Recherche Opérationnelle

dr Katarzyna Szulc-Kędzierska

pour

V[ème] semestre de
Gestion et Technologie
Année 2011/2012

Introduction

Recherche Opérationnelle c'est l'ensemble des méthodes et techniques rationnelles d'analyse et de synthèse de phénomènes d'organisation utilisable pour élaborer des meilleures décisions.

Autrement dit, il s'agit d'un ensemble de méthodes d'analyse scientifique (maths et info.) des phénomènes d'organisation qui traite de la **maximisation** d'un profit, d'une performance d'un rendement au bien de la **minimisation** d'un coût, d'une dépense.

La R.O. est avant tout un outil d'aide à la décision.

Introduction

Le schéma générale :

PROBLÈME CONCRET

↓

MODÉLISATION

↓

RESOLUTION PAR UNE MÉTHODE DE R.O.

↓

INTERPRETATION DES RÉSULTATS

↓

PRISE DE DÉCISION

Introduction

ÉCONOMIE

- économie d'entreprise
- analyse économique

Elaboration du modèle

INFORMATIQUE

- algorithmes
- structures de données
- bases de données

Traitement du modèle

RECHERCHE OPERATIONNELLE

aide à la décision

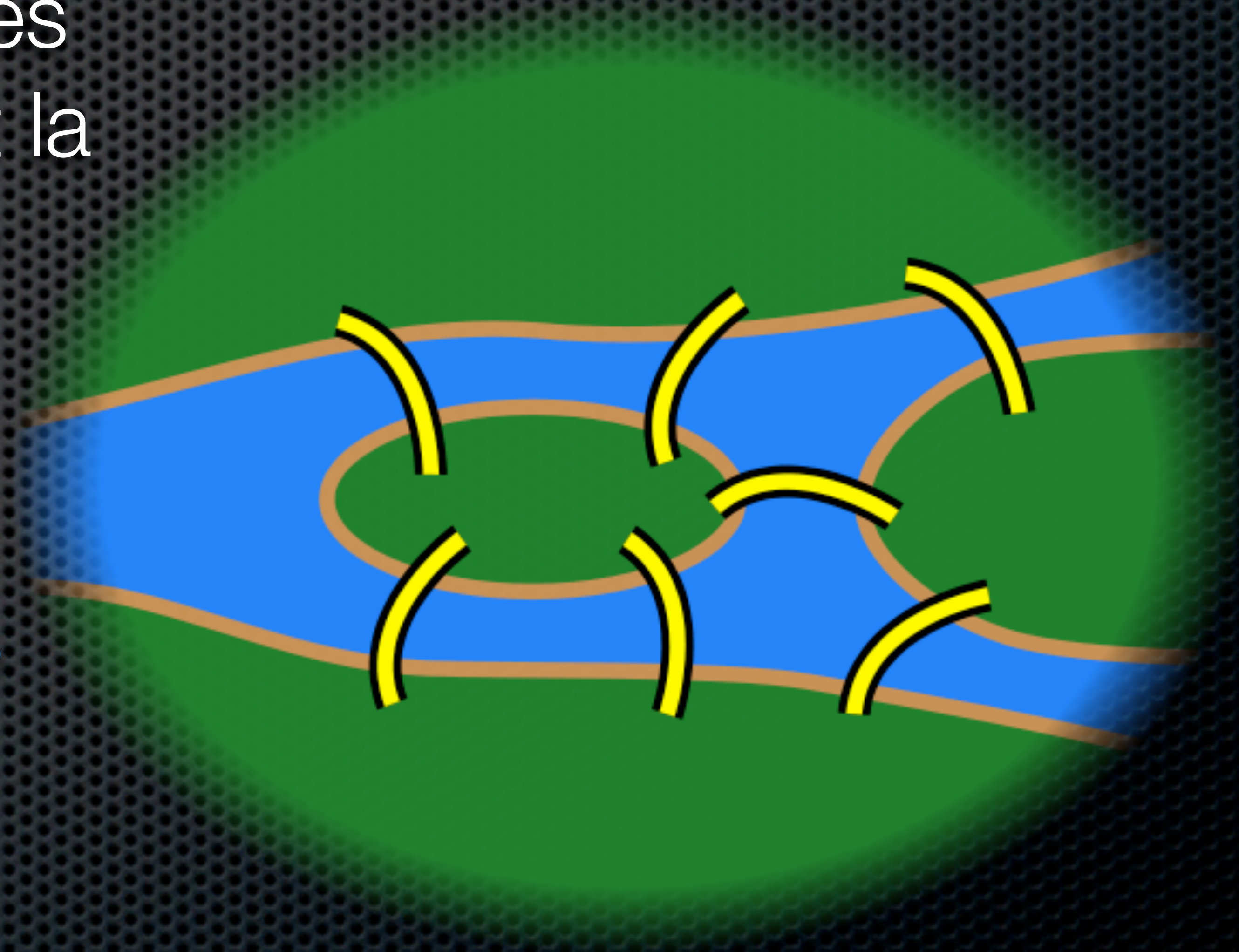
MATHÉMATIQUES

- théorie des systèmes
- méthodes d'optimisation
- méthodes statistiques

Queleques exemples et domaines d’applications de la R.O.

1. Un premier exemple : Les ponts de Königsberg (Euler 1735)

Deux îles de la ville sont reliées entre elle par 1 pont. D’autre part 6 autres ponts relient les îles à la ville. La question posée est la suivante : à partir d’un point de départ quelconque, existe-il un chemin passant une et une seule fois par chaque pont et qui revient au point de départ ?

