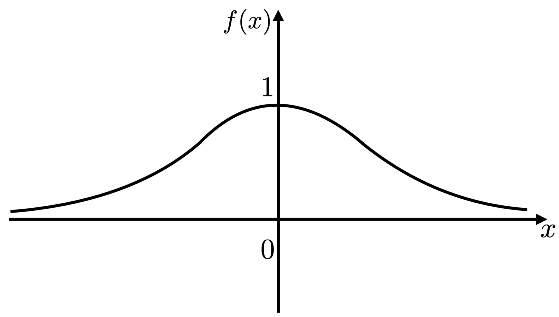
Zauwaămy dalej, że

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{1}{1+x^2} = 0 \quad \text{i} \quad \lim_{x\to+\infty}\frac{1}{1+x^2} = 0,$$

co dowodzi ,że oś x jest dwustronną asymptotą poziomą krzywej. Układamy tabelkę przebiegu zmienności danej funkcji:

x	$-\infty$	$\dots$	$-\frac{1}{\sqrt{3}}$	$\dots$	0	$\dots$	$-\frac{1}{\sqrt{3}}$	$\dots$	$+\infty$
y''	$+$	$+$	0	$-$	$-$	$-$	0	$+$	$+$
y'	$+$	$+$	$+$	$+$	0	$-$	$-$	$-$	$-$
y	0	$\nearrow$	$\frac{3}{4}$	$\nearrow$	1	$\searrow$	$\frac{3}{4}$	$\searrow$	0

Wykres funkcji podany jest na rysunku 58.



RYSUNEK 58. Wykres funkcji $y = \dfrac{2x-3}{x+1}$.

Zadanie 12.9. Zbadać przebieg zmienności funkcji

$$y = \frac{x^2}{x^2-4}.$$

ROZWIĄZANIE. Funkcja jest określona, gdy $x^2-4 \neq 0$, tzn.gdy $x \neq -2$ i $x \neq 2$. Obliczając pochodną otrzymujemy

$$y' = \frac{-8x}{(x^2-4)^2}.$$

Warunek konieczny i dostateczny istnienia ekstremum. Podobnie jak w poprzednim zadaniu: dla $x < 0$ mamy $y' > 0$ i funkcja f(x) jest rosnącą, dla $x = 0$ mamy $y' = 0$ i funkcja $f(x)$ osiąga maksimum lokalne, dla $x > 0$ mamy $y' < 0$ i funkcja $f(x)$ jest malejąca. Obliczmy drugą pochodną funkcji $y = f(x)$.

$$y'' = \frac{-8(x^2-4)^2 + 8x \cdot 2(x^2-4) \cdot 2x}{(x^2-4)^4} = \frac{8(x^2-4)[-(x^2-4)+4x^2]}{(x^2-4)^4} = \frac{8(x^2-4)(3x^2+4)}{(x^2-4)^4}$$

Warunek konieczny i dostateczny istnienia punktów przegięcia. Łatwo widać, że punkty przegięcia znajdują się w punktach nie należących do dziedziny funkcji. Druga pochodna jest dodatnia dla $x < -2$ i $x > 2$, funkcje jest zatem wypukła w tych przedziałach, oraz ujemna w przedziale $-2 < x < 2$ i funkcja jest wklęsła w tym przedziale. Zbadajmy zachowanie się funkcji $f(x)$ w otoczeniu punktów $x = -2$ i $x = 2$.

$$\lim_{x\to -2^-} \frac{x^2}{x^2-4} = \lim_{x\to -2^-} \frac{x^2}{(x-2)(x+2)} = +\infty,$$

a więc prosta $x = -2$ jest asymptotą pionową krzywej $y = f(x)$.

$$\lim_{x\to -2^+} \frac{x^2}{x^2-4} = \lim_{x\to -2^+} \frac{x^2}{(x-2)(x+2)} = -\infty,$$

a więc prosta $x = 2$ jest też asymptotą pionową krzywej $y = f(x)$.

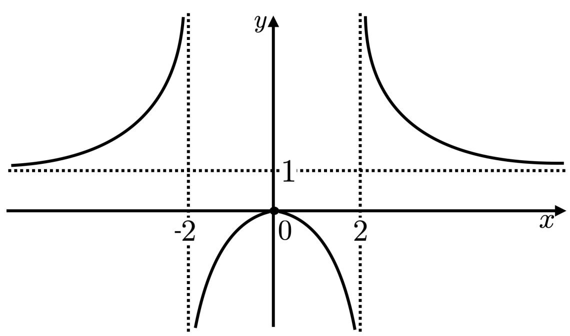
Następnie badamy zachowanie się funkcji $f(x)$ w nieskończoności:

$$\lim_{x\to -\infty} \frac{x^2}{x^2-4} = 1 \quad \text{i} \quad \lim_{x\to +\infty} \frac{x^2}{x^2-4} = 1,$$

co dowodzi, że prosta $y = 1$ jest dwustronną asymptotą poziomą krzywej. Układamy tabelkę przebiegu zmienności danej funkcji:

x	$-\infty$	$\dots$	-2^-	-2^+	$\dots$	0	$\dots$	2^-	2^+	$\dots$	$+\infty$
y''	$+$	$+$	$+$	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$	$+$	$+$	$+$
y'	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$	0	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$
y	1	$\nearrow$	$+\infty$	$-\infty$	$\nearrow$	0	$\searrow$	$-\infty$	$+\infty$	$\searrow$	1

Wykres funkcji przedstawia rysunek 59.



Rysunek 59. Wykres funkcji $y = \dfrac{x^2}{x^2-4}$.

Zadanie 12.10. Zbadać przebieg zmienności funkcji

$$y = \frac{x^2-3}{x-2}.$$

Rozwiązanie. Funkcja jest określona dla $x \neq 2$. Obliczmy pochodną

$$y' = \frac{2x(x-2)-(x^2-3)}{(x-2)^2} = \frac{x^2-4x+3}{(x-2)^2} = \frac{(x-1)(x-3)}{(x-2)^2}.$$

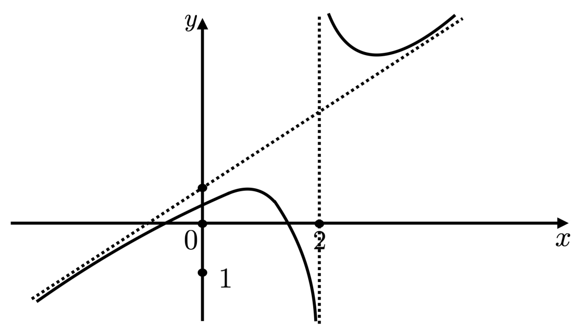
Warunek konieczny istnienia ekstremum. Pochodna jest równa zeru przy $x = 1$ oraz $x = 3$ i wówczas badana funkcja $f(x)$ przybiera wartości $f(1) = 2$, $f(3) = 6$. *Warunek dostateczny istnienia ekstremum.*

$$y' > 0 \quad \Leftrightarrow \quad x < 1 \quad \wedge \quad x > 3$$
$$y' < 0 \quad \Leftrightarrow \quad 1 < x < 3$$

Zatem funkcja ma maksimum lokalne w puncie $x = 1$ oraz minimum lokalne w punkcie $x = 3$. Układamy tabelkę zmienności danej funkcji:

x	$-\infty$	$\dots$	1	$\dots$	2^-	2^+	$\dots$	3	$\dots$	$+\infty$
y''	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$
y'	$+$	$+$	0	$-$	$-$	$-$	$-$	0	$+$	$+$
y	$-\infty$	$\nearrow$	2	$\searrow$	$-\infty$	$+\infty$	$\searrow$	6	$\nearrow$	$+\infty$

Wykres funkcji przedstawia rysunek 60.



RYSUNEK 60. Wykres funkcji $y = \dfrac{x^2 - 3}{x - 2}$.

12.2. **Zadania do samodzielnego rozwiązania.**

Zadanie 12.11. Zbadać przebieg zmienności funkcji

1. $y = e^{1/(1-x^2)}$.
2. $y = xe^{1/x}$.
3. $y = \dfrac{2x^2 - 5x + 2}{3x^2 - 10x + 3}$.
4. $y = x - \dfrac{4}{x^2}$.
5. $y = \dfrac{x^3}{x^2 - x - 2}$.
6. $y = \sqrt{\dfrac{1 - x}{1 + x}}$.
7. $y = x + \cos x$.
8. $f(x) = \ln \sin x$.

Zadania na Gwiazdkę

Zadanie 1. Obliczyć

1. $\lim_{n\to\infty}(3n^2-n+2)$.
2. $\lim_{n\to\infty}(-4n^3+n^2+n-1)$.
3. $\lim_{n\to\infty}\frac{3n-1}{2-n}$.
4. $\lim_{n\to\infty}\frac{-2n^4+2n+7}{3n^4+2n^3-4}$.
5. $\lim_{k\to\infty}\frac{2k+1}{3k-2}$.
6. $\lim_{n\to\infty}\frac{3n^2-n+1}{4n^4-n-1}$.
7. $\lim_{l\to\infty}\frac{3l^2-11}{7-2l}$.
8. $\lim_{n\to\infty}\frac{-3n^7+n^2+7}{2n^4+2n^3-1}$.
9. $\lim_{n\to\infty}\frac{-4+2n^2+7n}{n^3+Bn^2+1}$.
10. $\lim_{k\to\infty}(2k\sqrt[3]{k}-3k\sqrt{k}+1)$.
11. $\lim_{n\to\infty}\frac{3n\sqrt[3]{n^2}-1+n\sqrt{n}}{\sqrt{n}+2-\sqrt[3]{n^5}}$.
12. $\lim_{n\to\infty}(\sqrt{n+1}-\sqrt{2n+1})$.
13. $\lim_{k\to\infty}(3k-\sqrt{k^2-k+2})$.
14. $\lim_{n\to\infty}(n-\sqrt{n^2+2})$.
15. $\lim_{n\to\infty}(\sqrt{9n^2+5+2}-3n)$.
16. $\lim_{l\to\infty}(\sqrt{l+\sqrt{l}}-\sqrt{l-\sqrt{l}})$.
17. $\lim_{n\to\infty}(n+\sqrt{n^2+2})$.
18. $\lim_{m\to\infty}(m-2-\sqrt{m^2+6+9})$.
19. $\lim_{m\to\infty}(3^{2m-1}-(\frac{1}{2})^{1-4m}+(\sqrt{5})^{2m-2}-3)$.
20. $\lim_{n\to\infty}\frac{3\cdot 2^{2n+1}-5\cdot 3^{2n-1}+1}{2^{3n}+(\frac{1}{9})^{-n}+2}$.
21. $\lim_{k\to\infty}(\frac{2^{1-k}-7\cdot 3^{2k+1}+2}{(\sqrt{2})^{2k-1}+(\frac{1}{3})^{-k}+6})$.
22. $\lim_{n\to\infty}\frac{1+2^n+3^{n-1}}{3+2^{2n+1}}$.

