Rankingi osiągnięć: od piłki nożnej do nauki

Jan Lasek

Seminarium *Statystyka i Analiza Danych*, 2013
Instytut Badań Systemowych PAN

Plan prezentacji

- Rankingi w piłce nożnej
  - istotność rankingów
  - przegląd i porównianie modeli
  - wnioski
- Rankingi w nauce
  - podejście klasyczne
  - podejście rozmyte
- Podsumowanie

Istotność rankingów

- Przydają się do planowania równych i ciekawych meczy
- Rozstawienia drużyn
- Według oficjalnych rankingów rząd Wielkiej Brytaniii przyznaje pozwolenia na pracę (2006)

Oficjalny ranking FIFA

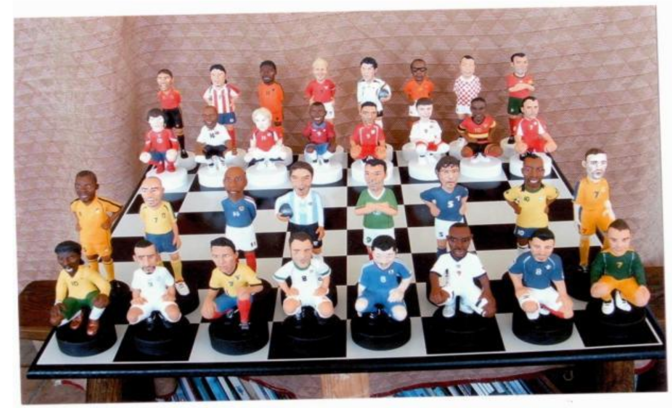
- Wprowadzony po Mistrzostwach Świata 2006
- Drużynom są przyznawane punkty według wzoru:

$$Punkty = P \times M \times S \times K$$

Gdzie

- **p**unkty za wynik (0, 1, 2, 3)
- stawka **m**eczu (1, 2.5 , 3 or 4)
- **s**iła przeciwnika = max(200 – pozycja, 50)
- średnia siła **k**onfederacji [0.85, 1]

System ratingu Elo



- Eloratings.net
- Oficjalny Ranking FIFA Kobiet
- Prosta reguła zmian:

$$R_{nowy} = R_{stary} + K(Wynik \ - Przewidywania)$$

- Liczenie oczekiwanego wyniku:

$$P(i) = \frac{1}{1 + 10^{-(r_i + h - r_j)}}$$

- Oceny trzeba zainicjalizować *(prior ratings)*

Doskonalenie systemu Elo

- model Elo++ – zwycięzca konkursu Kaggle.com dotyczącego rankingowania szachistów

Znajdź oceny r_i minimalizujące funkcję kosztu

$$\sum_{mecze} w(s-p)^2 + \lambda \sum_{drużyny} (r-a)^2$$

w – *waga związana z czasem*

s, p – *wynik oraz przewidywania*

a – *średni ocena przeciwników*

Oceny najmniejszych kwadratów

- Zakładamy, że różnica w liczbie strzelonych goli y_{ij} jest proporcjonalna do różnicy w siłach drużyn:

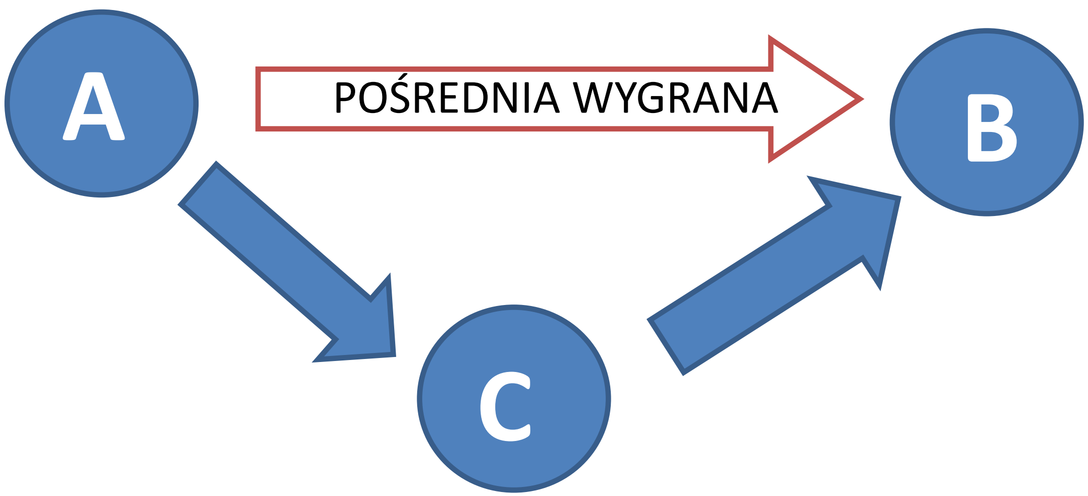
$$y_{ij} = r_i - r_j + \varepsilon$$

- Możemy rónież wprowadzić dodatkowy parametr odpowiedzialny za przewagę gospodarza