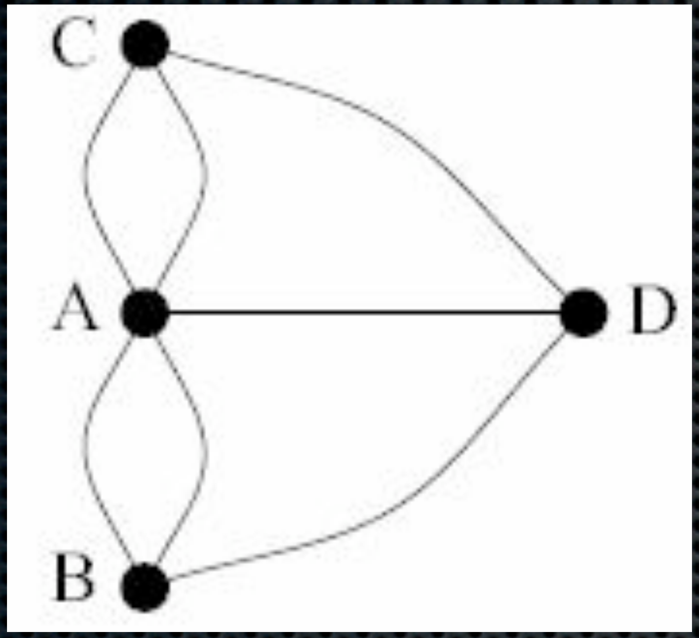


La reponse est NON.

Queleques exemples et domaines d’applications de la R.O.

1. Un premier exemple : Les ponts de Königsberg - suite

Le preuve utilise un graphe : les arrêtes du graphe représentent les ponts et les sommets correspondent aux differents endroits de la ville : les rives gauche et droite et les deux îles.



Supposons qu’un tel chemin existe. Un tel chemin est appelé chemin eulélien. Alors nécessairement en chacun de noeuds du graphe il y a toujours un nombre pair d’arêtes reliées au noeud : s’il y a une arête qui arrive au noeud, il y en a nécessairement une autre (différente) qui le quitte. Or, on constate que le graphe possèd des noeuds (tous en fait !) reliés à un nombre impair d'arêtes. Par conséquent, il n’existe pas de chemin eulérien

Queleques exemples et domaines d'applications de la R.O.

2. Un problème de production

Une entreprise fabrique plusieurs produits, ce qui exige des ressources particulières (matières premiers, machines, personnel...) en quantités limitées. Chaque produit rapporte un certain bénéfice (connu) à l'entreprise. Quelle produits l'entreprise doit-elle fabriquer et en quelle quantité pour réaliser le bénéfice total le plus élevé ?

Modélisation : Programmation linéaire

$$
\begin{aligned}
maxF(x) &= c^\top x = c_1x_1 + \dots c_nx_n \\
\begin{cases} Ax \\ x \end{cases} &\begin{aligned} &\leq b \\ &\geq 0 \end{aligned}
\end{aligned}
$$

Queleques exemples et domaines d'applications de la R.O.