Zadanie 2. Obliczyć

1. $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{2n+7}$.
2. $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{3n^3-n^2+2}$.
3. $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{5^{n+1}+3^{n-1}+2}$.
4. $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{3\cdot 3^{2n+1}+2^{n+1}-1}$.
5. $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{3n-2}{2^{n+1}+3}}$.
6. $\lim_{m\to\infty}\sqrt[m]{2+3^{-m}+2^{1-2m}}$.
7. $\lim_{m\to\infty}\sqrt[m]{3^{-m}+2^{1-2m}}$.
8. $\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{3}{n}\right)^{2n}$.
9. $\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{2}{5n}\right)^{-3n}$.
10. $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{2n-1}{2n+3}\right)^{n}$.
11. $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{4n-1}{4n+3}\right)^{n}$.
12. $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{2n+3}{2n-7}\right)^{n-1}$.
13. $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n+3}{n+1}\right)^{n^2}$.
14. $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{5n^2-3}{5n^2+1}\right)^{-n^2}$.

15. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{3n-1}{4n+3}\right)^{2n}$.

16. $\lim\limits_{m\to\infty}\left[m\ln\left(1+\dfrac{2}{m}\right)\right]$.

Zadanie 3. Wykazać, że nie istnieje granica ciągu (a_n) $n \in N$, gdy

1. $a_n = \left(\dfrac{1-n}{n}\right)^n, \quad n \in \mathbb{N}.$
2. $a_n = \sin\left(\dfrac{n\pi}{3}\right), \quad n \in \mathbb{N}.$
3. $a_n = e^{(-1)^n n}, \quad n \in \mathbb{N}.$
4. $a_n = \sqrt[n]{5^n + (-5)^n + 0.1}, \quad n \in \mathbb{N}.$
5. $a_n = (2-(-1)^{n+1})^n, \quad n \in \mathbb{N}.$
6. $a_n = \dfrac{2+(-1)^n n}{3n+1}, \quad n \in \mathbb{N}.$

Zadanie 4. Zbadać monotoniczność ciągu $(a_n)n \in N$, gdy

1. $a_n = n^2 - n, \quad n \in N$
2. $a_n = \dfrac{3n}{n^2+1}, \quad n \in \mathbb{N}.$
3. $a_n = \dfrac{5n-1}{3n+2}, \quad n \in \mathbb{N}.$
4. $a_n = \dfrac{n}{4^{n+1}}, \quad n \in \mathbb{N}.$
5. $a_n = 2^{\sqrt{n+1}}, \quad n \in \mathbb{N}.$
6. $a_n = \dfrac{3^{n+2}}{(n+1)!}, \quad n \in \mathbb{N}.$
7. $a_n = 3 + \cos n\pi, \quad n \in \mathbb{N}.$

Zadanie 5. Obliczyć

1. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2-1}{2x^2-x-1}.$
2. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-1}{2x^2-x-1}.$
3. $\lim\limits_{x\to \frac{1}{2}}\dfrac{2x-1}{2x^2+x-1}.$
4. $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^2-5x+6}{x^2-8x+15}.$
5. $\lim\limits_{x\to -\frac{1}{2}}\dfrac{4x^2-1}{2x^2-x-1}.$
6. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{x+1}-1}{x}.$
7. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x-\sqrt{x}}{x+\sqrt{x}}.$
8. $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x-2}{\sqrt{x-1}-1}.$
9. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{x^2+4}-2}{\sqrt{x^2+9}-3}.$
10. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x-2x^3}{\sqrt{x+1}-1}.$
11. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{3x-x^2}{\sqrt{x+25}-5}.$
12. $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\sqrt{x+7}-3}{x^2-x-2}.$
13. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 3x}{5x}.$
14. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{2}-\sqrt{1+\cos x}}{\sin^2 x}.$
15. $\lim\limits_{x\to 0} x \operatorname{ctg} x.$
16. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{tg}^2 3x}{\sin x}.$
17. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{tg} 2x}{\operatorname{tg} x}.$

Zadanie 6. Obliczyć

1. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2-1}{2x^2-x-1}.$
2. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^2+x-5}{x^2-3x+1}.$
3. $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{x^2+2x-1}{x^3-1}.$
4. $\lim\limits_{x\to-\infty}(x^3-x^2-x+2).$
5. $\lim\limits_{x\to-\infty}(x^2+3x).$
6. $\lim\limits_{x\to-\infty}(2x^4-5x+3-\frac{1}{x}).$
7. $\lim\limits_{x\to\infty}(\sqrt{x^2+1}-\sqrt{x^2-1}).$
8. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^2-4x+1}{\sqrt{x^4+x^2}}.$
9. $\lim\limits_{x\to-\infty}(x-\sqrt{x^2-3x+5}).$
10. $\lim\limits_{x\to\infty}(x-\sqrt{x^2-3x+5}).$
11. $\lim\limits_{x\to-\infty}(2x+\sqrt{x^2-x}).$
12. $\lim\limits_{x\to\infty}(2x-\sqrt{4x^2+3}).$
13. $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{3}{(2x-\sqrt{4x^2-x})}.$
14. $\lim\limits_{x\to-\infty}(3x+1+\sqrt{9x^2-2}).$
15. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(2+\dfrac{3}{x}\right)^x.$

16. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{3+x}{x}\right)^{x+1}$.

Zadanie 7. Obliczyć

1. $\lim\limits_{x\to -1^+}\dfrac{x^2-2x}{|x|-1}$.
2. $\lim\limits_{x\to 4^-}\dfrac{\sin x}{x^2-4x}$.
3. $\lim\limits_{x\to 2^+}\dfrac{5-x}{2x-x^2}$.
4. $\lim\limits_{x\to -\frac{1}{2}^+}\dfrac{x^2-1}{2x^2-x-1}$.
5. $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{3}{x}\arcsin(x-1)$.
6. $\lim\limits_{x\to 2^-} x\operatorname{arc\,ctg}\left(\dfrac{x+1}{2-x}\right)$.
7. $\lim\limits_{x\to 3^+}\left(x+\operatorname{arc\,ctg}\left(\dfrac{2}{x^2-3x}\right)\right)$.
8. $\lim\limits_{x\to 1^-}\left(x-2\operatorname{arc\,ctg}\left(\dfrac{3}{(1-x)^2}\right)\right)$.
9. $\lim\limits_{x\to 1^-}\dfrac{3x+1}{x^2+3x-4}$.
10. $\lim\limits_{t\to 2^+} 3^{\frac{1}{t-2}}$.
11. $\lim\limits_{x\to 1^-} e^{\frac{1}{1-x^2}}$.

Zadanie 8. Wyznaczyć wszystkie asymptoty funkcji

1. $f(x)=\dfrac{2x-3}{x+1}$.
2. $f(x)=\dfrac{2x^3}{x^2-1}$.
3. $f(x)=\dfrac{2x^2-3x+1}{x+5}$.
4. $f(x)=\dfrac{x+1}{2x^2+3x+1}$.
5. $f(x)=\dfrac{1}{3+2x-5x^2}$.
6. $f(x)=\dfrac{x^2-x}{x^3-x}$.
7. $f(t)=3-2t+\dfrac{1}{t^2+1}$.
8. $f(t)=5t+1+\dfrac{1}{\ln(t^2+2)}$.
9. $f(t)=-4+\dfrac{1}{\ln(t^2+1)}$.
10. $f(t)=4t-e^{-t^2}$.
11. $f(x)=3x+2+e^{\frac{1}{x}}$.
12. $f(x)=\dfrac{x^2-x}{x+1}+\dfrac{1}{e^x-1}$.
13. $f(x)=x+\sqrt{x^2+3x}$.
14. $f(x)=e^{\frac{-x^2}{x^2-1}}$.

Zadanie 9. Obliczyć pochodne funkcji

1. $f(x)=-\dfrac{1}{2}\sqrt[3]{x}+\dfrac{7}{x^4}-\dfrac{2}{\sqrt[5]{x}}+\ln 4$.
2. $f(x)=(\sqrt[3]{x}+2x)(1+\sqrt[3]{x^2}+3x)$.
3. $f(x)=(\sqrt{x}+\dfrac{3}{x}-7\sin x)\arccos x$.
4. $h(x)=(7\sqrt{x}-\dfrac{4}{x})(2\ln x+5e^{3x})+x^2\sin x$.

5. $f(t) = \dfrac{2^x - 3^{5-x}}{x + 3\log_7(x^3+1)}$.
6. $g(t) = \dfrac{3\operatorname{tg} t - \sqrt{t}}{2t + \arccos t} + \cos(\dfrac{\pi}{7})$.
7. $h(t) = \sin(2t) + \sin(\frac{t}{\sqrt{3}}) + \sin(\frac{1}{t}) - 3\sin(\operatorname{arc\,tg} t)$.
8. $f(r) = (1 + \sqrt{\dfrac{r}{4-r^2}}) \cdot e^{-x^3}$.
9. $f(x) = \dfrac{e^{-7x} + \operatorname{arc\,tg} 2x}{\ln(\sin 3x - x^4)}$.
10. $f(x) = \operatorname{arc\,tg}(\arcsin(\operatorname{tg}^2 x)) + \dfrac{1}{\ln x}$.
11. $f(u) = \cos^3 u + e^{2u-5u^2-3}$.
12. $f(t) = \sqrt{t^2+1} + \sqrt{\operatorname{arc\,tg} t} + \sqrt{1 + e^{-\cos t}}$.
13. $h(t) = t\arcsin(2t) + 2\arccos(\frac{\sqrt{t}}{5})$.
14. $f(x) = \sin^2 x - 2\cos^3(3x) + \operatorname{tg}^4(\sqrt{x}) - \operatorname{ctg}^5(\frac{2}{x})$.
15. $f(x) = (\sin x)^{\arcsin 2x}$.
16. $g(x) = 3\ln^2 x - 2\operatorname{arc\,tg}^3(2x) + \ln^3(\frac{1}{x} + 3x^5) - 3x + 2$.
17. $f(x) = (\ln x^2)^{-\cos x}$.
18. $f(x) = (\operatorname{arc\,tg} 3x)^{\sqrt{x}}$.
19. $h(x) = \frac{2x-3}{1-x} + (\frac{2x-3}{1-x})^{23} + \ln(\frac{2x-3}{1-x}) + \sqrt{\frac{2x-3}{1-x}}$.
20. $f(t) = \dfrac{t8^{-t^2}}{3\sin(2t-1) + 2\cos^4(\frac{1}{\sqrt{t}})}$.

