PROGRAMMATION LINÉAIRE

DUALITÉ

DUALITÉ - IDÉE GENERALE

UNE ENTREPRISE ❶ FABRIQUE n PRODUITS ET LE BÉNÉFICE PAR UNITÉ DU PRODUIT i EST c_i.

POUR FABRIQUER LES PRODUITS L'ENTREPRISE UTILISE m MATIÈRES PREMIÈRES, ET LA QUANTITÉ TOTALE DE MATIÈRES j EST b_j.

POUR UNITÉ DE PRODUIT i IL FAUT a_{ji} QUANTITÉ DE LA MATIÈRE j.

UNE ENTREPRISE ❷ PROPOSE DE RACHETER LES RESSOURCES DE ❶ POUR SA PROPRE PRODUCTION.

QUAND EST-CE QUE LA TRANSACTION PEUT SE FAIRE ?

QUAND ❶ NE PERD PAS À VENDRE SES MATIÈRES PREM!ERS PLUTÔT QUE DE FABRIQUER SES PRODUITS. DE PLUS ❷ VEUT PAYER LE PRIX LE PLUS BAS POSSIBLE.

ON POSE y_j LE PRIX PROPOSÉ PAR ❷ À ❶ PAR UNITÉ DE MATIÈRE j.

LES CONTRAINTES REPRÉSENTENT QUE POUR ❶ LE PRIX DE VENTE (PAR UNITÉ DE MATIÈRE) À ❷ EST PLUS ÉLEVÉ AU ÉGAL AU BÉNÉFICE POUR CHAQUE PRODUIT.

PROBLÈME PRIMAL

$$
\begin{array}{rcrcccrcccrl}
z = c_1x_1 & + & c_2x_2 & + & \dots & + & c_ix_i & + & \dots & + & c_nx_n & \rightarrow \max \\
a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & \dots & + & a_{1i}x_i & + & \dots & + & a_{1n}x_n & \leq b_1 \\
a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + & \dots & + & a_{2i}x_i & + & \dots & + & a_{2n}x_n & \leq b_2 \\
\dots & & & & & & & & & & & \\
a_{j1}x_1 & + & a_{j2}x_2 & + & \dots & + & a_{ji}x_i & + & \dots & + & a_{jn}x_n & \leq b_j \\
\dots & & & & & & & & & & & \\
a_{m1}x_1 & + & a_{m2}x_2 & + & \dots & + & a_{mi}x_i & + & \dots & + & a_{mn}x_n & \leq b_m \\
x_1 & , & x_2 & , & \dots & , & x_i & , & \dots & , & x_n & \geq 0
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{ccrl}
z & = & c^\top x & \rightarrow \max \\
& & Ax & \leq b \\
& & x & \geq 0
\end{array}
$$

PROBLÈME DUAL

$$
\begin{array}{lcccccccccccc}
w = & y_1 b_1 & + & y_2 b_2 & + & \dots & + & y_j b_j & + & \dots & + & y_m b_m & \to \min \\
& y_1 a_{11} & + & y_2 a_{21} & + & \dots & + & y_j a_{j1} & + & \dots & + & y_m a_{m1} & \geq c_1 \\
& y_1 a_{12} & + & y_2 a_{22} & + & \dots & + & y_j a_{j2} & + & \dots & + & y_m a_{m2} & \geq c_2 \\
& \dots & & & & & & & & & & & \\
& y_1 a_{1i} & + & y_2 a_{2i} & + & \dots & + & y_j a_{ji} & + & \dots & + & y_m a_{mi} & \geq c_i \\
& \dots & & & & & & & & & & & \\
& y_1 a_{1n} & + & y_2 a_{2n} & + & \dots & + & y_j a_{jn} & + & \dots & + & y_m a_{mn} & \geq c_n \\
& y_1 & , & y_2 & , & \dots & , & y_j & , & \dots & , & y_m & \geq 0
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{rcll}
w & = & y^\top b & \to \min \\
& & yA & \geq c \\
& & y & \geq 0
\end{array}
$$