3. Un problème de transport

Une entreprise dispose de plusieurs dépôts (D_i) contenant chacun un certain nombre de containers. Différents magasins (M_j) commandent des containers. On connaît le coût de transport de chaque dépôt aux magasins. Par exemple :

disponibilité dépôt

$$\begin{array}{c|ccc|c} & M_1 & M_2 & M_3 & \\ \hline D_1 & 5 & 3 & 4 & 8 \\ D_2 & 6 & 7 & 2 & 9 \\ \hline & 4 & 5 & 8 & \end{array}$$

demande magasins

Queleques exemples et domaines d'applications de la R.O.

3. Un problème de transport

Quelle est l'organisation des livraisons des containers pour minimiser le coût total de transport ?

Modélisation : Programmation linéaire en nombres entiers

	M_1	M_2	M_3	disponibilité dépôt
D_1	5	3	4	8
D_2	6	7	2	9
demande magasins	4	5	8	

Queleques exemples et domaines d'applications de la R.O.

4. Un problème d'affectation

n tâches doivent être affectées à n machines (une tâche par machine). Le coût d'exécution de chaque tâche par chacune des machines est connu. Trouver l'affectation qui minimise le coût total.

Modélisation : Flot maximal à travers un graphe

Queleques exemples et domaines d’applications de la R.O.

5. Un problème de voyager de commerce

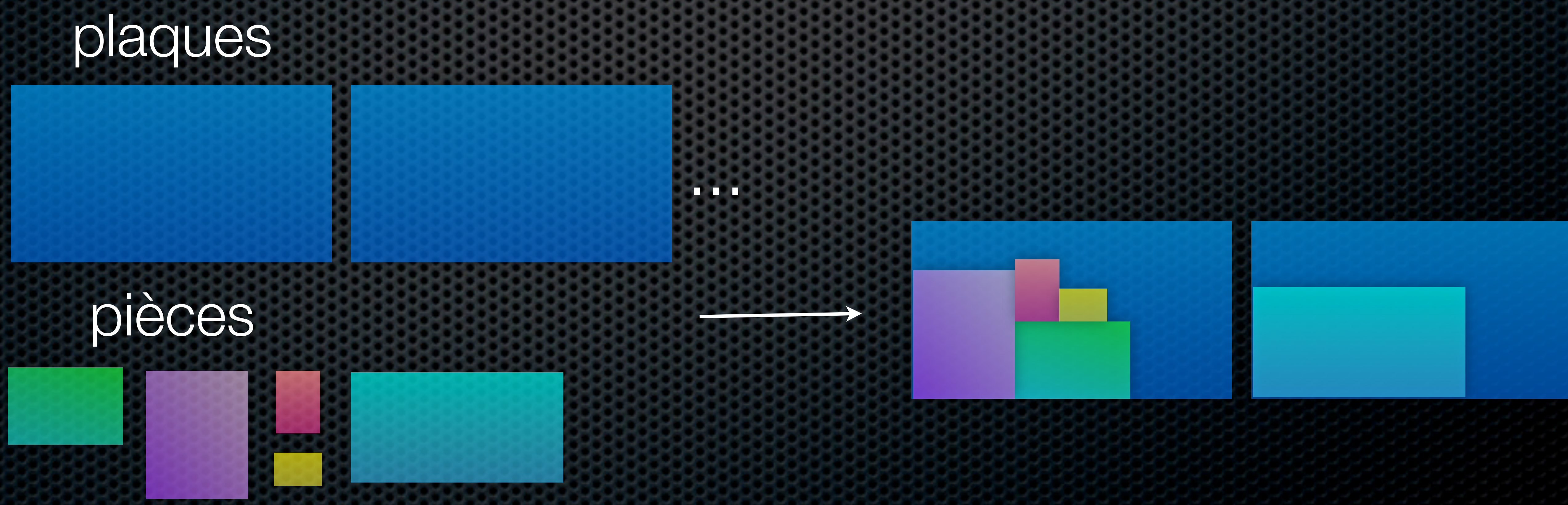
Un voyager de commerce doit visiter n villes. La distance etre chaque ville est donnée. Trouver le plus court trajet passant par les n villes.