Zadanie 10. Korzystając z Twierdzenia de l'Hospitala, obliczyć

1. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^x - e^{-x}}{x + \sin x}$
2. $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^2 - 1}{\ln x}$
3. $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{1 + \ln x}{2 - \ln x}$
4. $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\ln x}{(1-x)^3}$
5. $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{\ln x}{\operatorname{ctg} x}$
6. $\lim\limits_{x\to 0^-} \dfrac{\operatorname{arc\,tg} x}{x^2 - x}$
7. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln(\cos x)}{\ln(\cos 3x)}$
8. $\lim\limits_{x\to +\infty} (x+3) \cdot e^{-2x}$
9. $\lim\limits_{x\to 0^+} \sqrt{x}\ln x$
10. $\lim\limits_{x\to o^-} x^2 \cdot e^{-\dfrac{1}{x}}$
11. $\lim\limits_{x\to -\infty} x \cdot (\operatorname{arc\,ctg} x - \pi)$
12. $\lim\limits_{x\to +\infty} (x^2 - e^{3x})$
13. $\lim\limits_{x\to 1^+} \left(\dfrac{1}{(x-1)^2} - \dfrac{3}{\ln x} \right)$
14. $\lim\limits_{x\to 1^+} \ln x \cdot \ln(x-1)$
15. $\lim\limits_{x\to 0^-} \left(\dfrac{1}{x} - \operatorname{ctg} x \right)$

16. $\lim_{x\to 0^+}\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{\sin x}\right)$
17. $\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{2}{\pi}\operatorname{arc\,tg} x\right)^x$
18. $\lim_{x\to 0^+}\left(\frac{1}{x}\right)^{\sin x}$
19. $\lim_{x\to 0^+}(\operatorname{tg} x)^{e^x-1}$
20. $\lim_{x\to\frac{\pi}{4}^-}(\operatorname{ctg} x)^{\frac{3}{x-\frac{\pi}{4}}}$

Zadanie 11. Wyznaczyć dziedzinę, przedziały monotoniczności i ekstrema lokalne funkcji

1. $f(x)=x^3-2x^2+5.$
2. $f(x)=\dfrac{x^2+1}{x}.$
3. $f(x)=\dfrac{x^3}{(x+2)^2}.$
4. $f(x)=\dfrac{x^2}{x+1}.$
5. $f(x)=x\cdot e^{-3x}.$
6. $f(x)=x^2\cdot e^{-\frac{1}{x}}.$
7. $f(x)=\dfrac{e^{3x}}{x}.$
8. $f(x)=\dfrac{e^{-x}}{x^2}.$
9. $f(x)=(3-x)\cdot e^{\frac{1}{x}}.$
10. $f(x)=x\cdot\ln^2 x.$
11. $f(x)=\dfrac{x-\ln x}{\ln x}.$
12. $f(x)=\dfrac{\ln^2 x}{1-\ln x}.$
13. $f(x)=\dfrac{1}{x\ln x}.$
14. $f(x)=\ln^2 x-3\ln x.$
15. $f(x)=\dfrac{x^2}{\ln x}.$
16. $f(x)=\dfrac{1}{x^2}+2\ln x.$
17. $f(x)=x+2\operatorname{arc\,tg}\dfrac{1}{x}.$
18. $f(x)=x+2\operatorname{arc\,ctg} x.$
19. $f(x)=2\sqrt{4x-x^2}-\arcsin\left(\dfrac{x-2}{2}\right).$

Zadanie 12. Wyznaczyć najmniejszą i największą wartość funkcji f na przedziale I, gdy

1. $f(x)=\dfrac{x}{x^2+3},\quad I=[-2,1].$
2. $f(x)=x\cdot e^{-2x},\quad I=[-1,3].$
3. $f(x)=(x+2)\cdot e^{\frac{1}{x}},\quad I=[-2,-1].$
4. $f(x)=x\cdot\ln^2 x,\quad I=[e^{-2},e].$
5. $f(x)=\ln^3 x-3\ln x,\quad I=[1,e^2].$
6. $f(x)=x-\operatorname{arc\,tg} x,\quad I=[-1,1].$
7. $f(x)=x-2\sqrt{x},\quad I=[0,5].$
8. $f(x)=\sin^2 x+\cos x,\quad I=[0,2\pi].$
9. $f(x)=\operatorname{arc\,tg}\left(\dfrac{2-x}{2+x}\right),\quad I=[0,2].$

Zadanie 13. Wyznaczyć dziedzinę, przedziały wypukłości, przedziały wklęsłości i punkty przegięcia wykresu funkcji

1. $f(x)=\dfrac{x^2}{x-1}.$
2. $f(x)=e^{-x^2}.$
3. $f(x)=\dfrac{e^x}{x+2}.$
4. $f(x)=x^2\cdot e^{-\frac{1}{x}}.$

5. $f(x) = (2 - \ln x) \cdot \ln x$.
6. $f(x) = \ln x - \dfrac{1}{x}$.
7. $f(x) = x \cdot \ln^2 x$.
8. $f(x) = \operatorname{arc\,tg} x - \dfrac{\pi}{2}$.
9. $f(x) = 3x - x \cdot \ln(x-1) + 5$.
10. $f(x) = 2x \cdot \operatorname{arc\,tg} x$.

Zadanie 14. Narysować wykres funkcji $f : D \to R$ takiej, że

(A) $D = \mathbb{R} \setminus \{2\}$, $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = 1$, $x = 1$ – minimum lokalne właściwe i $f''(x) > 0$ dla $x \in (-\infty, 0)$.
(B) $D = \mathbb{R}$, $\lim\limits_{x\to0^+} f(x) = +\infty$, $(2, 1)$ – punkt przegięcia i $f'(x) < 0$ dla $x \in (1, 3)$.
(C) $D = \mathbb{R}$, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = -2$, $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = 3$, $x = 1$ – ekstremum lokalne właściwe i $f''(x) > 0$ dla $x \in (-\infty, 0)$.
(D) $D = \mathbb{R} \setminus \{1\}$, $\lim\limits_{x\to1} f(x) = +\infty$, $\lim\limits_{x\to+\infty}(f(x) - x + 4) = 0$, $(-1, 2)$ – punkty przegięcia i $f'(x) < 0$ dla $x \in (-3, 0)$.

Zadanie 15. Narysować wykres funkcji $f : D \to \mathbb{R}$ takiej, że

(A) • $D = \mathbb{R}\setminus\{-1\}$, $\lim\limits_{x\to-\infty}(f(x)-x+1) = 0$, $\lim\limits_{x\to-1^-} f(x) = -\infty$, $\lim\limits_{x\to-1^+} f(x) = +\infty$, $\lim\limits_{x\to+\infty}(f(x)-x+1) = 0$, • $f'(x) > 0$ dla $x \in (-\infty, -2) \cup (0, +\infty)$ i $f'(x) < 0$ dla $x \in (-2, -1) \cup (-1, 0)$ oraz • $f''(x) > 0$ dla $x \in (-1, +\prime)$ i $f''(x) < 0$ dla $x \in (-\infty, -1)$, kropka $f(-2) = 4$, $f(0) = 0$.
(B) • $D = \mathbb{R} \setminus \{0\}$, $\lim\limits_{x\to-\infty}(f(x) + x - 1) = 0$, $\lim\limits_{x\to0^-} f(x) = 0$, $\lim\limits_{x\to0^+} f(x) = -\infty$, • $f'(x) > 0$ dla $x \in (0, 1)$ i $f' < 0$ dla $x \in (-\infty, 0) \cup (1, +\infty)$ oraz • $f''(x) > 0$ dla $x \in D$ i • $f(1) = -2$.
(C) • $D = \mathbb{R}\setminus\{0\}$, $\lim\limits_{x\to+\infty}(f(x)-x+2) = 0$, $\lim\limits_{x\to0} f(x) = +\infty$, • $f'(x) > 0$ dla $x \in (-\infty, 0)\cup(2, +\infty)$ i $f'(x) < 0$ dla $x \in (0, 2)$ oraz • $f''(x) > 0$ dla $x \in (-1, 0) \cup (0, +\infty)$ i $f''(x) < 0$ dla $x \in (-\infty, -1)$.
(D) • $D = \mathbb{R}\setminus\{1\}$, $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = 0$, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = -1$, $\lim\limits_{x\to1^-} f(x) = -\infty$, $\lim\limits_{x\to1^+} f(x) = 2$ • $f''(x) > 0$ dla $x \in (-1, 0) \cup (1, +\infty)$ i $f''(x) < 0$ dla $x \in (-1, 1)$.

Zadanie 16. Zbadać przebieg zmienności funkcji f i narysować jej wykres

1. $f(x) = \dfrac{x^2}{x-1}$.
2. $f(x) = \dfrac{\ln x}{x}$.
3. $f(x) = \dfrac{x}{\ln x}$.
4. $f(x) = \dfrac{x}{1 - \ln x}$.
5. $f(x) = \dfrac{\ln x}{1 - \ln x}$.
6. $f(x) = x \cdot e^{-\frac{1}{x}}$.
7. $f(x) = x^2 \cdot e^{-3x}$.
8. $f(x) = x^2 \cdot \ln x$.
9. $f(x) = \dfrac{1}{x} + 2 \operatorname{arc\,tg} x$.
10. $f(x) = \dfrac{2}{x} \cdot e^{-x}$.
11. $f(x) = x - 5 \operatorname{arc\,tg} x$.
12. $f(x) = \dfrac{\ln x}{x^2}$.

Zadanie 17. Obliczyć

1. $\displaystyle\int (\sqrt{3x} + 2e^{-x} - \sqrt[3]{5x+2})dx$.
2. $\displaystyle\int (\sin x - \frac{3}{x} + \frac{2}{\sqrt{x}} - 7x)dx$.
3. $\displaystyle\int \ln^2 x dx$.
4. $\displaystyle\int \sqrt{2x} \cdot \ln x dx$.
5. $\displaystyle\int \operatorname{arc\,ctg} 2x dx$.
6. $\displaystyle\int x \cdot \operatorname{arc\,tg} x dx$.

7. $\int x^2 \cdot \sqrt[4]{5-2x^3}dx.$

8. $\int \arcsin 3x dx.$

9. $\int x^2 \cdot \cos x dx.$

10. $\int \operatorname{ctg} 3x dx.$

11. $\int \sin^3 x \cdot \cos^2 x dx.$

12. $\int \sqrt{\frac{\arcsin x}{1-x^2}}dx.$

13. $\int x^2 \cdot e^{-3x}dx.$

14. $\int \sqrt[3]{x} \cdot \ln x dx.$

15. $\int \frac{1}{x} \cdot \sqrt{4-3\ln x}dx.$

16. $\int \frac{x}{(3-x)^5}dx.$

17. $\int \frac{e^x}{\sqrt{4-e^{2x}}}dx.$

18. $\int x^3 \cdot e^{-x^2}dx.$

19. $\int (\arcsin x)^2 dx.$

20. $\int \frac{dx}{x \cdot (3+\ln^2 x)}.$

21. $\int \sin^3 x dx.$

22. $\int (1-3x) \cdot e^{4x}dx.$

23. $\int \frac{x}{\cos^2 x}dx.$

Zadanie 18. Obliczyć

1. $\int \frac{3x-1}{x^2+4x+7}dx$

2. $\int \frac{3x-1}{x^2-6x+13}dx$

3. $\int \frac{5-3x}{2x^2-3x+2}dx$

4. $\int \frac{5-3x}{x^2-3x+2}dx$

5. $\int \frac{-2x+5}{3x^2-x-2}dx$

6. $\int \frac{x^2}{2x^2-3x+2}dx$

7. $\int \frac{3x-4}{2x^3+2x+x}dx$

8. $\int \frac{x^5-2x+1}{4+x^2}dx$

9. $\int \frac{x^4+1}{x^3-x^2+x-1}dx$

10. $\int \frac{5-3x}{\sqrt{2-4x-x^2}}dx$

11. $\int \frac{3x-2}{\sqrt{4x-x^2}}dx$

12. $\int \frac{3x+1}{\sqrt{1+x-x^2}}dx$

13. $\int \frac{3x+1}{\sqrt{3+x2x^2}}dx$

14. $\int \frac{4x-3}{\sqrt{3+x+x^2}}dx$

15. $\int \frac{5x-3}{\sqrt{3-x+2x^2}}dx$

16. $\int \frac{3x+7}{\sqrt{(2-x)(3-2x)}}dx$

17. $\int \frac{dx}{x-\sqrt{x^2-1}}$

18. $\int \frac{2-\ln x}{x \cdot (3\ln^2 + \ln x)}dx$

19. $\int x^2 \cdot \operatorname{arc\,tg} x dx$

20. $\int \sin^5 2x dx$

21. $\int \cos^5 x \cdot \sin^2 x dx$

22. $\int \sin^2 x \cdot \cos^4 x dx$

23. $\int \cos^4 3x dx$

Zadanie 19. Obliczyć całki oznaczone:

1. $\int_{-1}^{4} x|x-1|dx.$

2. $\int_{0}^{1} \ln(x^2+1)dx.$

3. $\int_{0}^{3} x\sqrt{x+1}dx.$

4. $\displaystyle\int_e^{e^2} \frac{1}{x\ln^2 x}dx.$ 5. $\displaystyle\int_0^1 \frac{e^x}{\sqrt{3-e^x}}dx.$ 6. $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 x dx.$

7. $\displaystyle\int_1^2 \frac{3x-2}{4x-x^2}dx.$ 8. $\displaystyle\int_{-1}^2 \frac{x-2}{\sqrt{4+x^2}}dx.$

Zadanie 20. Obliczyć pola obszarów ograniczonych krzywymi o podanych równaniach:

1. $yx^4 = 1, \quad y = 1, \quad y = 16.$
2. $y = 2x - x^2, \quad x + y = 0.$
3. $y = 2^x, \quad y = 2, \quad x = 0.$
4. $y^2 = -x, \quad y = x - 6, \quad y = -1, \quad y = 4.$
5. $x = y^3 - y, \quad x = 0.$
6. $y = \dfrac{1}{x^2}, \quad y = x, \quad y = 4.$
7. $y = -x^2, \quad y = 2x, \quad y = x.$
8. $y = \dfrac{x}{3}, \quad y = \dfrac{3}{x}, \quad y = 3x.$
9. $xy + 2 = 0, \quad y - x + 3 = 0.$
10. $y = x^3 - 2x, \quad y = x^2.$
11. $y = \dfrac{1}{4+x^2}, \quad y = 0.$

13. Całki nieoznaczone

13.1. Uwagi ogólne o całkowaniu.

Definicja 13.1. Funkcją pierwotną funkcji $f(x)$ w przedziale $a < x < b$ nazywamy każdą taką funkcję $F(x)$, której pochodna $F'(x)$ równa się danej funkcji $f(x)$ dla każdego x z przedziału $a < x < b$.

Dwie funkcje mające w danym przedziale tę samą skończoną pochodną mogą się różnić co najwyżej o stałą; np.: funkcjami, których pochodne są równe $2x$, mogą być $x^2 + 3$, $x^2 - 5$ lub ogólnie: $x^2 + C$.

Definicja 13.2. Całką nieoznaczoną funkcji $f(x)$, określoną symbolem

$$\int f(x)dx,$$

nazywamy wyrażenie $F(x) + C$, gdzie $F(x)$ jest funkcją pierwotną funkcji $f(x)$, a C jest dowolną stałą.

Jest więc

$$\int f(x)dx = F(x) + C, \quad \text{gdzie} \quad F'(x) = f(x).$$

13.2. Podstawowe wzory rachunku całkowego.

$$\int x^a dx = \frac{x^{a+1}}{a+1} + C, \quad a \neq -1, x > 0. \tag{83}$$

Gdy a jest liczbą naturalną, to zastrzeżenie $x > 0$ odpada; gdy a jest liczbą całkowitą ujemną, to zamiast $x > 0$ wystarczy założyć $x \neq 0$.

Przykład 13.1. Podajemy kilka szczególnych przypadków wzoru (83):

a) $a = 0$ wówczas $\displaystyle\int dx = x + C$;

b) $a = -\dfrac{1}{2}$ wówczas $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{x}} = 2\sqrt{x} + C, \quad x > 0$;

c) $a = -2$ wówczas $\displaystyle\int \frac{dx}{x^2} = -\frac{1}{x} + C, \quad x \neq 0$.

Podstawowe wzory rachunku całkowego:

(i) $\displaystyle\int \frac{dx}{x} = \ln|x| + C, x \neq 0$

(ii) $\displaystyle\int e^x dx = e^x + C.$

(iii) $\displaystyle\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C, a > 0, a \neq 1.$

(iv) $\displaystyle\int \cos x dx = \sin x + C.$

(v) $\displaystyle\int \sin x dx = -\cos x + C.$

(vi) $\displaystyle\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x + C, \quad \cos x \neq 0.$

(vii) $\displaystyle\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\operatorname{ctg} x + C, \quad \sin x \neq 0.$

(viii) $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + C = -\arccos x + C', \quad -1 < x < 1$

(ix) $\displaystyle\int \frac{dx}{1+x^2} = \operatorname{arc\,tg} x + C = -\operatorname{arc\,ctg} x + C'.$

13.3. **Własności całek nieoznaczonych.**

Definicja 13.3. Całka sumy równa się sumie całek, tzn. (jest to tzw. addytywność całki względem funkcji podcałkowej).

$$\int (f(x)+g(x))dx = \int f(x)dx + \int g(x)dx.$$

Stały czynnik wolno wynieść przed znak całki, tzn.

$$\int kf(x)dx = k\int f(x)dx, \quad k \neq 0.$$

Przykład 13.2. Obliczymy całkę

$$I = \int x(x-1)(x-2)dx$$

Doprowadzimy funkcję podcałkową do postaci wielomianu a następnie całkujemy wyraz po wyrazie:

$$I = \int (x^3 - 3x^2 + 2x)dx = \int x^3 dx - 3\int x^2 dx + 2\int x dx = \frac{x^4}{4} - 3\frac{x^3}{3} + 2\frac{x^2}{2} + C$$

i ostatecznie $I = \frac{1}{4}x^4 - x^3 + x^2 + C$.

Przykład 13.3. Obliczyć całkę

$$I = \int (x^2 - x + 1)^2 dx.$$

Podnosząc funkcję podcałkową do kwadratu kolejno otrzymujemy

$$I = \int (x^4 - 2x^3 + 3x^2 - 2x + 1)dx = \int x^4 dx - 2\int x^3 dx + 3\int x^2 dx - 2\int x dx + \int dx$$
$$= \frac{x^5}{5} - 2\frac{x^4}{4} + 3\frac{x^3}{3} - 2\frac{x^2}{2} + x + C = \frac{1}{5}x^5 - \frac{1}{2}x^4 + x^3 - x^2 + x + C.$$

13.4. **Całkowanie przez podstawienie.**

Twierdzenie 13.1. Wzór na całkowanie przez podstawienie (przez zamianę zmiennej) *Jeżeli dla $a \leqslant x \leqslant b$, $g(x) = t$ jest funkcją mającą pochodną oraz $A \leqslant g(x) \leqslant B$, a funkcja $f(t)$ jest ciągła w przedziale $[A, B]$, to*

$$\int f(g(x))g'(x)dx = \int f(t)dt,$$

przy czym po scałkowaniu prawej strony należy w otrzymanym wyniku podstawić $t = g(x)$.

Przykład 13.4. Obliczymy całkę

$$I = \int (x^2 + a^2)x dx.$$

Całkę tę można obliczyć na dwa sposoby:
Sposób 1: Rozkładamy ją na dwa składniki i stosując w każdym składniku wzór (83). Otrzymujemy

$$I = \int (x^3 + a^2 x)dx = \frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{2}a^2 x^2 + C.$$

Sposób 2: Można również zastosować podstawienie $t = x^2 + a^2$, skąd przez zróżniczkowanie otrzymujemy

$$dt = 2xdx, \quad \text{czyli} \quad xdx = \frac{1}{2}dt.$$

Na podstawie wzoru na zamianę zmiennych otrzymujemy

$$I = \frac{1}{2}\int tdt, \quad \text{skąd} \quad I = \frac{1}{4}t^2 + C'.$$

Ostatecznie więc mamy

$$\int (x^2 + a^2)xdx = \frac{1}{4}(x^2 + a^2)^2 + C'.$$

Przykład 13.5. Policzymy całkę

$$I = \int \frac{xdx}{(x^2 + a^2)^3}, \quad a \neq 0.$$

Ponieważ licznik różni się tylko czynnikiem stałym od różniczki wyrażenia $x^2 + a^2$, więc stosujemy podstawienie $t = x^2 + a^2$, przy czym $t > 0$. Różniczkowanie daje $dt = 2xdx$ zatem $xdx = \frac{1}{2}dt$. Mamy

$$I = \frac{1}{2}\int \frac{dt}{t^3} = \frac{1}{2}\int t^{-3}dt = \frac{1}{2} \cdot \frac{t^{-2}}{-2} + C = \frac{-1}{4t^2}.$$

Powracamy do zmiennej x i ostatecznie otrzymujemy

$$\int \frac{xdx}{(x^2 + a^2)^3} = \frac{-1}{4(x^2 + a^2)^2} + C, \quad \text{gdzie} \quad a \neq 0.$$

Przykład 13.6. Obliczymy całkę

$$\int xe^{x^2}dx.$$

Wykonujemy podstawienie $x^2 = t$, skąd różniczkując obie strony otrzymujemy $2xdx = dt$, $xdx = \frac{1}{2}dt$, a więc

$$\int xe^{x^2}dx = \int e^{x^2} \cdot xdx = \int e^t \cdot \frac{1}{2}dt = \frac{1}{2}\int e^t dt = \frac{1}{2}e^t + C = \frac{1}{2}e^{x^2} + C.$$

Zadanie 13.1. Obliczymy całkę

$$\int \sin x \cos x dx.$$

Wykonujemy podstawienie $\sin x = t$. Różniczkowanie daje $\cos x dx = dt$. Całkujemy

$$\int \sin x \cos x dx = \int tdt = \frac{1}{2}t^2 + C = \frac{1}{2}\sin^2 x + C.$$

13.5. Całkowanie przez części.

Twierdzenie 13.2. Wzór na całkowanie przez części. *Jeżeli f, g są funkcjami zmiennej x mającymi ciągłą pochodną, to*

$$\int f(x)g'(x)dx = f(x)g(x) - \int f'(x)g(x)dx.$$

Przykład 13.7. Obliczymy całkę

$$\int xe^x dx.$$

Całkujemy przez części przyjmując

$$f(x) = x, \quad g'(x) = e^x, \quad \text{skąd} \quad f'(x) = 1, \quad g(x) = \int e^x dx = e^x.$$

W myśl wzoru na całkowanie przez części mamy

$$\int xe^x dx = xe^x - \int e^x dx = xe^x - e^x + C = (x-1)e^x + C.$$

Przykład 13.8. Obliczamy całkę

$$\int x \sin x dx.$$

Całkujemy przez części przyjmując

$$f(x) = x, \quad g'(x) = \sin x, \quad \text{skąd} \quad f'(x) = 1, \quad g(x) = \int \sin x dx = -\cos x.$$

Otrzymujemy

$$\int x \sin x dx = -x\cos x - \int (-\cos x)dx = -x\cos x + \int \cos x dx = -x\cos x + \sin x + C.$$

13.6. Zadania z rozwiązaniami.

Zadanie 13.2. Obliczyć całkę

$$I = \int \frac{x(\sqrt{x} - x^2\sqrt[3]{x})}{\sqrt[4]{x}} dx.$$

Rozwiązanie. Zakładamy, że $x > 0$. Przedstawiamy pierwiastki w postaci potęg o wykładnikach ułamkowych

$$\sqrt{x} = x^{1/2}, \quad \sqrt[3]{x} = x^{1/3}, \quad \sqrt[4]{x} = x^{1/4}.$$

