FUNKCJE TWORZĄCE

Nieskończony ciąg liczbowy:

$$a_0, a_1, a_2, ..., a_k, ...$$

formalnie reprezentujemy *szeregiem potęgowym* $\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$:

$A(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$ - formalne przypisanie ciągowi funkcji analitycznej $A(x)$ (jeśli szereg potęgowy jest zbieżny)

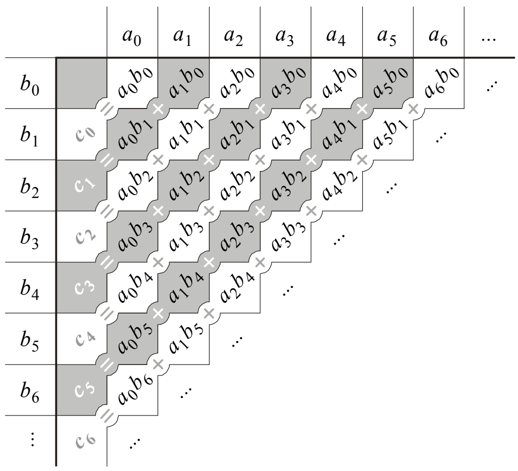
A(x) – funkcja tworząca ciągu $a_0, a_1, a_2, ..., a_k, ...$

Definiujemy operacje na szeregach, aby manipulować ciągami:

dla $A(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$ i $B(x) = \sum_{k=0}^{\infty} b_k x^k$ definiujemy

- **dodawanie**: $A(x) + B(x) = \sum_{k=0}^{\infty} (a_k + b_k) x^k$
- **mnożenie przez liczbę**: $p \cdot A(x) = \sum_{k=0}^{\infty} p \cdot a_k x^k$
- **iloczyn Cauchy'go**: $A(x) \cdot B(x) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k$, gdzie $c_k = a_0 b_k + a_1 b_{k-1} + ... + a_k b_0 = \sum_{i=0}^{k} a_i b_{k-i}$;

  ciąg $c_0, c_1, c_2, ..., c_k, ...$ nazywamy **splotem** ciągów a_k i b_k



- jeżeli $a_k = 0$ dla $k > n$, to funkcja tworząca ciągu jest wielomianem $A(x) = a_0 + a_1 x + ... + a_n x^n$
- jeśli szereg $\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$ jest zbieżny w pewnym otoczeniu zera, to jego suma $A(x)$ jest funkcją analityczną w tym otoczeniu oraz zachodzi $a_k = \frac{A^{(k)}(0)}{k!}$ dla $k = 0, 1, 2, ...$; gdzie $A^{(k)}(0)$ jest wartością k-tej pochodnej funkcji $A(x)$ dla $x = 0$

$\Downarrow$

szereg $\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$ jest rozwinięciem funkcji $A(x)$ w *szereg Maclaurina*

Utożsamiamy formalną reprezentację ciągu w postaci szeregu $\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$ z funkcją analityczną $A(x)$ określaną przez ten szereg, np. $\sum_{k=0}^{\infty} x^k = \frac{1}{1-x}$ lub $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} x^k = e^x$

Przykłady funkcji tworzących dla różnych ciągów

1. ciąg współczynników dwumiennych dla ustalonego n:
   $\binom{n}{0}, \binom{n}{1}, \binom{n}{2}, ..., \binom{n}{n}, 0, 0, ...$; funkcja tworząca: $\sum_{k=0}^{\infty}\binom{n}{k}x^k = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^k = (1+x)^n$
2. ciąg: $1, -1, 1, -1, ..., (-1)^k, ...$; funkcja tworząca: $\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k x^k = \sum_{k=0}^{\infty}(-x)^k = \frac{1}{1+x}$
3. ciąg: $1, 2, 4, 8, ..., 2^k, ...$; funkcja tworząca: $\sum_{k=0}^{\infty}2^k x^k = \sum_{k=0}^{\infty}(2x)^k = \frac{1}{1-2x}$
4. ciąg: $0, 1, 2, 3, ...$; funkcja tworząca: $\sum_{k=0}^{\infty}k\,x^k = x\sum_{k=0}^{\infty}k\,x^{k-1} = x\frac{d}{dx}\sum_{k=0}^{\infty}x^k = x\frac{d}{dx}\frac{1}{1-x} = \frac{x}{(1-x)^2}$

Funkcje tworzące dla liczby podzbiorów *k*-elementowych

$$\begin{array}{llll}
\text{Zbiór}\quad X = & \{\, a_1, & a_2, \quad ..., & a_n \,\} \\
& \downarrow & \downarrow & \downarrow \\
& (1+x)\cdot & (1+x)\cdot \;...\; \cdot & (1+x) \;=\; (1+x)^n = \sum_{k=0}^{\infty}\binom{n}{k}x^k \\
& \downarrow & \downarrow & \downarrow \\
& (x^0+x^1)\cdot & (x^0+x^1)\cdot ... \cdot & (x^0+x^1)
\end{array}$$

podzbiór zbioru X jest wyznaczony przez podanie czy dany element a_k ($k = 1, ..., n$) jest w nim zawarty, czy nie:

$x^0 = 1$ – odpowiada pominięciu danego elementu (zero wystąpień)

$x^1 = x$ – odpowiada wystąpieniu danego elementu (jeden raz)

Podzbiór jest k-elementowy $\leftrightarrow$ w k czynnikach wybrano składnik x^1

Przykład dla zbioru z powtórzeniami

$$\begin{array}{llll}
Z = & < 3{*}a_1, & 1{*}a_2, & 2{*}a_3 > \\
& \downarrow & \downarrow & \downarrow
\end{array}$$

$$(1 + x + x^2 + x^3) \cdot (1 + x) \cdot (1 + x + x^2) = A(x) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k$$

c_k – liczba podzbiorów k-elementowych zbioru Z ; $A(x) = 1 + 3x + 5x^2 + 6x^3 + 5x^4 + 3x^5 + x^6$

$\Rightarrow$ 1 podzbiór pusty, 3 podzbiory jednoelementowe, 5 podzbiorów dwuelementowych, 6 podzbiorów trzyelementowych itd.

Przy konstrukcji funkcji tworzącej dla liczby podzbiorów k-elementowych zbioru z powtórzeniami można nakładać <u>dodatkowe</u> warunki na liczbę wystąpień elementu a_i

Przykłady dodatkowych warunków dla zbioru z powtórzeniami

1. element a_i musi wystąpić przynajmniej raz:
   czynnik odpowiadający elementowi a_i – $(x + x^2 + x^3 + ...) = \frac{x}{1-x}$
2. element a_i nie występuje lub występuje parzystą liczbę razy:
   czynnik odpowiadający elementowi a_i – $(1 + x^2 + x^4 + ...) = \frac{1}{1-x^2}$

3. element a_i występuje nieparzystą liczbę razy:

   czynnik odpowiadający elementowi a_i $-\ (x + x^3 + x^5 + ...) = \dfrac{x}{1-x^2}$

4. element a_i występuje dowolną liczbę razy (brak warunków):

   $A(x) = (1 + x + x^2 + ...) \cdot ... \cdot (1 + x + x^2 + ...) = \dfrac{1}{1-x} \cdot ... \cdot \dfrac{1}{1-x} = \dfrac{1}{(1-x)^n}$

Funkcja tworząca dla ciągu liczb Fibonacciego

Równanie rekurencyjne dla liczb Fibonacciego: $F_{n+1} = F_n + F_{n-1}$
z warunkami początkowymi: $F_0 = F_1 = 1$
daje ciąg liczb 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, ...

Jak pozbyć się definicji rekurencyjnej?

Funkcja tworząca $F(x)$ dla ciągu liczb Fibonacciego $F_0, F_1, F_2, ...$ spełnia następujące równanie wynikające z definicji rekurencyjnej:

$$F(x) = \sum_{k=0}^{\infty} F_k x^k = 1 + 1\cdot x + \sum_{k=2}^{\infty}\left(F_{k-1} + F_{k-2}\right)x^k = 1 + x + x\cdot \sum_{k=2}^{\infty} F_{k-1}x^{k-1} + x^2\cdot \sum_{k=2}^{\infty} F_{k-2}x^{k-2} =$$

$$= 1 + x + x\cdot(F(x) - 1) + x^2\cdot F(x) \,,$$

czyli $F(x) = 1 + x + x\cdot(F(x) - 1) + x^2\cdot F(x) = 1 + (x + x^2)\cdot F(x)$ i stąd $F(x) = \dfrac{1}{1-x-x^2}$

W postaci iloczynowej $1 - x - x^2 = (1 - a\cdot x)(1 - b\cdot x)$, gdzie $a = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$ i $b = \dfrac{1-\sqrt{5}}{2}$

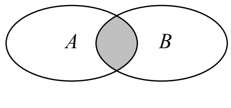
Zatem $F(x) = \dfrac{1}{(1-ax)(1-bx)} = \dfrac{1}{a-b}\left(\dfrac{a}{1-ax} - \dfrac{b}{1-bx}\right) = \displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \dfrac{a^{k+1} - b^{k+1}}{a-b} x^k$

Ostatecznie: $F_k = \dfrac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{k+1} - \left(\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{k+1}\right]$, dla $k = 0, 1, 2, ...$

