

Modelowanie matematyczne - zadania

Zadanie 1

Obliczyć $\int_{-\infty}^{\infty} t^2 \delta(t-2) dt$, gdzie $\delta(t)$ jest deltą Dirac'a.

Zadanie 2

Wyznaczyć odwrotną transformatę Laplace'a (funkcję czasu) dla następującej funkcji

$$y(s) = \frac{2s^2 - 3s + 1}{s^3 - 3s^2 + 6s - 4}$$

Zadanie 3

Obliczyć funkcję skokową Heaviside'a dla systemu o transmitancji postaci:

$$G(s) = \frac{1}{(s^2 - 4s + 5)^2}$$

Zadanie 4

Wyznaczyć $e^{\mathbf{A}t}$, gdzie \mathbf{A} jest macierzą postaci:

$$\begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 4 & -4 \end{bmatrix}$$

Wskazówka:

$$\begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 4 & -4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \frac{1}{2} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & -4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{1}{2} & 1 \end{bmatrix}$$

Zadanie 5

Wyznaczyć $e^{\mathbf{A}t}$, gdzie \mathbf{A} jest macierzą postaci:

$$\begin{bmatrix} -3 & 4 \\ 4 & -3 \end{bmatrix}$$

Zadanie 6

Znaleźć $e^{\mathbf{A}t}$, gdzie \mathbf{A} jest macierzą postaci:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Zadanie 7

Rozwiązać następujący układ równań różniczkowych zwyczajnych:

$$\frac{d\mathbf{y}(t)}{dt} = \mathbf{A}\mathbf{y}(t), \quad \mathbf{y}(t_0) = \begin{bmatrix} a_0 \\ b_0 \end{bmatrix}$$

dla

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$$

Zadanie 8

Wyznaczyć macierz fundamentalną układu równań różniczkowych zwyczajnych postaci:

$$\begin{aligned}\frac{dy_1(t)}{dt} &= -y_1(t) \\ \frac{dy_2(t)}{dt} &= -y_2(t) \\ \frac{dy_3(t)}{dt} &= 4y_3(t) \\ \frac{dy_4(t)}{dt} &= 4y_4(t)\end{aligned}$$

Zadanie 9

Wyznaczyć macierz fundamentalną układu równań różniczkowych zwyczajnych postaci:

$$\begin{aligned}\frac{dy_1(t)}{dt} &= -3 \sin t y_1(t) + 4 \sin t y_2(t) \\ \frac{dy_2(t)}{dt} &= -3 \sin t y_2(t)\end{aligned}$$

Zadanie 10

Dla układu równań różniczkowych zwyczajnych postaci:

$$\frac{d\mathbf{y}(t)}{dt} = \mathbf{A}\mathbf{y}(t) + \mathbf{b}, \quad \text{gdzie } \mathbf{A} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad \text{oraz } \mathbf{b} = \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

1. Znaleźć rozwiązanie równania jednorodnego.

Wskazówka: $\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{1}{2} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \frac{1}{2} & 1 \end{bmatrix}$

2. Znaleźć rozwiązanie równania niejednorodnego.