DÉFINITION I DE LA DUALITÉ

SOIT UN PROBLÈME PRIMAL SOUS LA FORME CANONIQUE :

$$\begin{aligned} \max z = c^\top x \\ Ax \leq b \\ x \geq 0 \end{aligned}$$

AVEC $A_{m\times n},\ c_{1\times n},\ x_{n\times 1},\ b_{m\times 1}$,
ALORS LE PROBLÈME DUAL S'ÉCRIT :

$$\begin{aligned} \min w = y^\top b \\ yA \geq c \\ y \geq 0 \end{aligned}$$

AVEC $y_{m\times 1}$.

DÉFINITION 2 DE LA DUALITÉ

SOIT UN PROBLÈME PRIMAL SOUS LA FORME STANDARD :

$$\begin{aligned} \max z = c^\top x \\ Ax = b \\ x \geq 0 \end{aligned}$$

AVEC $A_{m\times n},\ c_{1\times n},\ x_{n\times 1},\ b_{m\times 1}$,

ALORS LE PROBLÈME DUAL S'ÉCRIT :

$$\begin{aligned} \min w = y^\top b \\ yA \geq c \\ y \text{ quelconque} \end{aligned}$$

AVEC $y_{m\times 1}$.

EXEMPLES

PROBLÈME PRIMAL	PROBLÈME DUAL
$\begin{aligned} z = 2x_1 + x_2 + 4x_3 &\to \max \\ x_1 + x_2 + 2x_3 &\leq 10 \\ 2x_1 + x_2 + x_3 &\leq 8 \\ x_1 &\geq 0, \\ x_2 &\geq 0, \\ x_3 &\geq 0 \end{aligned}$	$\begin{aligned} w = 10y_1 + 8y_2 &\to \min \\ y_1 + 2y_2 &\geq 2 \\ y_1 + y_2 &\geq 1 \\ 2y_1 + y_2 &\geq 4 \\ y_1 &\geq 0, \\ y_2 &\geq 0 \end{aligned}$
$\begin{aligned} z = 2x_1 + x_2 + 4x_3 &\to \max \\ x_1 + x_2 + 2x_3 &\leq 10 \\ 2x_1 + x_2 + x_3 &\geq 8 \\ x_1 &\geq 0, \\ x_2 &\geq 0, \\ x_3 &\geq 0 \end{aligned}$	$\begin{aligned} w = 10y_1 + 8y_2 &\to \min \\ y_1 + 2y_2 &\geq 2 \\ y_1 + y_2 &\geq 1 \\ 2y_1 + y_2 &\geq 4 \\ y_1 &\geq 0, \\ y_2 &\leq 0 \end{aligned}$
$\begin{aligned} z = 2x_1 + x_2 + 4x_3 &\to \max \\ x_1 + x_2 + 2x_3 &\leq 10 \\ 2x_1 + x_2 + x_3 &= 8 \\ x_1 &\geq 0, \\ x_2 &\geq 0, \\ x_3 &\geq 0 \end{aligned}$	$\begin{aligned} w = 10y_1 + 8y_2 &\to \min \\ y_1 + 2y_2 &\geq 2 \\ y_1 + y_2 &\geq 1 \\ 2y_1 + y_2 &\geq 4 \\ y_1 &\geq 0, \\ y_2 &\in \mathbb{R} \end{aligned}$

THÉORÈME DE DUALITÉ

SI LE PROBLÈME PRIMAL (DUAL) ADMET UNE SOLUTION OPTIMALE x^0 (y^0) ALORS LE PROBLÈME DUAL (PRIMAL) ADMET AUSSI UNE SOLUTION OPTIMALE y^0 (x^0) ET

$$z(x^0) = w(y^0)$$

SI LE PROBLÈME PRIMAL (DUAL) ADMET UNE SOLUTION NON BORNÉ ALORS LE PROBLÈME DUAL (PRIMAL) N'A PAS DE SOLUTION.