$$y_{ij} = r_i + h - r_j + \varepsilon$$

Oceny społecznościowe

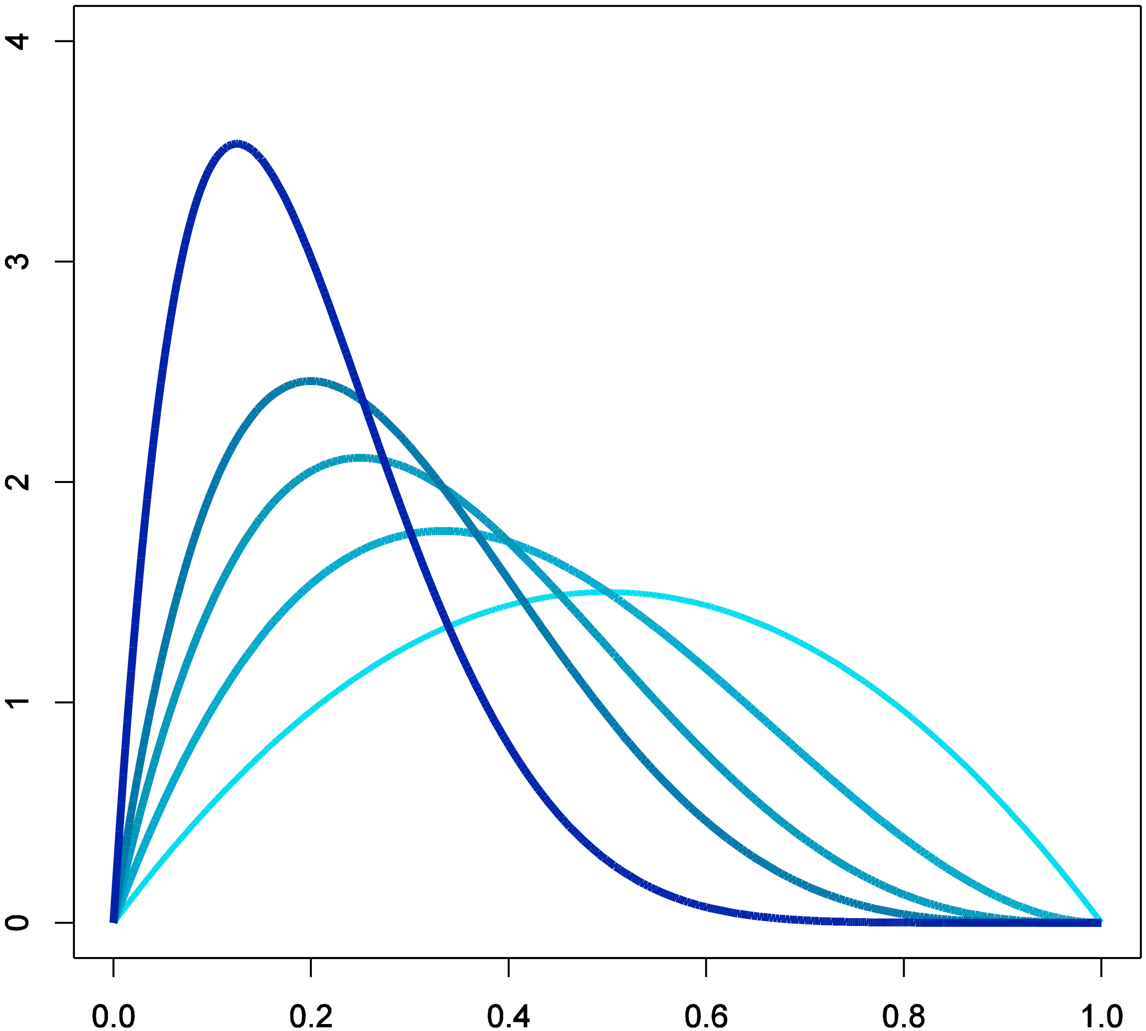
- Początkowo użyte do ustalenia relatywnej ważności aktorów w sieci społecznościowej poprzez liczbę bezpośrednich i pośrednich kontaktów
- Bazuje na intuicyjnej zasadzie – kibice dyskutują, która drużyna jest lepsza. Ich ekipy nie grały ze sobą, ale grały z trzecią drużyną C – jedna z nich wygrywając a druga przegrywając swój mecz



Oceny markowowskie

- Rozważamy „niedzielnego kibica”, który kibicuje wygrywającym drużynom lub tym, które strzelają wiele bramek
- Dodatkowo zakładamy, że zapomina o przeszłości
- Jego zachowanie możemy zamodelować przy pomocy łańcucha Markowa
- Podobny pomysł jest zastosowany w algorytmie *PageRank* do ratingowania stron internetowych