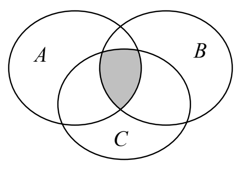
Analogiczne podejście z zastosowaniem funkcji tworzącej można stosować dla innych równań rekurencyjnych definiujących ciągi szczególnych liczb, w których występują stałe współczynniki:
$a_n = A_1\cdot a_{n-1} + A_2\cdot a_{n-2} + ... + A_k\cdot a_{n-k}$ dla $n \ge k$, gdzie k i $A_1, A_2, ..., A_k$ są ustalone,
oraz dane są warunki początkowe przez określenie wartości $a_0, a_1, a_2, ..., a_{k-1}$

ZASADA WŁĄCZANIA–WYŁĄCZANIA

$| A \cup B | = | A | + | B | - | A \cap B |$



$| A \cup B \cup C | = | A | + | B | + | C | - | A \cap B | - | A \cap C | - | B \cap C | + | A \cap B \cap C |$



Dany jest zbiór X i rodzina podzbiorów zbioru X: $A_1, A_2, ..., A_n$
Jak należy wyznaczać $| A_1 \cup A_2 \cup ... \cup A_n |$?

$+ \qquad |A_1| + |A_2| + \ldots + |A_n|$

$- \qquad \sum_{1\le i<j\le n} |A_i \cap A_j|$

$+ \qquad \sum_{1\le i<j<k\le n} |A_i \cap A_j \cap A_k|$

$- \qquad \ldots$

$\ldots$

<u>Twierdzenie</u> (zasada włączania-wyłączania)

$$\left|\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right| = \sum_{i=1}^{n} |A_i| - \sum_{1\le i<j\le n} |A_i \cap A_j| + \sum_{1\le i<j<k\le n} |A_i \cap A_j \cap A_k| - \ldots + (-1)^{n-1} |A_1 \cap \ldots \cap A_n|$$

<u>Dowód</u> (indukcja względem n)

Dla $n = 1$ twierdzenie jest prawdziwe. Załóżmy, że jest prawdziwe dla pewnego n, tzn.

$$\left|\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right| = \sum_{i=1}^{n} |A_i| - \sum_{1\le i<j\le n} |A_i \cap A_j| + \ldots + (-1)^{n-1} |A_1 \cap \ldots \cap A_n|$$

Dla zbioru $\bigcup_{i=1}^{n} A_i \cap A_{n+1}$ zachodzi

$$\left|\bigcup_{i=1}^{n} A_i \cap A_{n+1}\right| = \sum_{i=1}^{n} |A_i \cap A_{n+1}| - \sum_{1\le i<j\le n} |A_i \cap A_j \cap A_{n+1}| + \ldots + (-1)^{n-1} |A_1 \cap \ldots \cap A_n \cap A_{n+1}|$$

Stąd $\left|\bigcup_{i=1}^{n+1} A_i\right| = \left|\bigcup_{i=1}^{n} A_i \cup A_{n+1}\right| = \left|\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right| + |A_{n+1}| - \left|\bigcup_{i=1}^{n} A_i \cap A_{n+1}\right| = = \sum_{i=1}^{n+1} |A_i| - \sum_{1\le i<j\le n+1} |A_i \cap A_j| + \ldots$

$+ (-1)^{n} |A_1 \cap \ldots \cap A_n \cap A_{n+1}|$ ■

Przykłady zastosowania zasady włączania-wyłączania

Zbadano 50 samochodów wykonując testy na poziom zawartości trzech grup zanieczyszczeń: NO_x, HC, CO;

1 samochód nie spełnia żadnej z trzech norm, 3 samochody przekroczyły poziom NO_x i HC, 2 samochody przekroczyły poziom NO_x i CO, 1 samochód przekroczył poziom HC i CO, 6 samochodów ma zbyt wysoki poziom NO_x, 4 samochody maja zbyt wysoki poziom HC a 3 samochody maja zbyt wysoki poziom CO.

Ile samochodów spełnia wszystkie testowane normy?

A_1 – zbiór samochodów o przekroczonym poziomie NO_x

A_2 – zbiór samochodów o przekroczonym poziomie HC

A_3 – zbiór samochodów o przekroczonym poziomie CO

$|A_1| = 6, \quad |A_2| = 4, \quad |A_3| = 3$

$|A_1 \cap A_2| = 3, \qquad |A_1 \cap A_3| = 2, \qquad |A_2 \cap A_2| = 1, \qquad |A_1 \cap A_2 \cap A_3| = 1$

zbiór samochodów, które nie spełniają co najmniej jednej z norm = $A_1 \cup A_2 \cup A_3$

$|A_1 \cup A_2 \cup A_3| = 6 + 4 + 3 - 3 - 2 - 1 + 1 = 8$

| zbiór tych, które spełniają | = 50 – 8 = 42