LE DUAL DU DUAL EST LE PRIMAL.

S'IL EXISTE UNE SOLUTION OPTIMALE, FINIE D'UN PROBLÈME PRIMAL (x^0) DANS LA BASE B, ALORS LA SOLUTION D'UN PROBLÈME DUAL S'ECRIT SOUS LA FORME SUIVANTE :

$$y^0 = [c^B]^\top \cdot B^{-1}$$

Analyse de sensibilité

Programmation linéaire

La fonction objectif :

$$f(x_1, x_2) = 3x_1 + 4x_2 \quad \rightarrow \quad \max$$

Les contraintes :

temps employé maximal
matière première
profit minimal

$$\begin{aligned} 1 \cdot x_1 + 2 \cdot x_2 &\leq 500 \\ 1 \cdot x_1 + 1 \cdot x_2 &\leq 350 \\ 2 \cdot x_1 + 1 \cdot x_2 &\geq 600 \\ x_1, x_2 &\geq 0 \end{aligned}$$

La solution optimale :

$$x_1 = 250,\ x_2 = 100,\ f(x_1, x_2) = 1150$$

$$s_1 = 50,\ s_2 = 0,\ s_3 = 0$$

Programmation linéaire

La forme canonique du problème :

$$\max_x [f(x)] = c^\top x = c_1 x_1 + \cdots + c_6 x_6$$

sous les contraintes :

$$Ax = b$$

$$x \geq 0$$

avec $A = \begin{pmatrix} p_1 & p_2 & p_3 & p_4 & p_5 & p_6 \end{pmatrix} = \begin{array}{c} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \\ \begin{matrix} & & * & * & & * \end{matrix} \end{array},$

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ s_1 \\ s_2 \\ s_3 \\ t_3 \end{pmatrix}, \quad c = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \\ c_4 \\ c_5 \\ c_6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ -M \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 500 \\ 350 \\ 600 \end{pmatrix}.$$

Programmation linéaire

Le tableau du simplex :

La solution optimale :

				3	4	0	0	0	-M		
N°	c^B	Base courante	Variables de la base	p_1	p_2	p_3	p_4	p_5	p_6	Valeurs des variables de la base	Critère de la sortie
				x_1	x_2	s_1	s_2	s_3	t_3		
	0	p_3	s_1	0	0	1	-3	-1	1	50	
	3	p_1	x_1	0	1	0	2	1	-1	250	
	4	p_2	x_2	1	0	0	-1	-1	1	100	
$\Delta_j = z_j - c_j$				0	0	0	5	1	M-1	1150	
						*	*		*		

Problème primal

$$f(x) = 3x_1 + 4x_2 \;\rightarrow\; \max$$

$$x_1 + 2x_2 \leq 500$$

$$x_1 + x_2 \leq 350$$

$$2x_1 + x_2 \geq 600$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

Problème dual

$$g(y) = 500y_1 + 350y_2 + 600y_3 \;\rightarrow\; \min$$

$$y_1 + y_2 + 2y_3 \geq 3$$

$$2y_1 + y_2 + y_3 \geq 4$$

$$y_1, y_2 \geq 0, y_3 \leq 0$$

Solution optimal du problème dual : $y^0 = [c^B]^\top \cdot B^{-1}$

Calcule de ...

...valeurs admissibles de vecteur b	...limites pour les coefficients c
$x^{B_0} = B_0^{-1} \cdot b \geq 0$	$c^B \cdot B_0^{-1} \geq 0$

Produit	Programme de la production	prix de vente		
		minimal	actuel	maximal
A			3	
B			4	

Contraintes	Variables d'écart $[s_i^0]$	Variables duales $[y_j^0]$	Limites		
			minimal	actuel	maximal
machines				500	
matières premières				350	
profit min				600	