Wykonując mnożenie $x\sqrt{x} = x \cdot x^{1/2} = x^{3/2}, x \cdot x^2 \sqrt[3]{x} = x \cdot x^{2 \cdot 1/3} = x^{10/3}$, otrzymujemy

$$I = \int \frac{x^{3/2} - x^{10/3}}{x^{1/4}} dx.$$

Stosując regułę całkowania (13.3) otrzymujemy

$$I = \int \frac{x^{3/2}}{x^{1/4}} dx - \int \frac{x^{10/3}}{x^{1/4}} dx = \int x^{3/2-1/4} dx - \int x^{10/3-1/4} dx = \int x^{5/4} dx - \int x^{37/12} dx.$$

Na podstawie wzoru (83) otrzymujemy

$$I = \frac{x^{9/4}}{\frac{9}{4}} - \frac{x^{49/12}}{\frac{49}{12}} + C = \frac{4}{9}x^{9/4} - \frac{12}{49}x^{49/12} + C = \frac{4}{9}x^2\sqrt[4]{x} - \frac{12}{49}x^4\sqrt[12]{x} + C.$$

Zadanie 13.3. Oblicz całkę

$$I = \int \frac{\sqrt{x} - \sqrt[3]{x}}{x^2} dx.$$

Rozwiązanie. Zakładamy, że $x > 0$. Postępując podobnie jak w poprzednim zadaniu otrzymujemy

$$I = \int \frac{x^{\frac{1}{2}} - x^{\frac{1}{3}}}{x^2} dx = \int (x^{\frac{1}{2}-2} - x^{\frac{1}{3}-2}) dx = \int x^{-\frac{3}{2}} dx - \int x^{-\frac{5}{3}} dx.$$

Na podstawie wzoru (83) mamy

$$I = \frac{x^{-\frac{1}{2}}}{-\frac{1}{2}} - \frac{x^{-\frac{2}{3}}}{-\frac{2}{3}} + C = -2x^{-\frac{1}{2}} + \frac{2}{3} x^{-\frac{2}{3}} + C = \frac{3}{2\sqrt[3]{x^2}} - \frac{2}{\sqrt{x}} + C.$$

Zadanie 13.4. Obliczyć całkę

$$I = \int \frac{dx}{\sqrt{2x-3}}.$$

Rozwiązanie. Zakładamy, że $2x-3 > 0$ a więc $x > \frac{3}{2}$. Wykonujemy zamianę zmiennych $\sqrt{2x-3} = t$. Stąd $2x - 3 = t^2$, $2dx = 2tdt$, $dx = tdt$, przy czym $t > 0$. Podstawiając powyższe wartości do całki otrzymujemy

$$I = \int \frac{dx}{\sqrt{2x-3}} = \int \frac{tdt}{t} = \int dt = t + C = \sqrt{2x-3} + C.$$

Zadanie 13.5. Obliczyć całkę

$$\int x^2 \sqrt{2x^3 - 3} dx$$

Rozwiązanie. Zakładamy, że $x \geqslant \sqrt[3]{\frac{3}{2}}$. Wykonujemy podstawienie

$$\sqrt{2x^3 - 3} = t, \quad 2x^3 - 3 = t^2,$$

skąd różniczkując otrzymujemy

$$6x^2 dx = 2tdt, \quad \text{czyli} \quad x^2 dx = \frac{1}{3} tdt.$$

Zatem

$$\int x^2 \sqrt{2x^3 - 3} dx = \int \sqrt{2x^3 - 3} \cdot x^2 dx = \int t \cdot \frac{1}{3} tdt = \frac{1}{3} \int t^2 dt = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} t^3 + C = \frac{1}{9} (\sqrt{2x^3 - 3})^3 + C.$$

Zadanie 13.6. Obliczyć całkę

$$\int \frac{\ln x}{x} dx.$$

Rozwiązanie. Zakładamy, że $x > 0$. Wykonujemy podstawienie $\ln x = t$ i różniczkujemy $\frac{1}{x} dx = dt$. Mamy więc

$$\int \frac{\ln x}{x} dx = \int tdt = \frac{1}{2} t^2 + C = \frac{1}{2} (\ln x)^2 + C.$$

Zadanie 13.7. Obliczyć całkę
$$\int \frac{xdx}{\sqrt{1-x^4}}.$$
Rozwiązanie. Zakładamy, że $-1 < x < 1$. Wykonujemy podstawienie $x^2 = t$, skąd $2xdx = dt$ czyli $xdx = \frac{1}{2}dt$. Zauważmy, że $0 < t < 1$. Otrzymujemy
$$\int \frac{xdx}{\sqrt{1-x^4}} = \int \frac{\frac{1}{2}dt}{\sqrt{1-t^2}} = \frac{1}{2}\int \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} == \frac{1}{2}\arcsin t + C = \frac{1}{2}\arcsin(x^2) + C.$$
Zadanie 13.8. Obliczyć całkę
$$\int e^x \sin x dx.$$
Rozwiązanie. Całkujemy przez części przyjmując
$$f(x) = \sin x, \quad g'(x) = e^x, \quad \text{skąd} \quad f'(x) = \cos x dx, \quad g(x) = \int e^x dx = e^x.$$
Otrzymujemy
$$\int e^x \sin x dx = e^x \sin x - \int e^x \cos x dx.$$
Podobnie całkując przez części całkę po prawej stronie ostatniej równości otrzymujemy
$$\int e^x \cos x dx = \left\{ \begin{array}{ll} f(x) = \cos x & g'(x) = e^x \\ f'(x) = -\sin x & g(x) = e^x \end{array} \right\} = e^x \cos x + \int e^x \sin x dx.$$
Podstawiając otrzymaną wartość do poprzedniej równości otrzymujemy
$$\int e^x \sin x dx = e^x \sin x - e^x \cos x - \int e^x \sin x dx,$$
skąd po przeniesieniu całki na lewą stronę równości mamy
$$2\int e^x \sin x dx = e^x(\sin x - \cos x).$$
Ostatecznie więc
$$\int e^x \sin x dx = \frac{1}{2}e^x(\sin x - \cos x) + C.$$
Zadanie 13.9. Obliczyć całkę
$$\int \ln x dx.$$
Rozwiązanie. Zakładamy, że $x > 0$. Całkujemy przez części przyjmując
$$f(x) = \ln x, \quad g'(x) = dx, \quad \text{skąd} \quad f'(x) = \frac{1}{x}dx, \quad g(x) = \int dx = x$$
Obliczamy
$$\int \ln x dx = x\ln x - \int x \cdot \frac{1}{x}dx = x\ln x - \int dx = x\ln x - x + C = x(\ln x - 1) + C.$$

Zadanie 13.10. Obliczyć całkę
$$\int x^{10} \ln x dx.$$

Rozwiązanie. Zakładamy, że $x > 0$. Całkujemy przez części przyjmując
$$f(x) = \ln x, \quad g'(x) = x^{10} dx, \quad \text{skąd} \quad f'(x) = \frac{1}{x} dx, \quad g(x) = \int x^{10} dx = \frac{1}{11} x^{11}.$$
Otrzymujemy
$$\begin{aligned}\int x^{10} \ln x dx &= \frac{1}{11} x^{11} \ln x - \int \frac{1}{11} x^{11} \cdot \frac{1}{x} dx = \frac{1}{11} x^{11} \ln x - \frac{1}{11} \int x^{10} dx \\ &= \frac{1}{11} x^{11} \ln x - \frac{1}{11} \cdot \frac{1}{11} x^{11} + C = \frac{1}{11} x^{11} (\ln x - \frac{1}{11}) + C.\end{aligned}$$

Zadanie 13.11. Obliczyć całkę
$$\int (\ln x)^2 dx.$$

Rozwiązanie. Zakładamy, że $x > 0$. Całkujemy przez części przyjmując
$$f(x) = (\ln x)^2, \quad g'(x) = dx, \quad \text{skąd} \quad f'(x) = 2 \ln x \cdot \frac{1}{x} dx, \quad g(x) = \int dx = x.$$
Obliczamy
$$\int (\ln x)^2 dx = x (\ln x)^2 - \int x \cdot 2 \ln x \cdot \frac{1}{x} dx = x (\ln x)^2 - 2 \int \ln x dx.$$
Na podstawie zadania 13.6 mamy w dalszym ciągu
$$\int (\ln x)^2 dx = x (\ln x)^2 - 2x (\ln x - 1) + C = x ((\ln x)^2 - 2 \ln x + 2) + C.$$

Zadanie 13.12. Obliczyć całkę
$$\int \operatorname{arc\,tg} x dx.$$

Rozwiązanie. Całkujemy przez części przyjmując
$$f(x) = \operatorname{arc\,tg} x, \quad g'(x) = dx, \quad \text{skąd} \quad f'(x) = \frac{dx}{x^2 + 1}, \quad g(x) = \int dx = x.$$
Wówczas mamy
$$\int \operatorname{arc\,tg} x dx = x \operatorname{arc\,tg} x - \int \frac{x dx}{x^2 + 1}.$$
Ostatnią całkę obliczamy podstawiając $x^2 + 1 = t$, skąd $x dx = \frac{1}{2} dt$. Zauważmy, że $t > 0$. Mamy
$$\int \frac{x dx}{x^2 + 1} = \int \frac{\frac{1}{2} dt}{t} = \frac{1}{2} \ln |t| = \frac{1}{2} \ln (x^2 + 1).$$
Ostatecznie otrzymujemy
$$\int \operatorname{arc\,tg} x dx = x \operatorname{arc\,tg} x - \frac{1}{2} \ln (x^2 + 1) + C.$$

13.7. **Zadania do samodzielnego rozwiązania.**

Zadanie 13.13. Obliczyć całki

1. $\int (5x^2-6x+3-\frac{2}{x}+\frac{5}{x^2})dx.$
2. $\int \frac{(x^2-1)^3}{x}dx.$
3. $\int (x^2-x+1)(x^2+x+1)dx.$
4. $\int (x^2+4)^5 xdx.$
5. $\int \frac{xdx}{1+x^2}.$
6. $\int \frac{xdx}{(x^2+3)^6}.$
7. $\int \frac{x^2dx}{a^3+x^3}, a \neq 0.$
8. $\int \frac{x\sqrt[3]{x}+\sqrt[4]{x}}{x^2}dx.$
9. $\int \frac{x\sqrt{x}-x\sqrt[4]{x}}{\sqrt[3]{x}}dx.$
10. $\int (3+2\sqrt[4]{x})^3dx.$
11. $\int \frac{\sqrt{x}-2\sqrt[3]{x^2}+4\sqrt[4]{5x^3}}{6\sqrt[3]{x}}dx.$
12. $\int \frac{3+5\sqrt[3]{x^2}}{\sqrt{x^3}}dx.$
13. $\int \sqrt{3x+1}dx.$
14. $\int \sqrt{a+bx}dx.$
15. $\int \frac{xdx}{\sqrt[3]{2x^2-1}}.$
16. $\int x\sqrt{1+x^2}dx.$
17. $\int \frac{x}{\sqrt{3-5x^2}}dx.$
18. $\int \frac{x-1}{\sqrt[3]{x+1}}dx.$
19. $\int \frac{x}{\sqrt{x^2-6}}dx.$
20. $\int \frac{x^2dx}{\sqrt[5]{x^3+1}}.$
21. $\int \frac{e^{1/x}}{x^2}dx.$
22. $\int xe^{-x^2}dx.$
23. $\int \frac{dx}{2\cos^2 3x}.$
24. $\int x\sin(2x^2+1)dx.$
25. $\int \sin^5 x\cos xdx.$
26. $\int \frac{\cos x}{\sqrt{1+\sin x}}dx.$
27. $\int \frac{\sin x}{a+b\cos x}dx, b \neq 0.$
28. $\int \cos x \cdot e^{\sin x}dx.$
29. $\int \frac{x^3dx}{\cos^2 x^4}.$
30. $\int \frac{\operatorname{tg} x}{\cos^2 x}dx.$
31. $\int \frac{x^2dx}{\cos^2(x^3+1)}$
32. $\int \frac{(\ln x)^2}{x}dx.$
33. $\int \frac{dx}{e^x+e^{-x}}.$
34. $\int \frac{e^xdx}{2e^x+1}.$
35. $\int x\ln(1+x^2)dx.$
36. $\int \frac{\sqrt{2+\ln|x|}}{x}dx.$
37. $\int 6^{1-x}dx.$
38. $\int \frac{dx}{x\sqrt{1-\ln^2|x|}}.$
39. $\int \frac{\ln|\operatorname{arc\,tg} x|dx}{1+x^2}.$
40. $\int xe^{x^2}(x^2+1)dx.$
41. $\int \frac{x^2dx}{\sqrt{1-x^6}}.$
42. $\int \frac{dx}{(1+x^2)\operatorname{arc\,tg} x}.$
43. $\int \frac{(\pi-\arcsin x)dx}{\sqrt{1-x^2}}.$
44. $\int \frac{xdx}{x^4+1}.$
45. $\int x^4(1+x)^3dx.$
46. $\int x^2e^xdx.$
47. $\int x^3e^xdx.$
48. $\int x^4e^{2x}dx.$
49. $\int x\cos xdx.$
50. $\int x^2\cos xdx.$
51. $\int x^2\sin 5xdx.$