Modélisation : Programmation dynamique

Queleques exemples et domaines d'applications de la R.O.

6. Placement optimale de pieces 2D (Bin Packing)

On dispose de plaques rectangulaires toutes identiques dans lesquelles on veut placer des pièces rectangulaires sans chevauchement. Les pièces à placer ont des dimensions différentes. Trouver le placement pour minimiser le nombre de plaques utilisées.



Formalisation

On cherche à maximiser une fonction f sur un ensemble X donné :

$$\max\{f(x), x \in X\}$$

- $f : X \to R$ est la fonction objectif
- X est l'ensemble des solutions possibles, réalisables

$$\min f = -\max(-f)$$

Contenu du cours

1. Programmation linéaire :
   - aspects géometrique
   - methodes du simplex
   - dualité
   - analyse de sensibilité

Eléments de bibliographie

[1] Précis de recherche opérationnelle. Méthodes et exercices d'application - Faure, Lemaire, Picouleau, 2008 - ouvrage de références, un "classique".

[2] Méthodes et modèles de la recherche opérationnelle : les mathematiques de l'entreprise, Vol.1,2 - Kaufmann - Edition Dunod, 1968, 1970.

[3] Exercices et problèmes de recherche opérationnelle - Desbazeille, Faure - Dunod, 1972.


1969
C'EST QUOI CES NOTES ?
2 3 1 0
2009
C'EST QUOI CES NOTES ?
2 3 0
CHAUNU

Programmation linéaire

Exemple d’un problème de production :

Une usine fabrique deux produit A et B.

Le prix de vente d’une unité de produit A est 3€ et d’une de B est 4€.

Le temps employé pour produire une unité de produit A est une minute et pour produire une unité de produit B est 2 minutes, le temps maximale est limité et il ne peut pas dépasser 500 mins.

L’usine utilise aussi un nombre limité, 350 kg de matières propres.

La consommation de matières propres est la même pour les deux produits : 1 kg par unité.

L’usine est intéressée de tel plan de la fabrication journalière qui donne le profit minimale 600€. Le profit minimale pour unité de produit A est égale à 2€ est de produit B à 1€.

On se pose le problème de repartir la capacité de production entre les deux produits, de manière à maximiser la valeur de la production en prix de vente.

Programmation linéaire

La fonction objectif :