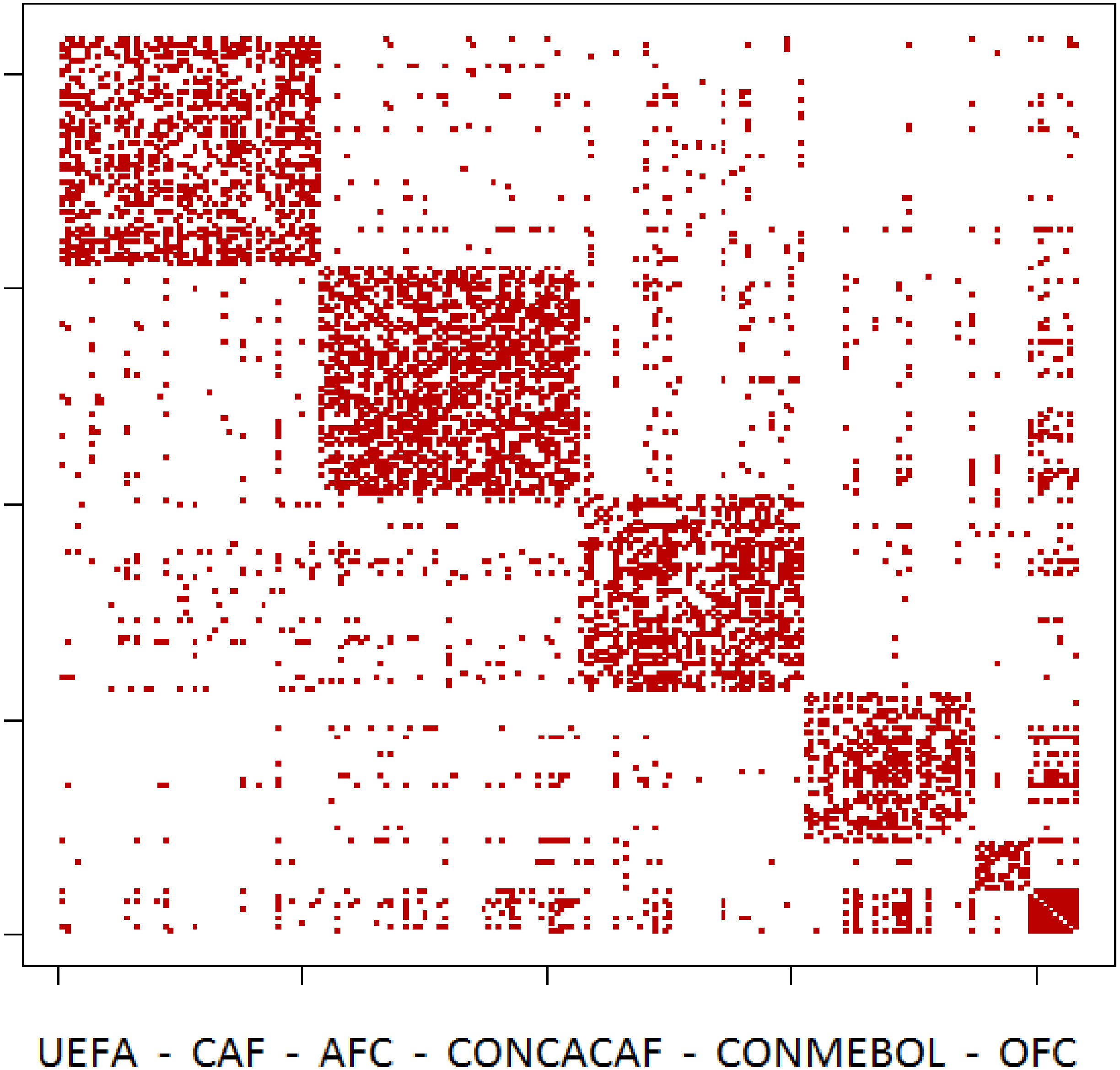
Prawdopodobieństwa preferencji



$$\frac{Wins_A + 1}{Wins_A + Wins_B + 2}$$

$$\frac{Goals_A + 1}{Goals_A + Goals_B + 2}$$

Terminarz gier – macierz sąsiedztwa



Porównanie modeli

- Funkcja predykcji jak w modelu Elo

$$P(i) = \frac{1}{1 + e^{-a(r_i - r_j) - h}}$$

- Ocena jakości predykcji na podstawie 979 meczy

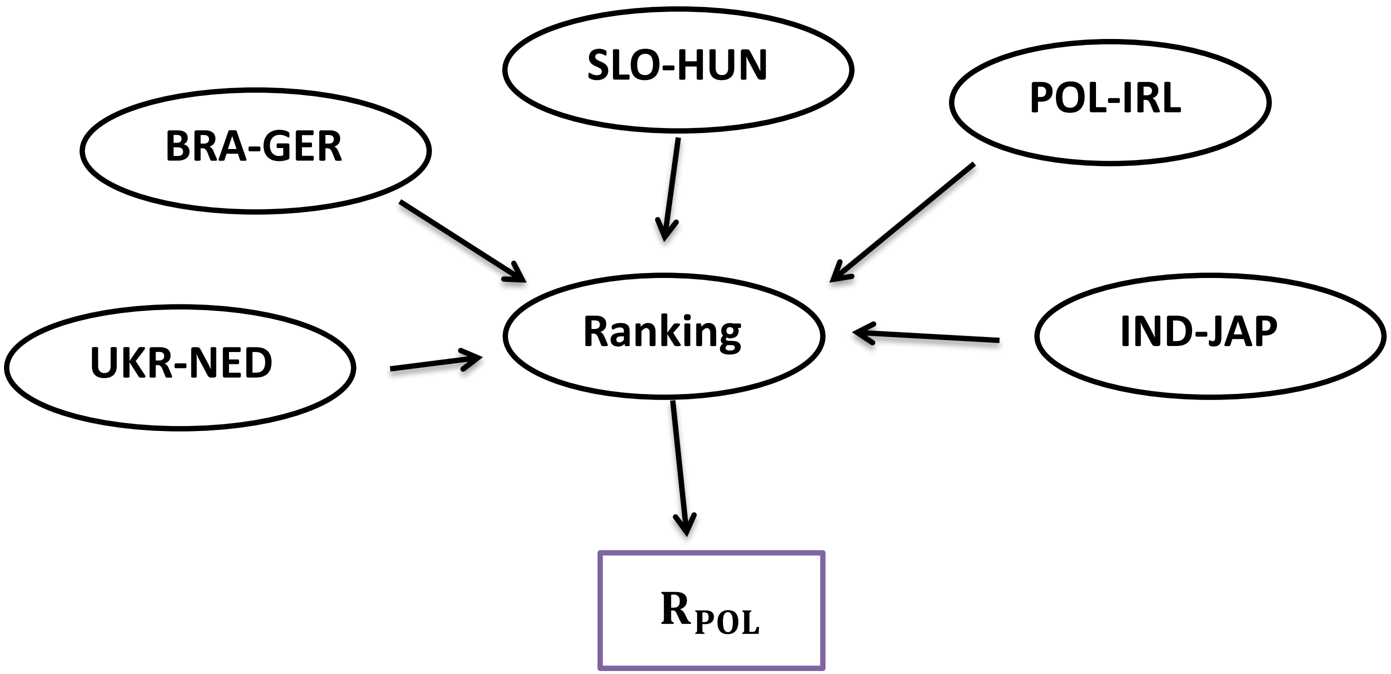
$$-[s_i \log(p_i) + (1 - s_i) \log(1 - p_i)]$$