52. $\int e^x \cos x dx.$

53. $\int e^{-2x} \sin 3x dx.$

54. $\int e^x \cos \frac{2}{3} x dx.$

55. $\int \sqrt{x} \ln x dx.$

56. $\int (\ln |x|)^3 dx.$

57. $\int \frac{(\ln |x|)^2}{x^5} dx.$

58. $\int \sqrt{x} (\ln |x|)^3 dx.$

59. $\int \frac{\ln |x|}{x^4} dx.$

60. $\int \frac{(\ln x)^2}{\sqrt{x}} dx.$

61. $\int x^3 (\ln x)^2 dx.$

62. $\int x^n \ln x dx, n \neq -1.$

14. Powtórzenie materialu

Przykład 14.1. Rozważmy funkcję
$$f(x) = \frac{x}{4-x^2}.$$

Zadanie 14.1. Wyznaczyć dziedzinę funkcji $f(x)$:

Rozwiązanie. Dziedzina funkcji f to zbiór D postaci:
$$D = \{x \in \mathbb{R} : 4 - x^2 \neq 0\} = \{x \in \mathbb{R} : (2-x)(2+x) \neq 0\} = \{x \in \mathbb{R} : x \neq -2 \vee x \neq 2\}.$$

Zatem
$$D = \mathbb{R} \setminus \{-2, 2\}.$$

Odp. Dziedziną funkcji f jest suma przedziałów $D = (-\infty, -2) \cup (-2, 2) \cup (2, +\infty)$.

Zadanie 14.2. Obliczyć granice funkcji $f(x)$ w krańcach przedziałów dziedziny D oraz wyznaczyć asymptoty wykresu funkcji.

Rozwiązanie. Obliczamy granice funkcji $f(x)$ w $\pm\infty$:
$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} \frac{x}{4-x^2} = 0,$$
$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{x}{4-x^2} = 0,$$
Zatem funkcja posiada asymptotę poziomą w $\pm\infty$ o równaniu $y = 0$. Badamy granice prawo- i lewostronną w punkcie $x = -2$.
$$\lim_{x\to-2^-} f(x) = \lim_{x\to-2^-} \frac{x}{4-x^2} = \lim_{x\to-2^-} \frac{x}{(2-x)(2+x)} = +\infty,$$
$$\lim_{x\to-2^+} f(x) = \lim_{x\to-2^+} \frac{x}{4-x^2} = \lim_{x\to-2^+} \frac{x}{(2-x)(2+x)} = -\infty.$$
Badamy granice prawo- i lewostronną w punkcie $x = 2$.
$$\lim_{x\to2^-} f(x) = \lim_{x\to2^-} \frac{x}{4-x^2} = \lim_{x\to2^-} \frac{x}{(2-x)(2+x)} = +\infty,$$
$$\lim_{x\to2^+} f(x) = \lim_{x\to2^+} \frac{x}{4-x^2} = \lim_{x\to2^+} \frac{x}{(2-x)(2+x)} = -\infty.$$
Z uwagi na istnienie asymptoty poziomej funkcja nie ma asymptoty ukośnej. Istotnie, zauważmy, że:
$$\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{x}{x(4-x^2)} = 0$$

Zadanie 14.3. Policzyć pochodną funkcji $f(x)$ oraz wyznaczyć ekstrema tej funkcji.

Rozwiązanie. Obliczmy pochodną
$$f'(x) = \frac{1(4-x^2) - x(-2x)}{(4-x^2)^2} = \frac{4 - x^2 + 2x^2}{(4-x^2)^2} = \frac{4+x^2}{(4-x^2)^2}.$$

Warunek konieczny istnienia ekstremum. Nie istnieje taki punkt x dla którego pochodna jest równa zero. Zauważmy ponadto, że dla dowolnego $x \in D$ $f'(x) > 0$. Zatem funkcja jest rostąca przedziałami w całej swojej dziedzinie.

Zadanie 14.4. Policzyć drugą pochodną funkcji $f(x)$ oraz wyznaczyć jej punkty przegięcia.

ROZWIĄZANIE. Wyznaczamy drugą pochodną funkcji $f(x)$, czyli pochodną funkcji

$$f'(x) = \frac{4+x^2}{(4-x^2)^2}:$$

$$\begin{aligned} f''(x) &= \frac{2x(4-x^2)^2 - (4+x^2)\cdot 2(4-x^2)\cdot(-2x)}{(4-x^2)^4} = \frac{2x(4-x^2)\left[(4-x^2)+2(4+x^2)\right]}{(4-x^2)^4} \\ &= \frac{2x(4-x^2)\left[4-x^2+8+2x^2\right]}{(4-x^2)^4} = \frac{2x(4-x^2)(x^2+12)}{(4-x^2)^4} \end{aligned}$$

Warunek konieczny istnienia punktu przegięcia. Wyznaczamy punkt zerowania się drugiej pochodnej.

$$f''(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{2x(4-x^2)(x^2+12)}{(4-x^2)^4} = 0 \Leftrightarrow 2x = 0 \Leftrightarrow x = 0$$

Warunek dostateczny istnienia punktu przegięcia.

$$f''(x) > 0 \Leftrightarrow \frac{2x(4-x^2)(x^2+12)}{(4-x^2)^4} > 0 \Leftrightarrow 2x(4-x^2) > 0 \Leftrightarrow x \in (-\infty,-2)\cup(0,2)$$

$$f''(x) < 0 \Leftrightarrow \frac{2x(4-x^2)(x^2+12)}{(4-x^2)^4} < 0 \Leftrightarrow 2x(4-x^2) < 0 \Leftrightarrow x \in (-2,0)\cup(2,+\infty,)$$

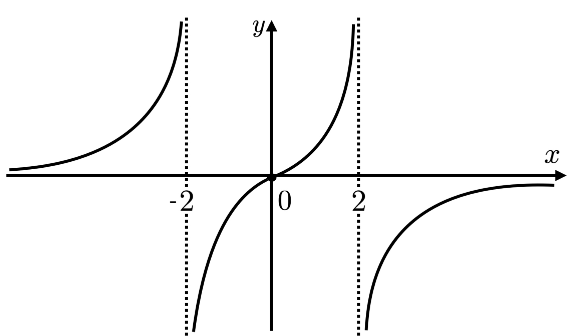
Zatem funkcja posiada punkt przegięcia w $x = 0$.

Zadanie 14.5. Sporządzić tabelę przebiegu zmienności funkcji i narysować jej wykres.

ROZWIĄZANIE.

x	$-\infty$	$\ldots$	-2^-	-2^+	$\ldots$	0	$\ldots$	2^-	2^+	$\ldots$	$+\infty$
f''	$+$	$+$	$+$	$-$	$-$	0	$+$	$+$	$-$	$-$	$-$
f'	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$	1	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$
f	0	$\nearrow$	$+\infty$	$-\infty$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$	$-\infty$	$\nearrow$	0

Wykres funkcji przedstawia rysunek 59.



RYSUNEK 61. Wykres funkcji $f(x) = \dfrac{x}{4-x^2}$.

Zadanie 14.6. Obliczyć całkę

$$\int f(x)dx$$

Rozwiązanie.

$$\int f(x)dx = \int \frac{x}{4-x^2}dx = \left\{ \begin{array}{c} t = 4-x^2 \\ dt = -2xdx \\ -\frac{1}{2}dt = xdx \end{array} \right\} = \int \frac{1}{t}(-\frac{1}{2})dt = -\frac{1}{2}\int \frac{1}{t}dt$$
$$= -\frac{1}{2}\ln|t| + c = -\frac{1}{2}\ln|4-x^2| + c$$

Przykład 14.2. Rozważyć funkcję

$$y = x^3(x-1)(x-2)^2.$$

Zadanie 14.7. Wyznaczyć dziedzinę funkcji oraz policzyć granice na krańcach przedziałów dziedziny.

Rozwiązanie.

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = +\infty \quad \text{i} \quad \lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty,$$

a to dlatego, że $f(x)$ jest wielomianem stopnia parzystego (szóstego) i współczynnik przy x^6 jest dodatni.

Zadanie 14.8. Policzyć pochodną funkcji $f(x)$ oraz wyznaczyć ekstrema tej funkcji.

Rozwiązanie. Obliczamy pochodną, stosując wzór na pochodną iloczynu trzech czynników:

$$(uvw)' = u'vw + uv'w + uvw'.$$

Otrzymujemy więc

$$y' = 3x^2(x-1)(x-2)^2 + x^3(x-2)^2 + 2x^3(x-1)(x-2)$$
$$= x^2(x-2)(3(x-1)(x-2) + x(x-2) + 2x(x-1)).$$

Po redukcji otrzymujemy

$$y' = x^2(x-2)(6x^2 - 13x + 6) \quad \text{czyli} \quad y' = 6x^2(x-2)(x-\frac{2}{3})(x-\frac{3}{2}).$$

Warunek konieczny istnienia ekstremum. Punktami zerowymi pochodnej są: $x = 0$ (pierwiastek podwójny), $x = 2$, $x = \frac{2}{3}$, $x = \frac{3}{2}$. *Warunek dostateczny istnienia ekstremum.*

$$y' > 0 \quad \Leftrightarrow \quad (x-2)(x-\frac{2}{3})(x-\frac{3}{2}) > 0 \quad \Leftrightarrow \quad x \in (-\frac{3}{2};\frac{2}{3}) \cup (2;\infty)$$
$$y' < 0 \quad \Leftrightarrow \quad (x-2)(x-\frac{2}{3})(x-\frac{3}{2}) < 0 \quad \Leftrightarrow \quad x \in (-\infty;-\frac{3}{2}) \cup (\frac{2}{3};2)$$

Pochodna zmienia znak w otoczeniu powyższych punktów. Funkcja f posiada zatem minima lokalne w $x = \frac{2}{3}$ i w $x = 2$ oraz maksiumum lokalne w $x = \frac{3}{2}$. Obliczamy wartości funkcji $y = f(x)$ w tych punktach i dostajemy:

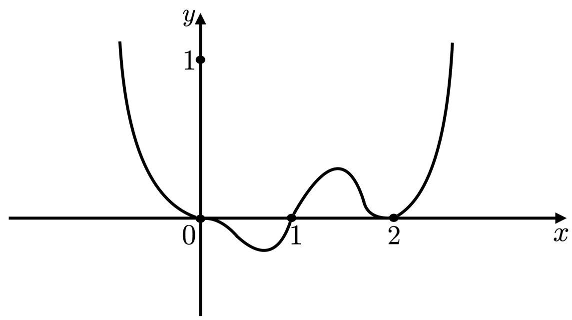
$$f\left(\frac{2}{3}\right) = -\frac{2^7}{3^6}, \quad f\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{3^3}{2^6}, \quad f(2) = 0.$$

Zadanie 14.9. Sporządzić tabelę przebiegu zmienności funkcji i narysować jej wykres.

