

Sylabus: Modelowanie matematyczne

Autor: dr Katarzyna Szulc

Studia doktoranckie

Rok akademicki: 2015/2016

Wymagania wstępne w zakresie wiedzy, umiejętności i innych kompetencji

Podstawowa znajomość matematyki na poziomie kursu politechnicznego, a w szczególności algebry liniowej, rachunku różniczkowego i całkowego, analizy zespolonej, równań różniczkowych i teorii prawdopodobieństwa.

Skrócony opis przedmiotu

Celem wykładu jest przedstawienie metod i narzędzi modelowania. Wykład rozpoczyna się od omówienia różnych typów modeli i ich krótkiej charakteryzacji. Jednak większość czasu jest poświęcona na analizie modeli dynamicznych opisanych równaniami różniczkowymi zwyczajnymi i cząstkowymi oraz ich właściwościom. Wśród tych pierwszych bardziej szczegółowo jest omówiona klasa modeli kompartmentowych, które są zbiorem połączonych modeli pierwszego rzędu, opisujących przepływy i akumulację materiału lub energii w pewnych obszarach. Rozważone są modele stałe i zmienne w czasie, a także pewne typy modeli nieliniowych. Przedstawione są zagadnienia odwrotne, sterowalność, obserwowalność, identyfikowalność modeli, stabilność rozwiązań, problemy źle uwarunkowane i źle postawione, regularyzację, a także stabilność modeli. Omawia się konstrukcję, klasyfikację i najważniejsze praktycznie typy modeli opisanych równaniami różniczkowymi cząstkowymi, a także typy zadań zależne od rodzaju warunków początkowych i brzegowych. Przedstawia się różne pojęcia rozwiązania modelu, a także podstawowe metody rozwiązywania tego typu równań: analityczne, jak metoda charakterystyk, czy metoda separacji zmiennych, oraz numeryczne, jak metoda Galerkina, czy metoda elementów skończonych.

Treści programowe

1. Pojęcie modelu. Modele liniowe i nieliniowe. Modele statyczne i dynamiczne. Antycypacja i przyczynowość. Modele deterministyczne i niedeterministyczne. Modele ciągłe i dyskretne. Podstawowe operatory. Transformata Laplace'a, Fouriera i Z. Modelowanie zakłóceń. Pojęcie procesów stochastycznych. Wygładzanie, filtracja i predykcja.
2. Równania różniczkowe zwyczajne. Jednoznaczność rozwiązań. Warunki początkowe i brzegowe. Równania liniowe. Sprowadzanie równań wyższego rzędu do układu równań pierwszego rzędu. Pochodne macierzy. Równania jednorodne i niejednorodne. Wronskian. Układ fundamentalny rozwiązań. Funkcja wykładnicza macierzy. Jej właściwości i jej obliczanie. Zastosowanie do rozwiązywania układu równań różniczkowych.
3. Modele kompartmentowe. Modele ze stałymi parametrami. Modele pierwszego, drugiego, trzeciego i czwartego rzędu. Przykłady modeli rzeczywistych systemów. Właściwości modeli kompartmentowych. Typy modeli rozwiązywalnych analitycznie. Kolokwium z zakresu równań różniczkowych zwyczajnych i modeli kompartmentowych. Zadania odwrotne. Identyfikowalność parametryczna modeli. Regularyzacja. Problemy poprawnie określone. Wrażliwość i uwarunkowanie zadania. Modele w postaci równań stanu. Struktura modelu. Identyfikowalność systemowa. Wyznaczanie struktury modelu. Modele nierozpoznawalne. Modele równoważne. Obserwowalność i sterowalność modeli. Modele minimalne. Stabilność modeli. Stabilność zewnętrzna (Laplace'a) i wewnętrzna (Lapunowa). Analiza stabilności na płaszczyźnie fazowej. Kryterium Lapunowa. Modele zlinearyzowane. Modele kompartmentowe z parametrami zmiennymi w czasie. Modele nieliniowe z eliminacją Michaelisa-Mentena.
4. Równania różniczkowe cząstkowe. Rozwiązania klasyczne i słabe. Rozwiązanie ogólne. Warunki początkowe i brzegowe. Jednoznaczność rozwiązania. Najważniejsze typy równań różniczkowych cząstkowych drugiego rzędu. Ogólne równanie różniczkowe cząstkowe drugiego rzędu. Klasyfikacja liniowych równań drugiego rzędu. Podstawowe metody rozwiązywania równań drugiego rzędu: metoda charakterystyk, metoda rozdzielonych zmiennych, przykłady. Podstawowe metody rozwiązywania numerycznego liniowych równań różniczkowych cząstkowych: metoda różnic skończonych, metoda Galerkina, metoda elementów skończonych. Zastosowanie transformaty Fouriera do rozwiązywania równań z warunkami brzegowymi. Zastosowanie transformaty Laplace'a do rozwiązywania równań z warunkami początkowymi.