$$(s_i - p_i)^2$$

Ranking	LogLik	90% przedział ufn.	BSK	90% przedział ufn.
FIFA wydania	1.3705	(1.3504, 1.3905)	0.1450	(0.1250, 0.1651)
FIFA dzienne	1.3681	(1.3481, 1.3880)	0.1443	(0.1244, 0.1643)
Elo WWR 1500	1.3698	(1.3498, 1.3898)	0.1447	(0.1246, 0.1647)
Elo WWR FIFA06	**1.2674**	**(1.2489, 1.2861)**	**0.1268**	**(0.1081, 0.1455)**
Elo WWR FIFA06 01	1.2934	(1.2744, 1.3123)	0.1302	(0.1113, 0.1492)
Elo ratings.net 1500	1.3265	(1.3070, 1.346)	0.1370	(0.1176, 0.1565)
Elo ratings.net FIFA06	1.2811	(1.2624, 1.2999)	0.1280	(0.1092, 0.1468)
Elo ratings.net	**1.2634**	**(1.2446, 1.2821)**	**0.1271**	**(0.1084, 0.1458)**
Elo++ (λ, h) = (0.05, 0.5)	1.2880	(1.2690, 1.3069)	0.1305	(0.1115, 0.1494)
MNK	1.2786	(1.2597, 1.2975)	0.1288	(0.11, 0.1477)
MNK *HTA*	1.2681	(1.2493, 1.2869)	0.1272	(0.1085, 0.146)
Społecznościowe	1.4224	(1.4018, 1.4431)	0.1540	(0.1333, 0.1746)
Markow *Wygrane*	1.3588	(1.3391, 1.3786)	0.1406	(0.1209, 0.1604)
Markow *Gole*	1.3541	(1.3344, 1.3738)	0.1399	(0.1202, 0.1595)
PowerRank.com	1.2862	(1.2672, 1.3053)	0.1305	(0.1115, 0.1496)
Ensemble	**1.2358**	**(1.2174, 1.2543)**	**0.1223**	**(0.1038, 0.1407)**
Remisy	1.5960		0.1902	

Kontynuacja

- Ranking FIFA nie „rodziela” punktów adekwatnie
- Możemy próbować wyeksploatować obciążenie metody w celu maksymalizacji pozycji w rankingu



Rankingi w nauce (i nie tylko)

Problem ogólny:

$\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, \dots, x_k) \in \mathbb{I}^{1,2,\dots} = \bigcup_{n=1}^{\infty} \mathbb{I}^n$, $x_i \geq x_{i+1}$,

Gdzie $\mathbb{I} = [0, \infty)$, a $\boldsymbol{x}$ jest wektorem cytowań, jakością wyrobów fabrycznych, „like'ów" na Facebooku, etc.

Zadania:

1) Zdefiniować relację preferencji $\boldsymbol{x} \trianglelefteq \boldsymbol{y}$
2) Zaproponować funkcję wpływu F, zgodny z (częściowym) porządkiem indukowanym przez $\trianglelefteq$

Minimalne wymagania

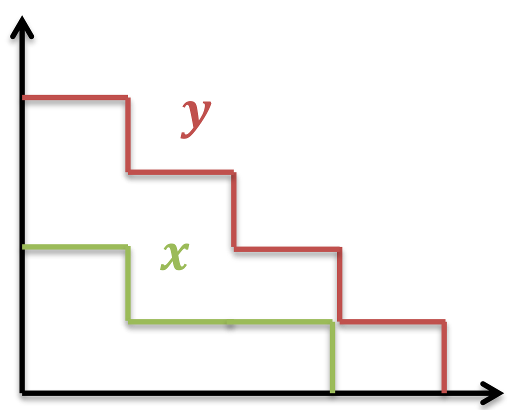
Def: *Relacja porządkująca* $\trianglelefteq$ (Gągolewski i Grzegorzewski, 2011)

Dla $\boldsymbol{x} \in \mathbb{I}^n$ oraz $\boldsymbol{y} \in \mathbb{I}^m$ powiemy, że $\boldsymbol{x} \trianglelefteq \boldsymbol{y}$ wtw, gdy $n \leq m$ oraz $x_i \leq y_i$ dla $i \leq n$.

Def: *Funkcja wpływu (impact function)* F

Funkcja F: $\mathbb{I}^{1,2,\dots} \to \mathbb{I}$, spełniająca warunki:

- Jeśli $\boldsymbol{x} \trianglelefteq \boldsymbol{y}$, to $\mathrm{F}(\boldsymbol{x}) \leq \mathrm{F}(\boldsymbol{y})$
- $\mathrm{F}(\boldsymbol{x}) \leq \mathrm{F}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$
- $\mathrm{F}(\boldsymbol{x}) = \mathrm{F}(\boldsymbol{x}_\sigma)$



Problemy związane z porządkami

Przeniesienie wyników z przestrzeni $\mathbb{I}^{1,2,\dots}$ do $\mathbb{I}$ umożliwia nam wprowadzenie porządku liniowego na wektorach z tej przestrzeni.