Rozwiązanie. Tabela przebiegu zmienności danej funkcji:

x	$-\infty$	$\ldots$	0	$\ldots$	$\frac{2}{3}$	$\ldots$	$\frac{3}{2}$	$\ldots$	2	$\ldots$	$+\infty$
y'	$-$	$-$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	$+$
y	$+\infty$	$\searrow$	0	$\searrow$	$-\frac{2^7}{3^6}$	$\nearrow$	$\frac{3^3}{2^6}$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

Wykres funkcji $y = x^3(x-1)(x-2)^2$ podany jest na rysunku 62.



RYSUNEK 62. Wykres funkcji $y = x^3(x-1)(x-2)^2$.

Zadanie 14.10. Obliczyć całkę

$$\int f(x)dx$$

ROZWIĄZANIE.

$$\begin{aligned}\int f(x)dx &= \int x^3(x-1)(x-2)^2dx = \int (x^6 - 5x^5 + 8x^4 - 4x^3)dx \\ &= \frac{1}{7}x^7 - \frac{5}{6}x^6 + \frac{8}{5}x^5 - x^4 + c\end{aligned}$$

15. Całki oznaczone

Definicja 15.1. Niech $f(x)$ będzie funkcją ciągłą na przedziale $\langle a, b\rangle$, oraz przez $F(x)$ oznaczmy funkcję pierwotną funkcji $f(x)$ w tym przedziale tzn. $F'(x) = f(x)$, Wówczas ma miejsce wzór

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a),$$

przy czym oczywiście różnica $F(b) - F(a)$ nie zależy od stałej całkowania C.

Uwaga 15.1. Prawa strona powyższego wzoru oznaczna jest także symbolem

$$[F(x)]_a^b \quad \text{lub} \quad F(x)|_a^b.$$

15.1. **Interpretacja geometryczna całki oznaczonej.** Jeżeli w przedziale $\langle a, b\rangle$, jest $f(x) \geqslant 0$, to pole obszaru ograniczonego łukiem krzywej $y = f(x)$, odcinkiem osi Ox oraz prostymi $x = a$ i $x = b$ (rys. 63) równa się całce oznaczonej

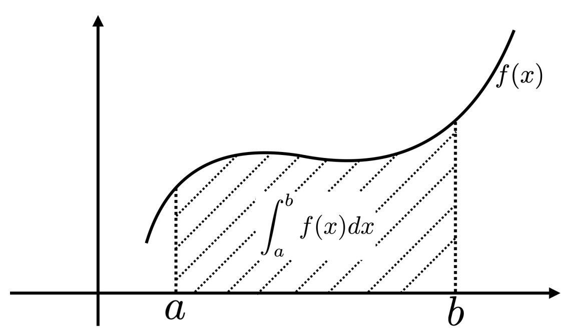
$$\int_a^b f(x)dx$$

Jeżeli zaś w przedziale $\langle a, b\rangle$, jest $f(x) \leqslant 0$, to analogiczne pole równa się

$$-\int_a^b f(x)dx.$$

Zawsze więc pole wyżej określonego obszaru można wyrazić całką oznaczoną

$$\int_a^b |f(x)|dx.$$



Rysunek 63. Interpretacja geometryczna całki oznaczonej.

Przez $\int_a^b f(x)dx$, gdzie $a > b$, rozumiemy całkę $-\int_b^a f(x)dx$. Przyjmujemy również, że

$$\int_a^a f(x)dx = 0.$$

15.2. **Własności całki oznaczonej.** Jeżeli $a \leqslant b \leqslant c$, to

$$\int_a^c f(x)dx = \int_a^b f(x)dx + \int_b^c f(x)dx;$$

jest to tzw. addytywność całek oznaczonych względem przedziału całkowania.

Stały czynnik można wyłączyć przed znak całki oznaczonej

$$\int_a^b kf(x)dx = k\int_a^b f(x)dx.$$

Całka sumy równa się sumie całek, tzn.

$$\int_a^b (f(x)+g(x))dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx;$$

jest to tzw. addytywność całki względem funkcji podcałkowej.

Przykład 15.1. Obliczymy

$$\int_0^{\frac{1}{2}\pi} x\sin x dx.$$

Stosując wzór na całkowanie przez części otrzymujemy

$$\begin{aligned}\int_0^{\frac{1}{2}\pi} x\sin x dx &= \left\{\begin{array}{ll} f(x)=x & g'(x)=\sin x dx \\ f'(x)=dx & g(x)=-\cos x\end{array}\right\} = \left[-x\cos x + \int \cos x dx\right]_0^{\frac{1}{2}\pi} \\ &= [-x\cos x+\sin x]_0^{\frac{1}{2}\pi} = -\frac{1}{2}\pi\cos\frac{1}{2}\pi + \sin\frac{1}{2}\pi - (-0\cos 0+\sin 0) = 1.\end{aligned}$$

Przykład 15.2. Obliczymy

$$\int_0^{\frac{1}{2}\pi} \sin^2 x\cos x dx.$$

Rozważmy całkę nieoznaczoną:

$$\int \sin^2 x\cos x dx.$$

Stosując wzór na całkowanie przez podstawienie i przyjmując $\sin x = t$ otrzymujemy

$$\int \sin^2 x\cos x dx = \left\{\begin{array}{l} t=\sin x \\ dt=\cos x dx\end{array}\right\} = \int t^2 dt = \frac{1}{3}t^3 = \frac{1}{3}(\sin x)^3$$

A następnie wracając do całki oznaczonej otrzymujemy:

$$\int_0^{\frac{1}{2}\pi} \sin^2 x\cos x dx = \left[\frac{1}{3}(\sin x)^3\right]_0^{\frac{1}{2}\pi} = \frac{1}{3}\left[(\sin\frac{1}{2}\pi)^3 - (\sin 0)^3\right] = \frac{1}{3}\left[1^3-0^3\right] = \frac{1}{3}$$

Przykład 15.3. Obliczymy pole ograniczone odcinkami osi Ox od $x=-1$ do $x=1$, rzędnymi w tych punktach oraz łukiem lini

$$y = \frac{1}{x^2+1}$$

Zauważmy, że przy dowolnym x mamy $y>0$. Wiemy, że

$$\int \frac{dx}{x^2+1} = \operatorname{arc\,tg} x,$$

a więc poszukiwane pole wyraża się wzorem

$$\int_{-1}^{1} \frac{dx}{x^2+1} = \operatorname{arc\,tg}(1) - \operatorname{arc\,tg}(-1) = \frac{1}{4}\pi - (-\frac{1}{4}\pi) = \frac{1}{2}\pi.$$

Przykład 15.4. Obliczymy pole ograniczone łukiem paraboli $y^2 = 2x$ oraz prostą $x = 8$ Ze względu na symetrię paraboli $y^2 = 2x$ względem osi Ox wystarczy obliczyć pole ograniczone osią Ox, prostą $x = 8$ i łukiem paraboli w pierwszej ćwiartce i otrzymamy wynik podwoić. Obliczamy całkę oznaczoną

$$P = \int_0^8 \sqrt{2x}dx = \sqrt{2}\int_0^8 x^{\frac{1}{2}}dx = \sqrt{2}\left[\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}\right]_0^8 = \frac{2}{3}\sqrt{2}\cdot(8^{\frac{3}{2}} - 0^{\frac{3}{2}}) = \frac{2}{3}\sqrt{2}(\sqrt{8})^3 = \frac{64}{3}.$$

Poszukiwane pole wynosi $\dfrac{128}{3}$.

15.3. **Zadania z rozwiązaniami.**

Zadanie 15.1. Obliczyć pole obszaru ograniczonego łukiem krzywej $y = x^3 + x^2 - 2x$, odcinkiem osi Ox oraz rzędnymi w punktach $x = -2, x = 2$.

Rozwiązanie. Stosujemy wzór

$$P = \int_{-2}^{2} |x^3 + x^2 - 2x| dx.$$

Aby obliczyć wartość całki, musimy znać znaki wartości funkcji $y = x^3 + x^2 - 2x$. W tym celu znajdziemy pierwiastki równania

$$x^3 + x^2 - 2x = 0, \quad \text{czyli} \quad x(x^2 + x - 2) = 0.$$

Stąd mamy pierwiastki

$$x = -2, \quad x = 0, \quad x = 1.$$

Przedział $\langle -2, +2\rangle$ rozbijamy na takie podprzedziały $\langle -2, 0)$, $\langle 0, 1)$, $\langle 1, 2\rangle$, żeby w ka/.zdym z tych podprzedziałów funkcja $y = x^3 + x^2 - 2x$ miała stały znak: w pierwszym i trzecim podprzedziale dodatni, w drugim ujemny. Mamy więc

$$P = \int_{-2}^{0}(x^3 + x^2 - 2x)dx - \int_0^1 (x^3 + x^2 - 2x)dx + \int_1^2 (x^3 + x^2 - 2x)dx.$$

Obliczamy pola w poszczególnych podprzedziałach:

$$\int_{-2}^{0}(x^3 + x^2 - 2x)dx = \left[\frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{3}x^3 - x^2\right]_{-2}^{0} = 0 - \left[\frac{16}{4} - \frac{8}{3} - 4\right] = \frac{8}{3},$$

$$-\int_0^1 (x^3 + x^2 - 2x)dx = -\left[\frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{3}x^3 - x^2\right]_0^1 = -\left[\frac{1}{4} + \frac{1}{3} - 1\right] = \frac{5}{12}.$$

$$\int_1^2 (x^3 + x^2 - 2x)dx = \left[\frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{3}x^3 - x^2\right]_2^1 = \left[\frac{16}{4} + \frac{8}{3} - 4\right] - \left[\frac{1}{4} + \frac{1}{3} - 1\right] = \frac{37}{12}.$$

Całe pole wynosi $P = \dfrac{8}{3} + \dfrac{5}{12} + \dfrac{37}{12} = \dfrac{37}{6}$.