$$f(x_1, x_2) = 3x_1 + 4x_2 \quad \rightarrow \quad \max$$

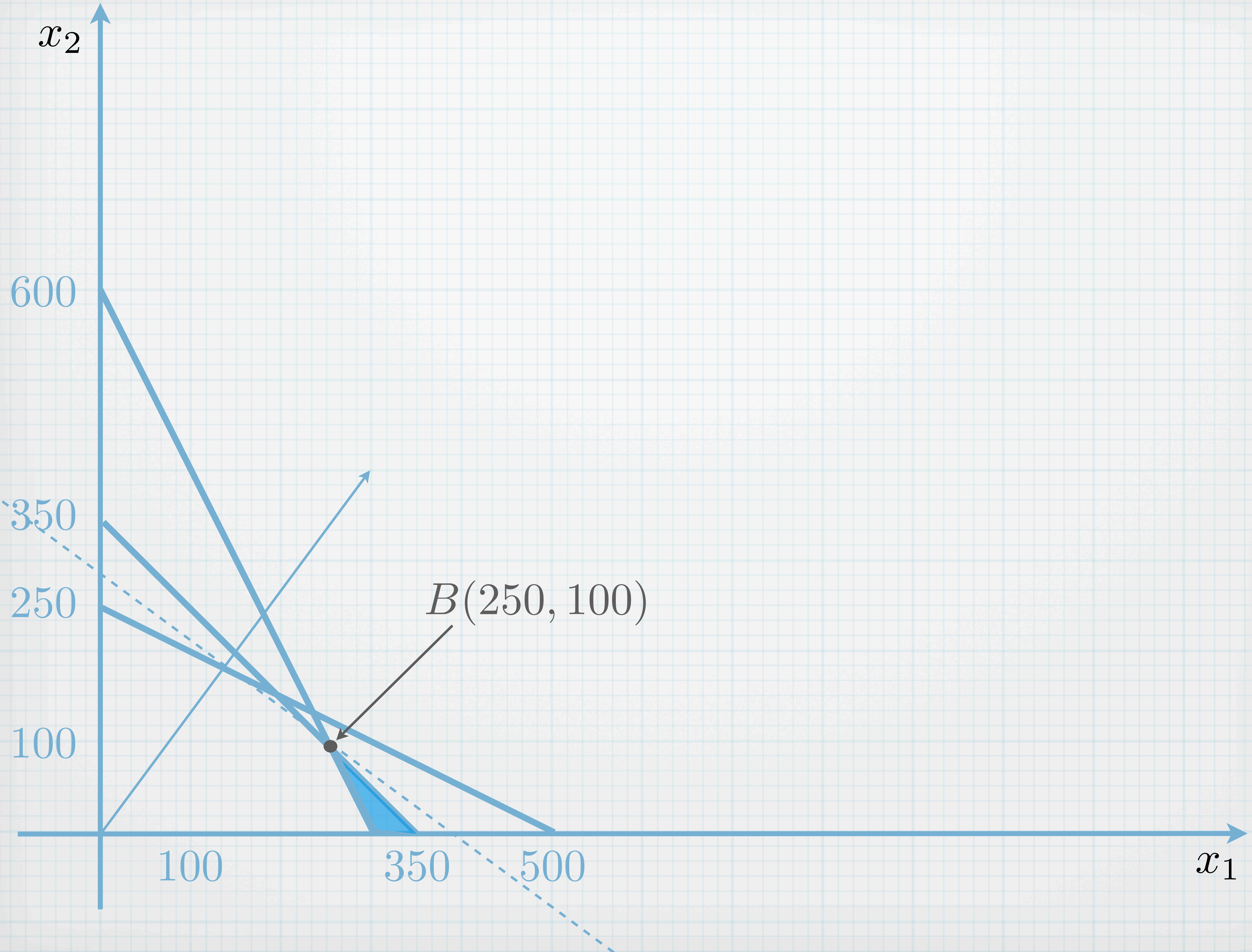
Les contraintes :

temps employé maximal $$1 \cdot x_1 + 2 \cdot x_2 \leq 500$$

matière première $$1 \cdot x_1 + 1 \cdot x_2 \leq 350$$

profit minimal $$2 \cdot x_1 + 1 \cdot x_2 \geq 600$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$



x_2
600
350
250
100
$B(250, 100)$
100
350
500
x_1

Programmation linéaire

La forme standard du problème :

$$\begin{array}{rrrrrrcl}
3x_1 & +4x_2 & +0s_1 & +0s_2 & +0s_3 & -Mt_3 & \rightarrow & \max \\
x_1 & +2x_2 & +s_1 & & & & = 500 & \\
x_1 & +x_2 & & +s_2 & & & = 350 & \\
2x_1 & +x_2 & & & -s_3 & +t_3 & = 600 & \\
x_1, & x_2, & s_1, & s_2, & s_3, & t_3 & \geq 0 &
\end{array}$$

Programmation linéaire

La forme canonique du problème :

$$\max_x [f(x)] = c^\top x = c_1 x_1 + \cdots + c_6 x_6$$

sous les contraintes :

$$Ax = b$$

$$x \geq 0$$

avec $A = (p_1 \quad p_2 \quad p_3 \quad p_4 \quad p_5 \quad p_6) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix},$

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ s_1 \\ s_2 \\ s_3 \\ t_3 \end{pmatrix}, \quad c = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \\ c_4 \\ c_5 \\ c_6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ -M \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 500 \\ 350 \\ 600 \end{pmatrix}.$$

Programmation linéaire

Le tableau du simplex :

La solution optimale :

				3	4	0	0	0	-M		
N°	c^B	Base courante	Variables de la base	p_1	p_2	p_3	p_4	p_5	p_6	Valeurs des variables de la base	Critère de la sortie
				x_1	x_2	s_1	s_2	s_3	t_3		
	0	p_3	s_1	0	0	1	-3	-1	1	50	
	3	p_1	x_1	0	1	0	2	1	-1	100	
	4	p_2	x_2	1	0	0	-1	-1	1	250	
$\Delta_j = z_j - c_j$				0	0	0	5	1	M-1	1150	