Pojawia się problem:

- Jeśli $\boldsymbol{x} \ntrianglelefteq \boldsymbol{y}$ oraz $\boldsymbol{y} \ntrianglelefteq \boldsymbol{x}$, to jak należałoby ustalić F$(\boldsymbol{x})$ oraz F$(\boldsymbol{y})$ aby było to „uczciwe”?

$$\boldsymbol{x} = (8, 6, 3)$$
$$\boldsymbol{y} = (5, 5, 5,4,3)$$

Problemy związane z porządkami

Def: *Uczciwa funkcja wpływu (fair impact function)* (Gągolewski 2013)

Powiewmy, że funkcja wpływu jest uczciwa, jeśli w przypadkach, gdy $x \ntrianglelefteq y$ ani $y \ntrianglelefteq x$ mamy

$$\mathsf{F}(\boldsymbol{x}) = \mathsf{F}(\boldsymbol{y})$$

Tw: (Gągolewski 2013)

Każda uczciwa funkcja wpływu jest trywialna: istnieje $c \in \mathbb{I}$ takie, że $\mathsf{F}(\boldsymbol{x}) = c, \forall \boldsymbol{x}$.

Problemy związane z porządkami

Okazuje się, że funkcjami wpływu można manipulować. Dokładniej, prawdziwe jest następujące twierdzenie:

Tw. (Gągolewski 2013)

Niech $\boldsymbol{x}^1, \boldsymbol{x}^2, \ldots, \boldsymbol{x}^n$ będą elementami przestrzeni $\mathbb{I}^{1,2,\ldots}$ takimi, że dla wszystkich $i \neq j$ mamy $\boldsymbol{x} \ntrianglelefteq \boldsymbol{y}$. Dla dowolnej permuatacji σ zbioru $\{1,2,\ldots,n\}$ istnieje taka funkcja wpływu, że

$$\mathrm{F}\left(\boldsymbol{x}^{\sigma(1)}\right) < \mathrm{F}\left(\boldsymbol{x}^{\sigma(2)}\right) < \cdots < \mathrm{F}\left(\boldsymbol{x}^{\sigma(n)}\right).$$

Alternatywne podejście – relacje rozmyte

Dotychczas rozpartywane przez nas relacje były 0-1. Rozważamy podejście rozmyte:

$$\boldsymbol{x} \trianglerighteq \boldsymbol{y}, \qquad \mu_{\trianglerighteq}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) \in [0,1]$$

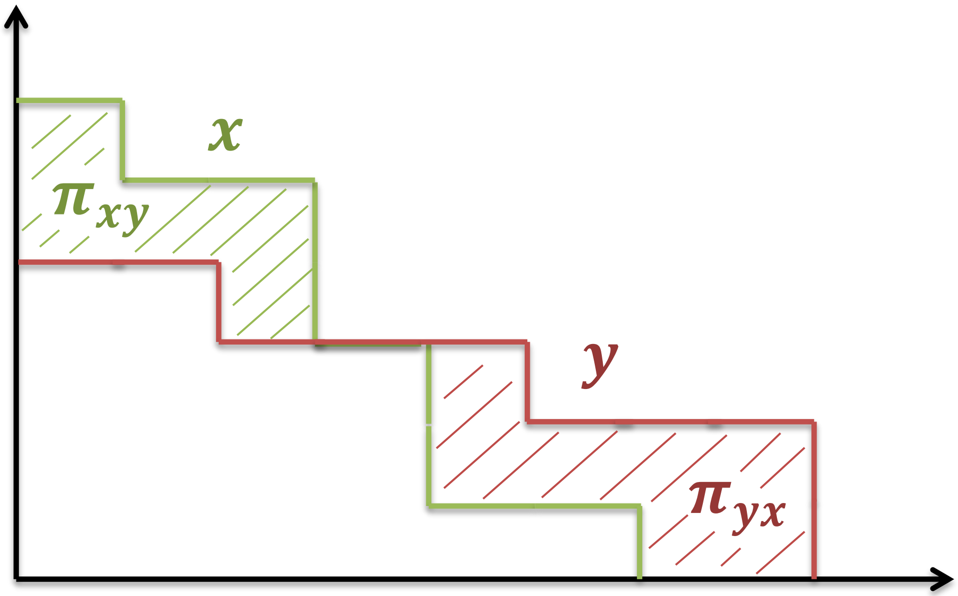
Propozycja:

$$\mu_{\trianglerighteq}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = \begin{cases} \dfrac{\pi_{xy}}{\pi_{xy} + \pi_{yx}}, jeśli\ \ \pi_{xy} + \pi_{yx} > 0 \\ \quad 1 \qquad\quad ,\ \ w\, p.p. \end{cases}$$

Alternatywne podejście – relacje rozmyte

Propozycja:

$$\mu_{\trianglerighteq}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = \begin{cases} \dfrac{\pi_{xy}}{\pi_{xy} + \pi_{yx}}, & jeśli\ \ \pi_{xy} + \pi_{yx} > 0 \\ 1, & w\ p.p. \end{cases}$$



Własności relacji

Własności:

✓ $\mu(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) = 1 - \mu(\boldsymbol{y},\boldsymbol{x})$ dla $\boldsymbol{x} \neq \boldsymbol{y}$

Czy relacja jest relacją porządku rozmytego?