Zadanie 15.2.* Obliczyć całkę oznaczoną

$$I(\alpha) = \int_0^1 \frac{dx}{1 + 2x\cos\alpha + x^2}, \quad \text{gdzie} \quad -\pi < \alpha < \pi.$$

Rozwiązanie. Badamy wyróżnik mianownika

$$\Delta = 4\cos^2\alpha - 4 = 4(\cos^2\alpha - 1) = -4\sin^2\alpha.$$

Widzimy więc, że $\Delta = 0$ dla $\alpha = k\pi$, a przy pozostałych wartościach kąta α jest $\Delta < 0$.
Przypadek 1: $\alpha = k\pi$. Oznaczając krótko naszą całkę przez I mamy

$$I = \int_0^1 \frac{dx}{1 + 2x + x^2} = \int_0^1 \frac{dx}{(x+1)^2} = \left[-\frac{1}{x+1}\right]_0^1 = -\frac{1}{2} + 1 = \frac{1}{2}.$$

Przypadek 2: $-\pi < \alpha < 0$ lub $0 < \alpha < \pi$. Funkcja podcałkowa jest wówczas stale dodatnia. Bierzemy pod uwagę najpierw całkę nieoznaczoną

$$\int \frac{dx}{1 + 2x\cos\alpha + x^2} = \int \frac{dx}{(x + \cos\alpha)^2 + 1 - \cos^2\alpha} = \int \frac{dx}{(x + \cos\alpha)^2 + \sin^2\alpha}.$$

Podstawiamy $x + \cos\alpha = t\sin\alpha$, skąd $dx = \sin\alpha dt$. Mamy

$$\int \frac{dx}{1 + 2x\cos\alpha + x^2} = \int \frac{\sin\alpha dt}{t^2\sin^2\alpha + \sin^2\alpha} = \frac{\sin\alpha}{\sin^2\alpha}\int \frac{dt}{t^2+1} = \frac{1}{\sin\alpha}\operatorname{arc\,tg} t = \frac{1}{\sin\alpha}\operatorname{arc\,tg}\frac{x + \cos\alpha}{\sin\alpha}.$$

Obliczamy teraz całkę oznaczoną

$$\int_0^1 \frac{dx}{1 + 2x\cos\alpha + x^2} = [\frac{1}{\sin\alpha}\operatorname{arc\,tg}\frac{x + \cos\alpha}{\sin\alpha}]_0^1 = \frac{1}{\sin\alpha}(\operatorname{arc\,tg}\frac{1 + \cos\alpha}{\sin\alpha} - \operatorname{arc\,tg}\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}).$$

Biorąc pod uwagę wzory $\frac{1 + \cos\alpha}{\sin\alpha} = \operatorname{ctg}\frac{1}{2}\alpha$ i $\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} = \operatorname{ctg}\alpha$ otrzymujemy

$$\int_0^1 \frac{dx}{1 + 2x\cos\alpha + x^2} = \frac{1}{\sin\alpha}(\operatorname{arc\,tg}(\operatorname{ctg}\frac{1}{2}\alpha) - \operatorname{arc\,tg}(\operatorname{ctg}\alpha)),$$

gdzie $-\pi < \alpha < 0$ lub $0 < \alpha < \pi$. Na mocy definicji funkcja $\operatorname{arc\,tg} x$ przyjmuje wartości z przedziału $-\frac{1}{2}\pi < \operatorname{arc\,tg} x < \frac{1}{2}\pi$. Jeżeli liczba β spełnia warunek $\frac{1}{2}\pi < \beta < \frac{1}{2}$, to dla tej wartości mamy równość $\operatorname{arc\,tg}(\operatorname{tg}\beta) = \beta$. Jeżeli natomiast β nie leży między $-\frac{1}{2}\pi$ i $\frac{1}{2}\pi$, to wzór powyższy nie jest prawdziwy. Postawmy sobie zadanie: dobrać takie liczby β i γ, żeby było

$$-\frac{1}{2}\pi < \beta < \frac{1}{2}\pi \quad \text{i} \quad \operatorname{tg}\beta = \operatorname{ctg}\frac{1}{2}\alpha,$$

$$-\frac{1}{2}\pi < \gamma < \frac{1}{2}\pi \quad \text{i} \quad \operatorname{tg}\gamma = \operatorname{ctg}\alpha.$$

Wówczas poszukiwana całka przyjmie postać

$$\int_0^1 \frac{dx}{1 + 2x\cos\alpha + x^2} = \frac{\beta - \gamma}{\sin\alpha}.$$

Jeżeli $0 < \alpha < \pi$, to bierzemy $\beta = \frac{1}{2}\pi - \frac{1}{2}\alpha, \gamma = \frac{1}{2}\pi - \alpha$ i otrzymujemy wzór

$$\int_0^1 \frac{dx}{1 + 2x\cos\alpha + x^2} = \frac{\alpha}{2\sin\alpha}.$$

Jeżeli zaś $-\pi < \alpha < 0$, to należy wziąść $\beta = -\frac{1}{2}\pi - \frac{1}{2}\alpha, \gamma = \frac{1}{2}\pi - \alpha$ iwzór ostateczny pozostaje taki sam. Ostatecznie więc mamy

$$I(\alpha) = \frac{\alpha}{2\sin\alpha} \quad \text{dla} \quad \alpha \neq 0 \quad \text{oraz} \quad I(0) = \frac{1}{2}$$

Widzimy stąd, że tak określona funkcja

$$I(\alpha) = \int_0^1 \frac{dx}{1 + 2x\cos\alpha + x^2}$$

jest ciągła także w punkcie $\alpha = 0$, ponieważ $\lim\limits_{\alpha\to 0} \frac{\alpha}{2\sin\alpha} = \frac{1}{2}$.

15.4. **Zadania do samodzielnego rozwiązania.**

Zadanie 15.3. Obliczyć całki:

1. $\int_3^5 \frac{x}{x^2-4}dx.$
2. $\int_0^a \frac{dx}{x^2+a^2}, a > 0$
3. $\int_{-3}^{-2} \frac{dx}{x^2+2x+1}.$
4. $\int_{-2/5}^{2/5} \frac{dx}{4+25x^2}.$
5. $\int_{-1}^{0} \frac{3dx}{4x^2+4x-3}.$
6. $\int_1^2 \frac{dx}{\sqrt{3+2x-x^2}}.$
7. $\int_{\frac{1}{2}}^{1} \frac{(2x-3)dx}{\sqrt{3+4x-4x^2}}.$
8. $\int_{-\sqrt{3/5}}^{\sqrt{3/5}} \frac{dx}{\sqrt{3-5x^2}}.$
9. $\int_1^2 \frac{x^2+1}{\sqrt[3]{x^3+3x+1}}dx.$
10. $\int_0^6 \frac{x}{\sqrt{4+x^4}}dx.$
11. $\int_0 3x\sqrt{x^2+4a^2}dx, a > 0.$
12. $\int_3^4 \sqrt{x^2-2x-1}dx.$
13. $\int_1^{10} \frac{dx}{x\sqrt{x^2+x+1}}.$
14. $\int_0^a \sqrt{a^2-x^2}dx, a > 0$
15. $\int_0^1 x^2 \operatorname{arc\,tg} x dx.$
16. $\int_0^2 \frac{e^{2x}dx}{1+e^x}.$
17. $\int_0^1 xe^{-x}dx.$
18. $\int_1^2 x(x^2+1)e^{x^2}dx.$
19. $\int_{-2}^{-1} x^2e^{-2x}dx$
20. $\int_0^{\frac{1}{2}\pi} e^{2x}\sin^2 x dx.$
21. $\int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{dx}{1+\cos x}.$
22. $\int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{4dx}{3+5\cos x}.$
23. $\int_{-\frac{1}{2}\pi}^{\frac{1}{2}\pi} \cos^3 x dx.$
24. $\int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{dx}{(2+\sin x)^2}.$
25. $\int_{\frac{1}{3}\pi}^{\frac{1}{2}\pi} \frac{dx}{\sin x\sqrt{1+\cos x}}.$
26. $\int_{\frac{1}{6}\pi}^{\frac{1}{2}\pi} \frac{\cos x dx}{25+\sin^2 x}.$
27. $\int_{\frac{1}{2}\pi}^{\frac{2}{3}\pi} \frac{\cos^2 x}{\sin x}dx.$
28. $\int_0^{\frac{1}{2}\pi} (x+1)\cos x dx.$
29. $\int_0^{\frac{1}{4}\pi} \frac{\sin 2x}{\cos^3 x}dx.$
30. $\int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{\cos x}{\sqrt{1+\sin x}}dx.$
31. $\int_0^{\frac{1}{4}\pi} \frac{x dx}{\cos^2 x}.$

Zadanie 15.4. Obliczyć pole ograniczone odcinkami Ox od $x = 0$ do $x = a$, rzędną w punkcie $x = a$ oraz łukiem paraboli $y = x^2$. Jaką część pola prostokąta o wierzchołkach $(0,0)$, $(a,0)$, (a,a^2), $(0,a^2)$ stanowi obliczone pole?

Zadanie 15.5. Obliczyć pole zawarte pomiędzy parabolami $y = x^2$, $y^2 = x$.

Zadanie 15.6. Obliczyć pole zawarte pomiędzy parabolami $y^2 = x$, $x^2 = 8y$

Zadanie 15.7. Obliczyć pole zawarte pomiędzy liniami $y = x^3$, $y = 4x$

Zadanie 15.8. Obliczyć pole wspólnego obszaru ograniczonego krzywymi $y = 2x^2$, $y^2 = 4x$

Zadanie 15.9. Obliczyć pole wspólnego obszaru ograniczonego krzywymi $y = x^3$, $y^2 = x$

Zadanie 15.10. Obliczyć pole obszaru ograniczonego łukami parabol $y = x^2 - x - 6$ i $y = -x^2 + 5x + 14$.

Zadanie 15.11. Obliczyć pole obszaru ograniczonego parabolami $y^2 = 8x$, $8y = x^2$.

Zadanie 15.12. Obliczyć pole obszaru ograniczonego łukami paraboli $y^2 = 2x$ i okręgu $x^2 + y^2 - 4x = 0$.

Zadanie 15.13. Obliczyć pole wspólnego obszaru ograniczonego parabolami $y = x^2$, $y = \frac{1}{2}x^2$ i prostą $y = 3x$

Zadanie 15.14. Obliczyć pole obszaru ograniczonego parabolą $y = 2x - x^2$ i prostą $x + y = 0$.

Zadanie 15.15. W jakim stosunku parabola $y^2 = 2x$ dzieli pole koła $x^2 + y^2 = 8$.

Zadanie 15.16. Obliczyć pole zawarte pomiędzy hiperbolą $xy = 4$ a prostą $x + y = 5$.

Zadanie 15.17. Obliczyć pole wspólnej części wnętrza okręgu $(x-6)^2+y^2 = 36$ i paraboli $y^2 = 6x$.

Zadanie 15.18. Obliczyć pole ograniczone linią $y = x \sin 4x$, odcinkiem osi Ox w przedziale $0 \leqslant x \leqslant \frac{1}{8}\pi$ oraz rzędną w punkcie $x = \frac{1}{8}\pi$.

Zadanie 15.19. Obliczyć pole ograniczone linią $y = xe^{-2x}$, odcinkiem osi Ox w przedziale $0 \leqslant x \leqslant \frac{1}{2}$ i rzędną w punkcie $x = \frac{1}{2}$.

Zadanie 15.20. Obliczyć pole ograniczone linią $y = x \cos \frac{1}{3}x$, odcinkiem osi Ox w przedziale $\frac{1}{2}\pi \leqslant x \leqslant \pi$ i rzędnymi w punktach $x = \frac{1}{2}\pi$ i $x = \pi$