✓ Zwrotność: $\mu(\boldsymbol{x},\boldsymbol{x}) = 1$

x Antysymetria: dla $\boldsymbol{x} \neq \boldsymbol{y}$

$\mu(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) \neq \mu(\boldsymbol{y},\boldsymbol{x})$ lub $\mu(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) = \mu(\boldsymbol{y},\boldsymbol{x}) = 0$

Nasza relacja jest jedynie asymetryczna (tzn. istnieją $\boldsymbol{x}$, $\boldsymbol{y}$ takie, że $\mu(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) \neq \mu(\boldsymbol{y},\boldsymbol{x})$) – możemy zatem liczyć jedynie na praporządek rozmyty

? Przechodniość – zależy od definicji

verte →

Przechodniość relacji (1)

Def. *Przechodniość relacji rozmytych rozmytych* (Peneva i Popchev 2007, Dubois i Prade 1980, Zimmermann 1993, Tanino 1984 i 1988, Zadeh 1971)

- max-min: $\forall\ \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{z}$

$$\mu(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{z}) \geq \min(\mu(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}), \mu(\mathbf{y}, \mathbf{z}))$$

- max-max: $\forall\ \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{z}$

$$\mu(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{z}) \geq \max(\mu(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}), \mu(\boldsymbol{y}, \boldsymbol{z}))$$

- Ograniczona max-min: $\forall\ \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{z}$ takich, że $\mu(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) \geq 0.5$ oraz $\mu(\boldsymbol{y}, \boldsymbol{z}) \geq 0.5$

$$\mu(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{z}) \geq \min(\mu(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}), \mu(\boldsymbol{y}, \boldsymbol{z}))$$

Przechodniość relacji (2)

Def. *Przechodniość relacji rozmwytych c.d.*

- Ograniczona max-max: $\forall\, \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{z}$ takich, że $\mu(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) \geq 0.5$ oraz $\mu(\boldsymbol{y}, \boldsymbol{z}) \geq 0.5$

$$\mu(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{z}) \geq \max(\mu(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}), \mu(\boldsymbol{y}, \boldsymbol{z}))$$

- Przechodniość addytywna: $\forall\, \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{z}$

$$\mu(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{z}) = \mu(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) + \mu(\boldsymbol{y}, \boldsymbol{z}) - 0.5$$

- Przechodniość max-Δ: $\forall\, x, y, z$

$$\mu(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{z}) \geq \max(\mu(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) + \mu(\boldsymbol{y}, \boldsymbol{z}) - 1, 0)$$

Przechodniość relacji (3)

U nas:

- max-min: $\forall\ \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{z}$

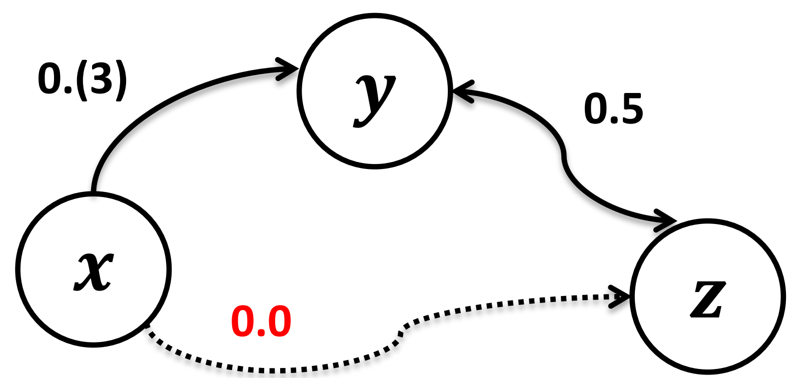
$$\mu(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{z}) \geq \min(\mu(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}), \mu(\boldsymbol{y}, \boldsymbol{z}))$$

  nie zachodzi. Kontrprzykład:

$$\boldsymbol{x} = (3,2,1)$$

$$\boldsymbol{y} = (4,1,1,1)$$

$$\boldsymbol{z} = (3,2,2)$$



Przechodniość relacji (4)

- max-max: $\forall\ \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{z}$

$$\mu(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{z}) \geq \max(\mu(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}), \mu(\boldsymbol{y}, \boldsymbol{z}))$$

  nie zachodzi – poprzedni kontrprzykład działa (mocniejsza własność).

- Ograniczona max-max: jeśli $\mu(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) \geq 0.5$ oraz $\mu(\boldsymbol{y}, \boldsymbol{z}) \geq 0.5$ to:

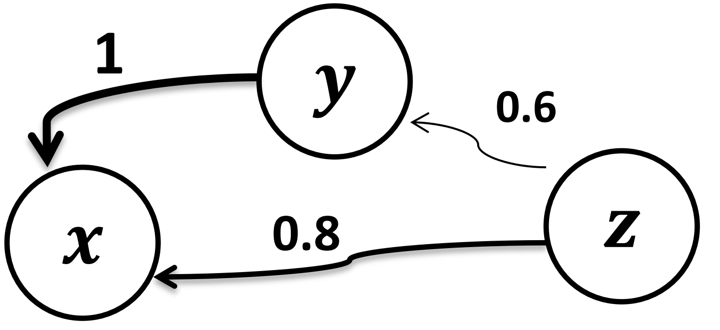
$$\mu(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{z}) \geq \max(\mu(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}), \mu(\boldsymbol{y}, \boldsymbol{z}))$$

  również nie zachodzi:

Przechodniość relacji (5)

- Kontrprzykład: $\mu(\boldsymbol{x},\boldsymbol{z}) \geq \max(\mu(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}),\mu(\boldsymbol{y},\boldsymbol{z}))$

$$\boldsymbol{x} = (5,4,3,1)$$
$$\boldsymbol{y} = (4,4,3)$$
$$\boldsymbol{z} = (3,3,2,2)$$



- Ograniczona max-min: $\forall\ \boldsymbol{x},\boldsymbol{y},\boldsymbol{z}$ takich, że $\mu(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) \geq 0.5$ oraz $\mu(\boldsymbol{y},\boldsymbol{z}) \geq 0.5$

$$\mu(\boldsymbol{x},\boldsymbol{z}) \geq \min(\mu(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}),\mu(\boldsymbol{y},\boldsymbol{z}))$$

Przechodniość relacji (6)

Obserwacje:

0) Mamy pokazać, że:

$$\frac{\pi_{xz}}{\pi_{xz}+\pi_{zx}} \geq \mathrm{max_y min}(\frac{\pi_{xy}}{\pi_{xy}+\pi_{yx}}, \frac{\pi_{yz}}{\pi_{yz}+\pi_{zy}})$$

1) Warunek $\mu(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) \geq 0.5$ oraz $\mu(\boldsymbol{y}, \boldsymbol{z}) \geq 0.5$ implikuje $i_\Sigma(\boldsymbol{x}) \geq i_\Sigma(\boldsymbol{y}) \geq \ i_\Sigma(\boldsymbol{z})$, gdzie $i_\Sigma(\boldsymbol{x}) = \sum_k x_k$

Przechodniość relacji (7)

Istotnie, mamy: $\frac{\pi_{xy}}{\pi_{xy}+\pi_{yx}} \geq 0.5$

$$\pi_{xy} \geq \pi_{yx}$$

$$\sum_k (x_k - y_k)_+ \geq \sum_k (y_k - x_k)_+$$

$$\sum_k min(x_k, y_k) + \sum_k (x_k - y_k)_+ \geq \sum_k (y_k - x_k)_+ + \sum_k min(x_k, y_k)$$

$$\sum_k x_k = i_\Sigma(x) \geq i_\Sigma(y) = \sum_k y_k$$

Zatem wektory są uporządkowane pod względem sumy współrzędnych

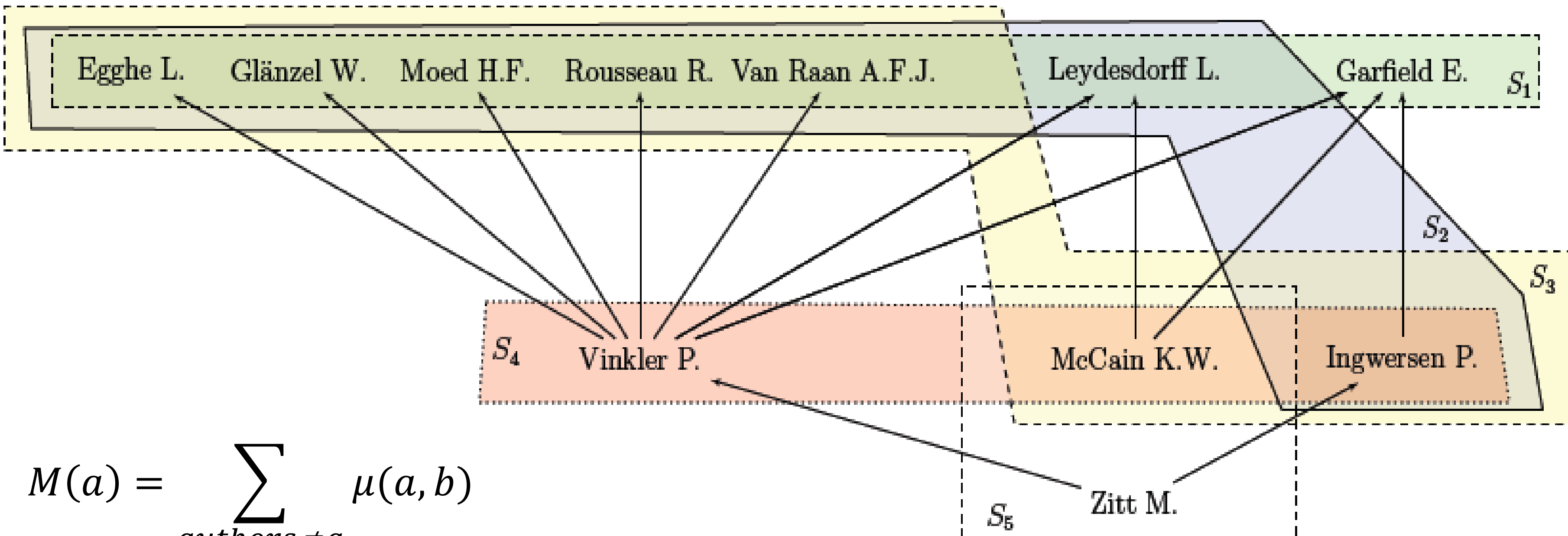
$$\frac{\pi_{xz}}{\pi_{xz}+\pi_{zx}} \geq \mathrm{max}_\mathrm{y} \mathrm{min}\left(\frac{\pi_{xy}}{\pi_{xy}+\pi_{yx}}, \frac{\pi_{yz}}{\pi_{yz}+\pi_{zy}}\right)$$

Przechodniość relacji (8)

3) Warunek $\mu(\boldsymbol{x},\boldsymbol{z}) \geq \min\big(\mu(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}),\mu(\boldsymbol{y},\boldsymbol{z})\big)$ zapisany dla $\mu(\boldsymbol{z},\boldsymbol{x}) \geq \min\big(\mu(\boldsymbol{z},\boldsymbol{y}),\mu(\boldsymbol{y},\boldsymbol{x})\big)$ implikuje konieczność spełnienia

$$\max\big(\mu(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}),\mu(\boldsymbol{y},\boldsymbol{z})\big) \geq \mu(\boldsymbol{x},\boldsymbol{z}) \geq \min\big(\mu(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}),\mu(\boldsymbol{y},\boldsymbol{z})\big)$$

Przykład: Medaliści Price'a



$$M(a) = \sum_{authors \neq a} \mu(a,b)$$

LEYDESDORFF L.	1.00	0.57	0.78	0.98	0.97	0.97	0.99	0.93	1.00	1.00	1.00
GARFIELD E.	0.43	1.00	0.54	0.84	0.83	0.87	0.92	1.00	1.00	1.00	1.00
GLANZEL W.	0.22	0.46	1.00	0.96	1.00	0.99	0.93	0.89	0.94	1.00	1.00
VAN RAAN A.F.J.	0.02	0.16	0.04	1.00	0.55	0.71	0.74	0.77	0.93	1.00	1.00
ROUSSEAU R.	0.03	0.17	0.00	0.45	1.00	0.55	0.78	0.73	0.90	1.00	1.00
MOED H.F.	0.03	0.13	0.01	0.29	0.45	1.00	0.68	0.74	0.91	1.00	1.00
EGGHE L.	0.01	0.08	0.07	0.26	0.22	0.32	1.00	0.58	0.97	1.00	1.00
INGWERSEN P.	0.07	0.00	0.11	0.23	0.27	0.26	0.42	1.00	0.95	1.00	1.00
MCCAIN K.W.	0.00	0.00	0.06	0.07	0.10	0.09	0.03	0.05	1.00	0.61	0.97
VINKLER P.	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.39	1.00	1.00
ZITT M.	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.03	0.00	1.00

Przykład: Medaliści Price'a

- Analiza skupień: algorytm k-medoidów
  - kluczowa jest definicja odległości / podobieństwa obiektów

LEYDESDORFF L.	1.00	0.57	0.78	0.98	0.97	0.97	0.99	0.93	1.00	1.00	1.00
GARFIELD E.	0.43	1.00	0.54	0.84	0.83	0.87	0.92	1.00	1.00	1.00	1.00
GLANZEL W.	0.22	0.46	1.00	0.96	1.00	0.99	0.93	0.89	0.94	1.00	1.00
VAN RAAN A.F.J.	0.02	0.16	0.04	1.00	0.55	0.71	0.74	0.77	0.93	1.00	1.00
ROUSSEAU R.	0.03	0.17	0.00	0.45	1.00	0.55	0.78	0.73	0.90	1.00	1.00
MOED H.F.	0.03	0.13	0.01	0.29	0.45	1.00	0.68	0.74	0.91	1.00	1.00
EGGHE L.	0.01	0.08	0.07	0.26	0.22	0.32	1.00	0.58	0.97	1.00	1.00
INGWERSEN P.	0.07	0.00	0.11	0.23	0.27	0.26	0.42	1.00	0.95	1.00	1.00
MCCAIN K.W.	0.00	0.00	0.06	0.07	0.10	0.09	0.03	0.05	1.00	0.61	0.97
VINKLER P.	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.39	1.00	1.00
ZITT M.	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.03	0.00	1.00

Dalsza praca

- wykazanie przechodniości relacji
- eksperymenty i teoretyczne podstawy analizy skupień oraz relacji porządku na grupach autorów (producentów)
- badanie różnych funkcji wpływu (metod rankingowania) operujących na macierzach porównań parami

Bibliografia

Gągolewski, M.: *Scientific Impact Assessment Cannot Be Fair*, Journal of Informetrics, Vol. 7, Iss. 4, 2013.

Lasek, J., Szlavik, Z. Bhulai, S. : *The Predictive Power of Ranking Systems in Association Football*, International Journal of Applied Pattern Recognition, Vol. 1, Iss. 1, 2013.

Gągolewski, M., Grzegorzewski, P.: *Possibilistic Analysis of Arity-Monotonic Aggregation Operators and Its Relation to Bibliometric Impact Assessment of Individuals*, International Journal of Approximate Reasoning, Vol. 52, Iss. 9, 2011.

Peneva, V., Popchev, I.: *Aggregation of Fuzzy Preference Relations to Multicriteria Decision Making*, Fuzzy Optimization and Decision Making, Vol. 6, Iss. 4, 2007.

Kwang, H. L.: *First Course on Fuzzy Theory and Applications*, Springer, Berlin Heidelberg, 2005.

Bibliografia

Zimmermann, H. J.: *Fuzzy Set Theory and its Applications,* Kluwer Academic Publishers, Noewell, MA, 1993.

Tanino, T: *Fuzzy Preference Relations in Group Decision Making*, In J. Kacprzyk, Roubens, M. (eds.): *Non-conventional Preference Relations in Group Decision Making*, Springer, Berlin Heidelberg, 1988.

Tanino, T.: *Fuzzy Preference Orderings in Group Decision Making,* Fuzzy Sets and Systems, Vol. 12, 1984.

Dubois, D., Prade, H.: *Fuzzy Sets and Systems: Theory and Applications,* New York, Academic Press, 1980.

Zadeh, L. A.*: A Similarity Relations and Fuzzy Orderings*, Information Science, Vol. 3, Iss. 2, 1971